Operazioni coomologiche stabili e coomologia dei $K(\mathbb{Z}_2, n)$

Cristian Sopio

20 Ottobre 2021

Indice

Richiami

Definizione

Un'operazione coomologica è una trasformazione $\Theta_X : \mathcal{H}^m(X;G) \longrightarrow \mathcal{H}^n(X;H)$ *con* m, n *fissati, per cui, data* $f : X \longrightarrow Y$ *si ha il diagramma commutativo*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^m(Y;G) & \xrightarrow{\Theta_Y} & \mathcal{H}^n(Y;H) \\ \Big\downarrow{f^*} & & \Big\downarrow{f^*} \\ \mathcal{H}^m(X;G) & \xrightarrow{\Theta_X} & \mathcal{H}^n(X;H) \end{array}$$

Richiami

Definizione

Un'operazione coomologica è una trasformazione $\Theta_X : \mathcal{H}^m(X;G) \longrightarrow \mathcal{H}^n(X;H)$ con m, n fissati, per cui, data $f : X \longrightarrow Y$ si ha il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^m(Y;G) & \xrightarrow{\Theta_Y} & \mathcal{H}^n(Y;H) \\ \downarrow f^* & & \downarrow f^* \\ \mathcal{H}^m(X;G) & \xrightarrow{\Theta_X} & \mathcal{H}^n(X;H) \end{array}$$

Indichiamo l'insieme di queste operazioni con

$$\mathcal{O}(m, n, G, H).$$

Proposizione

Fissati m, n, G, H si ha l'isomorfismo canonico

$$\mathcal{O}(m, n, G, H) \simeq \mathcal{H}^n(K(G, m); H).$$

Proposizione

Fissati m, n, G, H si ha l'isomorfismo canonico

$$\mathcal{O}(m, n, G, H) \simeq \mathcal{H}^n(K(G, m); H).$$

Corollario

Dato che $K(G, m)$ è $(m-1)$-connesso, le operazioni coomologiche non possono scendere, ovvero $m \geq n$.

Proposizione

Fissati m, n, G, H si ha l'isomorfismo canonico

$$\mathcal{O}(m, n, G, H) \simeq \mathcal{H}^n(K(G, m); H).$$

Corollario

Dato che $K(G, m)$ è $(m-1)$-connesso, le operazioni coomologiche non possono scendere, ovvero $m \geq n$.
Per Hurewicz, se $n < m$:

$$\mathcal{H}^n(K(G, m); H) = 0.$$

Operazioni stabili

Definizione

Un'operazione coomologica stabile dalla coomologia a coefficienti in G a coefficienti in H è una successione di operazioni coomologiche $\phi_n \in \mathcal{O}(n, n+q, G, H)$ definite per $n = 1, 2, 3, \ldots$ e tali che per ogni CW-complesso X e per ogni n commuti

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}^n(X;G) \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[d, "\phi_n"] & \mathcal{H}^{n+1}(\Sigma X;G) \arrow[d, "\phi_{n+1}"] \\ \mathcal{H}^{n+q}(X;H) \arrow[r, "\Sigma"] & \mathcal{H}^{n+q+1}(\Sigma X;H). \end{tikzcd}$$

Caratterizzazione delle stabili

Per il teorema di Brown, possiamo rappresentare $\mathcal{H}^n(X; G)$ come $[X, K(G, n)]$.

Caratterizzazione delle stabili

Per il teorema di Brown, possiamo rappresentare $\mathcal{H}^n(X;G)$ come $[X, K(G,n)]$.Usando il loop space e l'aggiunzione con la mappa di sospensione, si ottiene

$$[X, K(G,n)] = [X, \Omega K(G, n+1)] =$$

$$[\Sigma X, K(G, n+1)].$$

Caratterizzazione delle stabili

Consideriamo un'operazione stabile ϕ che aumenta la dimensione di q.

Caratterizzazione delle stabili

Consideriamo un'operazione stabile ϕ che aumenta la dimensione di q.

$$\phi_n \in \mathcal{H}^{n+q}(K(G,n),H)$$

Caratterizzazione delle stabili

Consideriamo un'operazione stabile ϕ che aumenta la dimensione di q.

$$\phi_n \in \mathcal{H}^{n+q}(K(G,n),H)$$

La condizione che ϕ sia stabile si traduce in

$$f_n(\phi_n) = \phi_{n-1}$$

Caratterizzazione delle stabili

Consideriamo un'operazione stabile ϕ che aumenta la dimensione di q.

$$\phi_n \in \mathcal{H}^{n+q}(K(G,n),H)$$

La condizione che ϕ sia stabile si traduce in

$$f_n(\phi_n) = \phi_{n-1}$$

dove f_n è la composizione

$$\mathcal{H}^{n+q}(K(G,n);H) \xrightarrow{i_n^*} \mathcal{H}^{n+q}(\Sigma K(G,n-1);H)$$

$$\xrightarrow{\Sigma^{-1}} \mathcal{H}^{n+q-1}(K(G,n-1);H).$$

Caratterizzazione delle stabili

Denotiamo le operazioni stabili che aumentano la dimensione di q con $\mathcal{O}^S(q, G, H)$.

Caratterizzazione delle stabili

Denotiamo le operazioni stabili che aumentano la dimensione di q con $\mathcal{O}^S(q, G, H)$.

Proposizione

Le operazioni coomologiche stabili $\mathcal{O}^S(q, G, H)$ sono il limite proiettivo della successione

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{H}^{q+n}(K(G,n);H) \longrightarrow \mathcal{H}^{q+n-1}(K(G,n-1);H)$$

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{H}^{q+1}(K(G,1);H)$$

con le mappe $f_n : \mathcal{H}^{q+n}(K(G,n);H) \longrightarrow \mathcal{H}^{q+n-1}(K(G,n-1);H)$

Coefficienti in $\mathbb{Z}_2$

Se prendiamo $G = H = \mathbb{Z}_2$ otteniamo una caratterizzazione più forte.

Coefficienti in $\mathbb{Z}_2$

Se prendiamo $G = H = \mathbb{Z}_2$ otteniamo una caratterizzazione più forte.
La mappa

$$f : \Sigma K(\mathbb{Z}_2, n) \longrightarrow K(\mathbb{Z}_2, n+1)$$

Coefficienti in $\mathbb{Z}_2$

Se prendiamo $G = H = \mathbb{Z}_2$ otteniamo una caratterizzazione più forte.
La mappa

$$f : \Sigma K(\mathbb{Z}_2, n) \longrightarrow K(\mathbb{Z}_2, n+1)$$

induce un isomorfismo tra

$$\pi_n(K(\mathbb{Z}_2, n)) \simeq \pi_{n+1}(\Sigma K(\mathbb{Z}_2, n)) \simeq \pi_{n+1}(K(\mathbb{Z}_2, n+1))$$

Coefficienti in $\mathbb{Z}_2$

Se prendiamo $G = H = \mathbb{Z}_2$ otteniamo una caratterizzazione più forte.
La mappa

$$f : \Sigma K(\mathbb{Z}_2, n) \longrightarrow K(\mathbb{Z}_2, n+1)$$

induce un isomorfismo tra

$$\pi_n(K(\mathbb{Z}_2, n)) \simeq \pi_{n+1}(\Sigma K(\mathbb{Z}_2, n)) \simeq \pi_{n+1}(K(\mathbb{Z}_2, n+1))$$

Per Freudenthal, $K(\mathbb{Z}_2, n+1)$ e $\Sigma K(\mathbb{Z}_2, n)$ hanno gruppi di omotopia isomorfi fino a circa $2n$ e quindi quelli di omologia e coomologia.

Coefficienti in $\mathbb{Z}_2$

Da cui il limite proiettivo

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{H}^{q+n+1}(K(\mathbb{Z}_2, n+1); \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathcal{H}^{q+n}(K(\mathbb{Z}_2, n); \mathbb{Z}_2)$$

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{H}^{q+1}(K(\mathbb{Z}_2, 1); \mathbb{Z}_2)$$

Coefficienti in $\mathbb{Z}_2$

Da cui il limite proiettivo

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{H}^{q+n+1}(K(\mathbb{Z}_2, n+1); \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathcal{H}^{q+n}(K(\mathbb{Z}_2, n); \mathbb{Z}_2)$$

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{H}^{q+1}(K(\mathbb{Z}_2, 1); \mathbb{Z}_2)$$

stabilizza in tempo finito, e quindi, se $n \geq q+2$ è abbastanza grande

$$\mathcal{O}^S(q, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) = \mathcal{H}^{n+q}(K(\mathbb{Z}_2, n), \mathbb{Z}_2).$$

Quadrati di Steenrod

Chiamiamo *quadrati di Steenrod* le operazioni coomologiche stabili che allo stesso tempo siano morfismi additivi

Quadrati di Steenrod

Chiamiamo *quadrati di Steenrod* le operazioni coomologiche stabili che allo stesso tempo siano morfismi additivi

$$Sq^i : \mathcal{H}^n(X;\mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathcal{H}^{n+i}(X;\mathbb{Z}_2)$$

Quadrati di Steenrod

Chiamiamo *quadrati di Steenrod* le operazioni coomologiche stabili che allo stesso tempo siano morfismi additivi

$$Sq^i : \mathcal{H}^n(X;\mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathcal{H}^{n+i}(X;\mathbb{Z}_2)$$

che soddisfano

$$Sq^i(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{se } i > deg(\alpha) \\ \alpha^2 & \text{se } i = deg(\alpha) \\ \alpha & \text{se } i = 0 \end{cases}$$

Quadrati di Steenrod

Chiamiamo *quadrati di Steenrod* le operazioni coomologiche stabili che allo stesso tempo siano morfismi additivi

$$Sq^i : \mathcal{H}^n(X;\mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathcal{H}^{n+i}(X;\mathbb{Z}_2)$$

che soddisfano

$$Sq^i(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{se } i > deg(\alpha) \\ \alpha^2 & \text{se } i = deg(\alpha) \\ \alpha & \text{se } i = 0 \end{cases}$$

$$Sq^i(\alpha\beta) = \sum_j Sq^j(\alpha)Sq^{i-j}(\beta) \text{ (formula di Cartan)}$$

Relazioni di Adém

la composizione di Sq^a e Sq^b, Se $a < 2b$, soddisfa le relazioni di Adém

Relazioni di Adém

la composizione di Sq^a e Sq^b, Se $a < 2b$, soddisfa le relazioni di Adém

$$Sq^a Sq^b = \sum_j \binom{b-j-1}{a-2j} Sq^{a+b-j} Sq^j.$$

Relazioni di Adém

la composizione di Sq^a e Sq^b, Se $a < 2b$, soddisfa le relazioni di Adém

$$Sq^a Sq^b = \sum_j \binom{b-j-1}{a-2j} Sq^{a+b-j} Sq^j.$$

Proposizione

Se i non è una potenza di 2 esiste una relazione

$$Sq^i = \sum_{0<j<i} a_j Sq^{i-j} Sq^j$$

con coefficienti $a_j \in \mathbb{Z}_2$.

Teorema

I quadrati di Steenrod esistono e sono unici.

Algebra di Steenrod

Definizione

L'anello $\bigoplus_{q\in\mathbb{N}} \mathcal{O}^S(q,\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2)$ delle operazioni coomologiche stabili a coefficienti in $\mathbb{Z}_2$, viene detto algebra di Steenrod con l'operazione di composizione, e verrà indicato con $\mathcal{A}_2$.

Invariante più fine della coomologia

Osservazione

$\mathcal{H}^*(X;\mathbb{Z}_2)$ è un algebra di $\mathcal{A}_2$.

Invariante più fine della coomologia

Osservazione

$\mathcal{H}^*(X;\mathbb{Z}_2)$ è un algebra di $\mathcal{A}_2$.

Consideriamo

$$X = \mathbb{CP}^n/\mathbb{CP}^{n-2} \qquad Y = S^{2n} \vee S^{2n-2}.$$

Invariante più fine della coomologia

Osservazione

$\mathcal{H}^*(X;\mathbb{Z}_2)$ è un algebra di $\mathcal{A}_2$.

Consideriamo

$$X = \mathbb{CP}^n/\mathbb{CP}^{n-2} \qquad\qquad Y = S^{2n} \vee S^{2n-2}.$$

$$\mathcal{H}^k(X,\mathbb{Z}_2) \simeq \mathcal{H}^k(Y,\mathbb{Z}_2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{se } k = 0, 2n-2, 2n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Azione di $\mathcal{A}_2$

Oss: Gli anelli di coomologia sono isomorfi

$$\mathbb{Z}_2^{(0)} \oplus \mathbb{Z}_2^{(2n-2)} \oplus \mathbb{Z}_2^{(2n)}.$$

Azione di $\mathcal{A}_2$

Oss: Gli anelli di coomologia sono isomorfi

$$\mathbb{Z}_2^{(0)} \oplus \mathbb{Z}_2^{(2n-2)} \oplus \mathbb{Z}_2^{(2n)}.$$

Se n è pari i due spazi non sono omotopicamente equivalenti.

Azione di $\mathcal{A}_2$

Oss: Gli anelli di coomologia sono isomorfi

$$\mathbb{Z}_2^{(0)} \oplus \mathbb{Z}_2^{(2n-2)} \oplus \mathbb{Z}_2^{(2n)}.$$

Se n è pari i due spazi non sono omotopicamente equivalenti. Consideriamo

$$Sq^2 : \mathcal{H}^{2n-2}(S^{2n} \vee S^{2n-2}; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathcal{H}^{2n}(S^{2n} \vee S^{2n-2}; \mathbb{Z}_2)$$

e

$$Sq^2 : \mathcal{H}^{2n-2}(\mathbb{CP}^n/\mathbb{CP}^{n-2}; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathcal{H}^{2n}(\mathbb{CP}^n/\mathbb{CP}^{n-2}; \mathbb{Z}_2)$$

Azione di $\mathcal{A}_2$

Essendo i quadrati di Steenrod operazioni coomologiche, sono naturali. Usando

$$S^{2n-2} \sqcup S^{2n} \longrightarrow S^{2n-2} \vee S^{2n}$$

Azione di $\mathcal{A}_2$

Essendo i quadrati di Steenrod operazioni coomologiche, sono naturali. Usando

$$S^{2n-2} \sqcup S^{2n} \longrightarrow S^{2n-2} \vee S^{2n}$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}^{2n-2}(S^{2n-2} \sqcup S^{2n}; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{Sq^2 \equiv 0} & \mathcal{H}^{2n}(S^{2n-2} \sqcup S^{2n}; \mathbb{Z}_2) \\
\wr\uparrow & & \wr\uparrow \\
\mathcal{H}^{2n-2}(S^{2n-2} \vee S^{2n}; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{Sq^2} & \mathcal{H}^{2n}(S^{2n-2} \vee S^{2n}; \mathbb{Z}_2).
\end{array}$$

Invece, considerando

$$\mathbb{CP}^n \longrightarrow \mathbb{CP}^n/\mathbb{CP}^{n-2}$$

Invece, considerando

$$\mathbb{CP}^n \longrightarrow \mathbb{CP}^n/\mathbb{CP}^{n-2}$$

se x è un generatore di $\mathbb{CP}^n$, le uniche potenze di x che sopravvivono nel quoziente sono x^{n-1} e x^n.

Invece, considerando

$$\mathbb{CP}^n \longrightarrow \mathbb{CP}^n/\mathbb{CP}^{n-2}$$

se x è un generatore di $\mathbb{CP}^n$, le uniche potenze di x che sopravvivono nel quoziente sono x^{n-1} e x^n.
Per naturalità

$$Sq^2 : \mathcal{H}^{2n-2}(\mathbb{CP}^n/\mathbb{CP}^{n-2}; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathcal{H}^{2n}(\mathbb{CP}^n/\mathbb{CP}^{n-2}; \mathbb{Z}_2)$$

$$x^{n-1} \longmapsto (n-1)x^n$$

Teorema di Serre

Teorema di Borel

Definizione

Data una k-algebra R, degli elementi di R sono un sistema semplice di generatori se i loro prodotti distinti formano una base.

Teorema di Borel

Definizione

Data una k-algebra R, degli elementi di R sono un sistema semplice di generatori se i loro prodotti distinti formano una base.

Teorema

Sia $F \longrightarrow X \longrightarrow B$ una fibrazione con X contrattile e B semplicemente connesso. Supponiamo che $\mathcal{H}^*(F;k)$ a coefficienti in un campo k abbia una base data dai prodotti $a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k}$ degli elementi trasgressivi distinti $a_{i_1} \in \mathcal{H}^*(F;k)$, che hanno dimensione dispari se la caratteristica del campo è diversa da 2. Allora

$$\mathcal{H}^*(B;k) \simeq k[\cdots, b_i, \cdots]$$

dove gli elementi b_i rappresentano le tragressioni $\tau(a_i)$.

Definizioni preliminari

Introduciamo la notazione $Sq^I = Sq^{i_1} \cdots Sq^{i_k}$ con I una sequenza di interi non negativi $i_1, \ldots, i_k$.

Definizioni preliminari

Introduciamo la notazione $Sq^I = Sq^{i_1} \cdots Sq^{i_k}$ con I una sequenza di interi non negativi $i_1, \dots, i_k$.

Definizione

Una composizione Sq^I è detta ammissibile se non ci sono relazioni di Adém da applicarci, ovvero se $i_j \geq 2i_{j+1}$ per ogni $j = 1, \dots, k$.

Definizioni preliminari

Introduciamo la notazione $Sq^I = Sq^{i_1} \cdots Sq^{i_k}$ con I una sequenza di interi non negativi $i_1, \dots, i_k$.

Definizione

Una composizione Sq^I è detta ammissibile se non ci sono relazioni di Adém da applicarci, ovvero se $i_j \geq 2i_{j+1}$ per ogni $j = 1, \dots, k$.

Definizione

Si dice eccesso di un monomio ammissibile Sq^I, la quantità

$$e(I) = \sum_j (i_j - 2i_{j+1}) = i_1 - (i_2 + \ldots + i_k),$$

ovvero quanto Sq^I eccede dall'essere ammissibile.

Teorema di Serre

Teorema

$\mathcal{H}^*(K(\mathbb{Z}_2, n); \mathbb{Z}_2)$ è l'anello polinomiale $\mathbb{Z}_2[Sq^I(\iota_n)]$ dove ι_n è la classe fondamentale dell'$\mathcal{H}^n(K(\mathbb{Z}_2, n); \mathbb{Z}_2)$ ed I varia tra tutte le sequenze ammissibili di eccesso minore stretto di n.

Per $n = 1$ si ha

$$\mathcal{H}^*(\mathbb{RP}^\infty, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2[\iota_1].$$

Per $n = 1$ si ha

$$\mathcal{H}^*(\mathbb{RP}^\infty, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2[\iota_1].$$

Per $n = 2$

$$\mathcal{H}^*(K(\mathbb{Z}_2, 2); \mathbb{Z}_2)$$

è l'anello dei polinomi nella successione infinita di generatori $\iota_2, Sq^1(\iota_2), Sq^2 Sq^1(\iota_2), \dots$

Per $n = 1$ si ha

$$\mathcal{H}^*(\mathbb{RP}^\infty, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2[\iota_1].$$

Per $n = 2$

$$\mathcal{H}^*(K(\mathbb{Z}_2, 2); \mathbb{Z}_2)$$

è l'anello dei polinomi nella successione infinita di generatori $\iota_2, Sq^1(\iota_2), Sq^2 Sq^1(\iota_2), \ldots$

Accade che le potenze 2^j-esime dei generatori di

$$\mathcal{H}^*(K(\mathbb{Z}_2, n); \mathbb{Z}_2)$$

passando a $K(\mathbb{Z}_2, n+1)$ shiftano di una dimensione

Per $n = 1$ si ha

$$\mathcal{H}^*(\mathbb{RP}^\infty, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2[\iota_1].$$

Per $n = 2$

$$\mathcal{H}^*(K(\mathbb{Z}_2, 2); \mathbb{Z}_2)$$

è l'anello dei polinomi nella successione infinita di generatori $\iota_2, Sq^1(\iota_2), Sq^2 Sq^1(\iota_2), \ldots$.
Accade che le potenze 2^j-esime dei generatori di

$$\mathcal{H}^*(K(\mathbb{Z}_2, n); \mathbb{Z}_2)$$

passando a $K(\mathbb{Z}_2, n+1)$ shiftano di una dimensione e diventano nuovi generatori di

$$\mathcal{H}^*(K(\mathbb{Z}_2, n+1); \mathbb{Z}_2).$$

Infatti, se $n = 1$ si ha che

$$\iota_1$$

$$\iota_1^2 = Sq^1(\iota_1)$$

$$\iota_1^4 = Sq^2 Sq^1(\iota_1)$$

$$\cdots$$

Infatti, se $n = 1$ si ha che

$$\iota_1$$

$$\iota_1^2 = Sq^1(\iota_1)$$

$$\iota_1^4 = Sq^2 Sq^1(\iota_1)$$

$$\dots$$

shiftano e diventano

$$\iota_2$$

$$Sq^1(\iota_2)$$

$$Sq^2 Sq^1(\iota_2)$$

$$\dots$$

Lemma

1. $Sq^I(\iota_n) = 0$ se Sq^I è ammissibile con $e(I) > n$.
2. Gli elementi $Sq^I(\iota_n)$ con Sq^I ammissibile e $e(I) = n$ sono esattamente le potenze di $(Sq^J(\iota_n))^{2^j}$ con J ammissibile e $e(J) < n$.

Lemma

1. *$Sq^I(\iota_n) = 0$ se Sq^I è ammissibile con $e(I) > n$.*
2. *Gli elementi $Sq^I(\iota_n)$ con Sq^I ammissibile e $e(I) = n$ sono esattamente le potenze di $(Sq^J(\iota_n))^{2^j}$ con J ammissibile e $e(J) < n$.*

- Siano $I = (i_1, \ldots, i_n)$ e $i_1 = e(I) + i_2 + \ldots + i_k$. Se $e(I) > n$ si ha
$$i_1 > n + i_2 + \ldots + i_k = |Sq^{i_2} \cdots Sq^{i_k}(\iota_n)|$$
da cui $Sq^I(\iota_n) = Sq^{i_1}\left(Sq^{i_2} \cdots Sq^{i_n}(\iota_n)\right) = 0.$

$\Longrightarrow$ Se $e(I) = n$,

$$i_1 = n + i_2 + \ldots + i_k,$$
$$Sq^I(\iota_n) = (Sq^{i_2} \cdots Sq^{i_k}(\iota_n))^2.$$

$\Longrightarrow$ Se $e(I) = n$,

$$i_1 = n + i_2 + \ldots + i_k,$$

$$Sq^I(\iota_n) = (Sq^{i_2} \cdots Sq^{i_k}(\iota_n))^2.$$

Dato che Sq^I è ammissibile e $i_1 \geq i_2$,

$$e(i_2, \ldots, i_k) \leq e(I) = n$$

$\Longrightarrow$ Se $e(I) = n$,

$$i_1 = n + i_2 + \ldots + i_k,$$

$$Sq^I(\iota_n) = (Sq^{i_2} \cdots Sq^{i_k}(\iota_n))^2.$$

Dato che Sq^I è ammissibile e $i_1 \geq i_2$,

$$e(i_2, \ldots, i_k) \leq e(I) = n$$

e nel caso sia $e(i_2, \ldots, i_k) = n$ si ripete fino ad ottenere

$$Sq^I(\iota_n) = (Sq^J(\iota_n))^{2^j}$$

con $e(J) < n$.

Dimostrazione di Serre

Lemma

Se $y \in \mathcal{H}^*(F;\mathbb{Z}_2)$ *è trasgressivo allora è della forma* $Sq^i(x)$ *e*

$$\tau(Sq^i(x)) = Sq^i(\tau(x)).$$

Dimostrazione di Serre

Lemma

Se $y \in \mathcal{H}^*(F; \mathbb{Z}_2)$ *è trasgressivo allora è della forma* $Sq^i(x)$ *e*

$$\tau(Sq^i(x)) = Sq^i(\tau(x)).$$

Passo base

$\mathcal{H}^*(K(\mathbb{Z}_2, 1); \mathbb{Z}_2) = \mathcal{H}^*(\mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[\iota_1]$

Dimostrazione di Serre

Lemma

Se $y \in \mathcal{H}^*(F; \mathbb{Z}_2)$ è trasgressivo allora è della forma $Sq^i(x)$ e

$$\tau(Sq^i(x)) = Sq^i(\tau(x)).$$

Passo base

$\mathcal{H}^*(K(\mathbb{Z}_2, 1); \mathbb{Z}_2) = \mathcal{H}^*(\mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[\iota_1]$

Usando la fibrazione

$$K(\mathbb{Z}_2, 1) \longrightarrow PK(\mathbb{Z}_2, 2) \longrightarrow K(\mathbb{Z}_2, 2)$$

si ha per $K(\mathbb{Z}_2, 1)$ i generatori

$$\iota_1^{2^i} = Sq^{2^{i-1}} \cdots Sq^2 Sq^1(\iota_1).$$

Per il lemma sono trasgressivi dato che ι_1 è trasgressivo e

$$\tau(\iota_1) = \iota_2.$$

Per il lemma sono trasgressivi dato che ι_1 è trasgressivo e

$$\tau(\iota_1) = \iota_2.$$

Per il teorema di Borel si ha che $\mathcal{H}^*(K(\mathbb{Z}_2, 2); \mathbb{Z}_2)$ è l'anello polinomiale su i generatori

$$\tau(Sq^{2^i} \cdots Sq^2 Sq^1(\iota_1)) = Sq^{2^i} \cdots Sq^2 Sq^1(\iota_2).$$

Per il lemma sono trasgressivi dato che ι_1 è trasgressivo e

$$\tau(\iota_1) = \iota_2.$$

Per il teorema di Borel si ha che $\mathcal{H}^*(K(\mathbb{Z}_2, 2); \mathbb{Z}_2)$ è l'anello polinomiale su i generatori

$$\tau(Sq^{2^i} \cdots Sq^2 Sq^1(\iota_1)) = Sq^{2^i} \cdots Sq^2 Sq^1(\iota_2).$$

Caso generale: se $\mathcal{H}^*(K(\mathbb{Z}_2, n); \mathbb{Z}_2)$ è l'anello polinomiale sulle variabili ammissibili $Sq^I(\iota_n)$ con $e(I) < n$.

Per il lemma sono trasgressivi dato che ι_1 è trasgressivo e

$$\tau(\iota_1) = \iota_2.$$

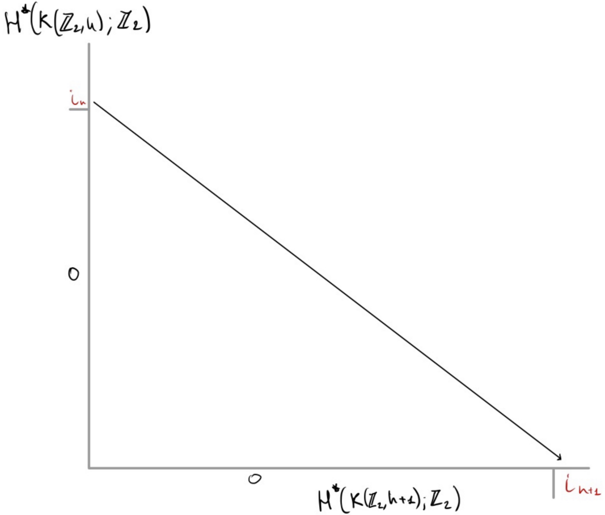
Per il teorema di Borel si ha che $\mathcal{H}^*(K(\mathbb{Z}_2, 2); \mathbb{Z}_2)$ è l'anello polinomiale su i generatori

$$\tau(Sq^{2^i} \cdots Sq^2 Sq^1(\iota_1)) = Sq^{2^i} \cdots Sq^2 Sq^1(\iota_2).$$

Caso generale: se $\mathcal{H}^*(K(\mathbb{Z}_2, n); \mathbb{Z}_2)$ è l'anello polinomiale sulle variabili ammissibili $Sq^I(\iota_n)$ con $e(I) < n$.
Si ha che un sistema semplice di generatori è dato dalle potenze 2^j-esime di $Sq^I(\iota_n)$ con $j = 0, 1, \ldots$.

Per il lemma, queste potenze sono $Sq^I(\iota_n)$ con $e(I) \leq n$ e questi sono trasgressivi dato che ι_n lo è.

Per il lemma, queste potenze sono $Sq^I(\iota_n)$ con $e(I) \leq n$ e questi sono trasgressivi dato che ι_n lo è.



da cui $\tau(\iota_n) = \iota_{n+1}$ e

$$\tau(Sq^I(\iota_n)) = Sq^I(\iota_{n+1}).$$

da cui $\tau(\iota_n) = \iota_{n+1}$ e

$$\tau(Sq^I(\iota_n)) = Sq^I(\iota_{n+1}).$$

Per il teorema di Borel si ha allora che

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^*(K(\mathbb{Z}_2, n+1); \mathbb{Z}_2) &\simeq \mathbb{Z}_2\left[\tau(Sq^I(\iota_n))\right] \\ &\simeq \mathbb{Z}_2\left[Sq^I(\tau(\iota_n))\right] \\ &\simeq \mathbb{Z}_2\left[Sq^I(\iota_{n+1})\right] \end{aligned}$$

Definiamo con $\mathcal{A}$ l'algebra delle operazioni coomologiche a coefficienti in $\mathbb{Z}_2$ generata dai quadrati di Steenrod.

Definiamo con $\mathcal{A}$ l'algebra delle operazioni coomologiche a coefficienti in $\mathbb{Z}_2$ generata dai quadrati di Steenrod.

Corollario (Serre)

La mappa

$$\mathcal{A} \longrightarrow \tilde{\mathcal{H}}^*(K(\mathbb{Z}_2, n); \mathbb{Z}_2)$$

che mappa

$$Sq^I \mapsto Sq^I(\iota_n)$$

con I ammissibile è un isomorfismo tra la parte di grado d di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{H}^{n+d}(K(\mathbb{Z}_2, n); \mathbb{Z}_2)$ per $d \leq n$.

Definiamo con $\mathcal{A}$ l'algebra delle operazioni coomologiche a coefficienti in $\mathbb{Z}_2$ generata dai quadrati di Steenrod.

Corollario (Serre)

La mappa

$$\mathcal{A} \longrightarrow \tilde{\mathcal{H}}^*(K(\mathbb{Z}_2, n); \mathbb{Z}_2)$$

che mappa

$$Sq^I \mapsto Sq^I(\iota_n)$$

con I ammissibile è un isomorfismo tra la parte di grado d di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{H}^{n+d}(K(\mathbb{Z}_2, n); \mathbb{Z}_2)$ per $d \leq n$.

Infine,

$$\mathcal{A}_2 \simeq \mathcal{A}.$$

- La mappa è surgettiva, perché

$$\tilde{\mathcal{H}}^{d+n}(K(\mathbb{Z}_2, n); \mathbb{Z}_2)$$

per $d < n$ consiste solo nei polinomi lineari negli $Sq^I(\iota_n)$ per il Teorema di Serre.
L'unico termine non lineare per $d = n$ è $\iota_n^2 = Sq^n(\iota_n)$.

- La mappa è surgettiva, perché

$$\tilde{\mathcal{H}}^{d+n}(K(\mathbb{Z}_2, n); \mathbb{Z}_2)$$

per $d < n$ consiste solo nei polinomi lineari negli $Sq^I(\iota_n)$ per il Teorema di Serre.
L'unico termine non lineare per $d = n$ è $\iota_n^2 = Sq^n(\iota_n)$.

- Per l'iniettività, $d(I) \geq e(I)$ e Sq^n è l'unico con $d(I) = e(I) = n$.

- La mappa è surgettiva, perché

$$\tilde{\mathcal{H}}^{d+n}(K(\mathbb{Z}_2, n); \mathbb{Z}_2)$$

per $d < n$ consiste solo nei polinomi lineari negli $Sq^I(\iota_n)$ per il Teorema di Serre.
L'unico termine non lineare per $d = n$ è $\iota_n^2 = Sq^n(\iota_n)$.

- Per l'iniettività, $d(I) \geq e(I)$ e Sq^n è l'unico con $d(I) = e(I) = n$.
Da cui, gli ammissibili con $d(I) \leq n$ sono mappati in elementi linearmente indipendenti in

$$\tilde{\mathcal{H}}^*(K(\mathbb{Z}_2, n); \mathbb{Z}_2).$$

Algebra di Steenrod

Ricordando che

$$\mathcal{A}_2^q = \mathcal{O}^S(q, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathcal{H}^{n+q}(K(\mathbb{Z}_2, n), \mathbb{Z}_2)$$

per $n \geq q + 2$.

Algebra di Steenrod

Ricordando che

$$\mathcal{A}_2^q = \mathcal{O}^S(q, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathcal{H}^{n+q}(K(\mathbb{Z}_2, n), \mathbb{Z}_2)$$

per $n \geq q + 2$. Allora, per il Corollario di Serre, $n \geq q + 2 > q$

$$\mathcal{H}^{n+q}(K(\mathbb{Z}_2, n), \mathbb{Z}_2) \simeq \mathcal{A}_q$$

Algebra di Steenrod

Ricordando che

$$\mathcal{A}_2^q = \mathcal{O}^S(q, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathcal{H}^{n+q}(K(\mathbb{Z}_2, n), \mathbb{Z}_2)$$

per $n \geq q + 2$. Allora, per il Corollario di Serre, $n \geq q + 2 > q$

$$\mathcal{H}^{n+q}(K(\mathbb{Z}_2, n), \mathbb{Z}_2) \simeq \mathcal{A}_q$$

Teorema

I quadrati di Steenrod, a meno di relazioni di Adém generano tutte le operazioni coomologiche stabili

Il range è il migliore possibile

Esistono però operazioni non stabili, i.e.

$$x \mapsto x^3,$$

per $x \in \mathcal{H}^1(X; \mathbb{Z}_2)$.

Il range è il migliore possibile

Esistono però operazioni non stabili, i.e.

$$x \mapsto x^3,$$

per $x \in \mathcal{H}^1(X; \mathbb{Z}_2)$.
Questa corrisponde a $\iota_1^3 \in \mathcal{H}^3(K(\mathbb{Z}_2, 1); \mathbb{Z}_2)$ che non è ottenibile applicando elementi di $\mathcal{A}_2$ a ι_1.

Il range è il migliore possibile

Esistono però operazioni non stabili, i.e.

$$x \mapsto x^3,$$

per $x \in \mathcal{H}^1(X; \mathbb{Z}_2)$.
Questa corrisponde a $\iota_1^3 \in \mathcal{H}^3(K(\mathbb{Z}_2, 1); \mathbb{Z}_2)$ che non è ottenibile applicando elementi di $\mathcal{A}_2$ a ι_1.
L'unica possibilità è Sq^2, ma $Sq^2(\iota_1) = 0$ dato che ι_1 è 1-dimensionale.

Il range è il migliore possibile

Esistono però operazioni non stabili, i.e.

$$x \mapsto x^3,$$

per $x \in \mathcal{H}^1(X; \mathbb{Z}_2)$.
Questa corrisponde a $\iota_1^3 \in \mathcal{H}^3(K(\mathbb{Z}_2, 1); \mathbb{Z}_2)$ che non è ottenibile applicando elementi di $\mathcal{A}_2$ a ι_1.
L'unica possibilità è Sq^2, ma $Sq^2(\iota_1) = 0$ dato che ι_1 è 1-dimensionale.

Ci resta da dire che esiste uno spazio per cui questa operazione non è banale, ma basta osservare che vale per $\mathbb{RP}^\infty$.

Teorema

1. *$\mathcal{H}^*(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}_2)$ per $n > 1$ è l'algebra polinomiale generata dagli $Sq^I(\iota_n)$ ammissibili con $e(I) < n$ che non hanno Sq^1-termini*

Calcolo della 2-componente del $\pi_4(S^3)$ e del $\pi_5(S^3)$

Teorema di $\mathcal{C}_p$-approssimazione

Teorema

Siano X, A spazi semplicemente connessi con i gruppi di omologia finitamente generati. Sia $f : A \longrightarrow X$ una mappa tale che $f_* : \pi_2(A) \longrightarrow \pi_2(X)$ sia un epimorfismo.
Se $f^* : \mathcal{H}^i(X, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow \mathcal{H}^i(A, \mathbb{Z}_p)$ è un isomorfismo per $i < k$ e un monomorfismo per $i = k$, allora

$$\pi_i(A) \text{ e } \pi_i(X) \textit{ hanno p-compenenti isomorfe per } i < k$$

Teorema di $\mathcal{C}_p$-approssimazione

Teorema

Siano X, A spazi semplicemente connessi con i gruppi di omologia finitamente generati. Sia $f : A \longrightarrow X$ una mappa tale che $f_* : \pi_2(A) \longrightarrow \pi_2(X)$ sia un epimorfismo. Allora le condizioni $(1) - (6)$ sono equivalenti e implicano la condizione (7).

- $f^* : \mathcal{H}^i(X, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow \mathcal{H}^i(A, \mathbb{Z}_p)$ *è iso per* $i < k$ *mono per* $i = k$
- $f_* : \mathcal{H}_i(A, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow \mathcal{H}_i(X, \mathbb{Z}_p)$ *è iso per* $i < k$ *e epi per* $i = k$
- $\mathcal{H}_i(X, A, \mathbb{Z}_p)=0$ *per* $i \leq k$
- $\mathcal{H}_i(X, A, \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}_p$ *per* $i \leq k$
- $\pi_i(X, A) \in \mathcal{C}_p$ *per* $i \leq k$
- $f_* : \pi_i(A, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow \pi_i(X, \mathbb{Z}_p)$ *è un* $\mathcal{C}_p$*-isomorfismo per* $i < k$ *e un* $\mathcal{C}_p$*-epimorfismo per* $i = k$
- $\pi_i(A)$ *e* $\pi_i(X)$ *hanno p-compenenti isomorfe per* $i < k$

2-componente: $\pi_4(S^3)$ e $\pi_5(S^3)$

Idea: Procediamo in *due step*:

1. Trovare uno spazio X_1 che approssima S^3, meglio di $K(\mathbb{Z}, 3)$. Ovvero, trovare X_1 per cui esiste $\lambda : S^3 \longrightarrow X_1$ per cui $\lambda^* : \mathcal{H}^i(X_1, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathcal{H}^i(S^3, \mathbb{Z}_2)$ sia un isomorfismo per $i \leq 5$

2-componente: $\pi_4(S^3)$ e $\pi_5(S^3)$

Idea: Procediamo in *due step*:

1. Trovare uno spazio X_1 che approssima S^3, meglio di $K(\mathbb{Z}, 3)$. Ovvero, trovare X_1 per cui esiste $\lambda : S^3 \longrightarrow X_1$ per cui $\lambda^* : \mathcal{H}^i(X_1, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathcal{H}^i(S^3, \mathbb{Z}_2)$ sia un isomorfismo per $i \leq 5$
2. Trovare uno spazio X_2 e una fibrazione $F \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_1$ per cui esiste $\lambda : S^3 \longrightarrow X_2$ per cui $\lambda^* : \mathcal{H}^i(X_2, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathcal{H}^i(S^3, \mathbb{Z}_2)$ sia un isomorfismo per $i \leq 6$ e usare il teorema di $\mathcal{C}_p$-approssimazione per trovare il $\pi_4(S^3)$ e il $\pi_5(S^3)$

2-componente: $\pi_4(S^3)$ e $\pi_5(S^3)$

$$B = K(\mathbb{Z}, 3)$$

2-componente: $\pi_4(S^3)$ e $\pi_5(S^3)$

$$B = K(\mathbb{Z}, 3)$$

Sappiamo che

$$\mathcal{H}^*(K(\mathbb{Z}, 3), \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2[Sq^I(\iota_3)]$$

$$Sq^2(\iota_3) : K(\mathbb{Z}, 3) \longrightarrow K(\mathbb{Z}_2, 5),$$

2-componente: $\pi_4(S^3)$ e $\pi_5(S^3)$

$$B = K(\mathbb{Z}, 3)$$

Sappiamo che

$$\mathcal{H}^*(K(\mathbb{Z}, 3), \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2[Sq^I(\iota_3)]$$

$$Sq^2(\iota_3) : K(\mathbb{Z}, 3) \longrightarrow K(\mathbb{Z}_2, 5),$$

possiamo costruire

$$\begin{tikzcd}
F_1 = K(\mathbb{Z}_2, 4) \arrow[d] & K(\mathbb{Z}_2, 4) \arrow[d] \\
X_1 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & PK(\mathbb{Z}_2, 5) \arrow[d] \\
B = K(\mathbb{Z}, 3) \arrow[r, "Sq^2(\iota_3)"] & K(\mathbb{Z}_2, 5)
\end{tikzcd}$$

2-componente: $\pi_4(S^3)$ e $\pi_5(S^3)$

$e \in \mathcal{H}^3(S^3, \mathbb{Z})$ la classe fondamentale

$$
\begin{tikzcd}
 & K(\mathbb{Z}_2, 4) \arrow[d] & K(\mathbb{Z}_2, 4) \arrow[d] \\
S^3 \times K(\mathbb{Z}_2, 4) \arrow[r, "g"] \arrow[d] & X_1 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & PK(\mathbb{Z}_2, 5) \arrow[d] \\
S^3 \arrow[u, dashed, bend left, "s"] \arrow[r, "e"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & K(\mathbb{Z}, 3) \arrow[r, "Sq^2(\iota_3)"] & K(\mathbb{Z}_2, 5)
\end{tikzcd}
$$

2-componente: $\pi_4(S^3)$ e $\pi_5(S^3)$

$e \in \mathcal{H}^3(S^3, \mathbb{Z})$ la classe fondamentale

$$\begin{tikzcd}
 & K(\mathbb{Z}_2, 4) \arrow[d] & K(\mathbb{Z}_2, 4) \arrow[d] \\
S^3 \times K(\mathbb{Z}_2, 4) \arrow[r, "g"] \arrow[d] & X_1 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & PK(\mathbb{Z}_2, 5) \arrow[d] \\
S^3 \arrow[u, dashed, bend left, "s"] \arrow[r, "e"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & K(\mathbb{Z}, 3) \arrow[r, "Sq^2(\iota_3)"] & K(\mathbb{Z}_2, 5)
\end{tikzcd}$$

$Sq^2(\iota_3) \circ e \in \mathcal{H}^5(S^3, \mathbb{Z}_2)$

2-componente: $\pi_4(S^3)$ e $\pi_5(S^3)$

$e \in \mathcal{H}^3(S^3, \mathbb{Z})$ la classe fondamentale

$$
\begin{tikzcd}
 & K(\mathbb{Z}_2, 4) \arrow[d] & K(\mathbb{Z}_2, 4) \arrow[d] \\
S^3 \times K(\mathbb{Z}_2, 4) \arrow[r, "g"] \arrow[d] & X_1 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & PK(\mathbb{Z}_2, 5) \arrow[d] \\
S^3 \arrow[r, "e"] \arrow[u, dashed, bend left, "s"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & K(\mathbb{Z}, 3) \arrow[r, "Sq^2(\iota_3)"] & K(\mathbb{Z}_2, 5)
\end{tikzcd}
$$

$$Sq^2(\iota_3) \circ e \in \mathcal{H}^5(S^3, \mathbb{Z}_2) \Longrightarrow (PK(\mathbb{Z}_2, 5))^\star \simeq S^3 \times K(\mathbb{Z}_2, 4)$$

2-componente: $\pi_4(S^3)$ e $\pi_5(S^3)$

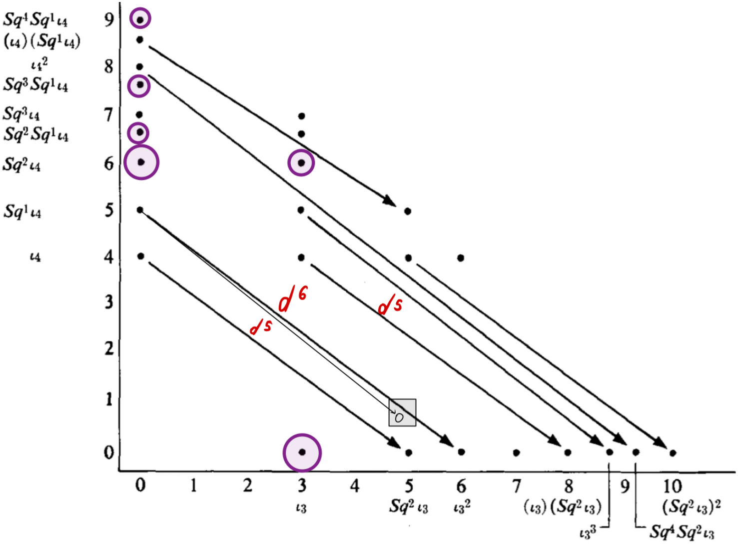
$e \in \mathcal{H}^3(S^3, \mathbb{Z})$ la classe fondamentale

$$
\begin{tikzcd}
 & K(\mathbb{Z}_2,4) \arrow[d] & K(\mathbb{Z}_2,4) \arrow[d] \\
S^3 \times K(\mathbb{Z}_2,4) \arrow[r, "g"] \arrow[d] & X_1 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & PK(\mathbb{Z}_2,5) \arrow[d] \\
S^3 \arrow[u, dashed, bend left, "s"] \arrow[r, "e"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & K(\mathbb{Z},3) \arrow[r, "Sq^2(\iota_3)"] & K(\mathbb{Z}_2,5)
\end{tikzcd}
$$

$$Sq^2(\iota_3) \circ e \in \mathcal{H}^5(S^3, \mathbb{Z}_2) \Longrightarrow (PK(\mathbb{Z}_2,5))^\star \simeq S^3 \times K(\mathbb{Z}_2,4)$$

$$g \circ s : S^3 \longrightarrow X_1$$

2-componente: $\pi_4(S^3)$ e $\pi_5(S^3)$



2-componente: $\pi_4(S^3)$ e $\pi_5(S^3)$

Gli elementi di grado ≤ 9 che sopravvivono in E_∞ sono

$$\iota_3, \qquad Sq^2(\iota_4), \qquad Sq^3(\iota_4), \qquad Sq^2 Sq^1(\iota_4), \qquad Sq^3 Sq^1(\iota_4)$$

$$Sq^4 Sq^1(\iota_4), \qquad \iota_3 \otimes Sq^2(\iota_4).$$

2-componente: $\pi_4(S^3)$ e $\pi_5(S^3)$

Ricordando che $E_\infty^{p,q}$ per $p+q=n$ è una decomposizione per $\mathcal{H}^n(X_1,\mathbb{Z}_2)$

2-componente: $\pi_4(S^3)$ e $\pi_5(S^3)$

Ricordando che $E_\infty^{p,q}$ per $p+q=n$ è una decomposizione per $\mathcal{H}^n(X_1,\mathbb{Z}_2)$ denotando gli elementi

$$\iota_3, \qquad i^*(A) = Sq^2(\iota_4),$$

$$i^*(B) = Sq^3(\iota_4), \qquad i^*(C) = Sq^2 Sq^1(\iota_4)$$

$$i^*(D) = Sq^3 Sq^1(\iota_4), \qquad i^*(E) = Sq^4 Sq^1(\iota_4)$$

$$i^*(\iota_3 A) = \iota_3 \otimes Sq^2(\iota_4)$$

2-componente: $\pi_4(S^3)$ e $\pi_5(S^3)$

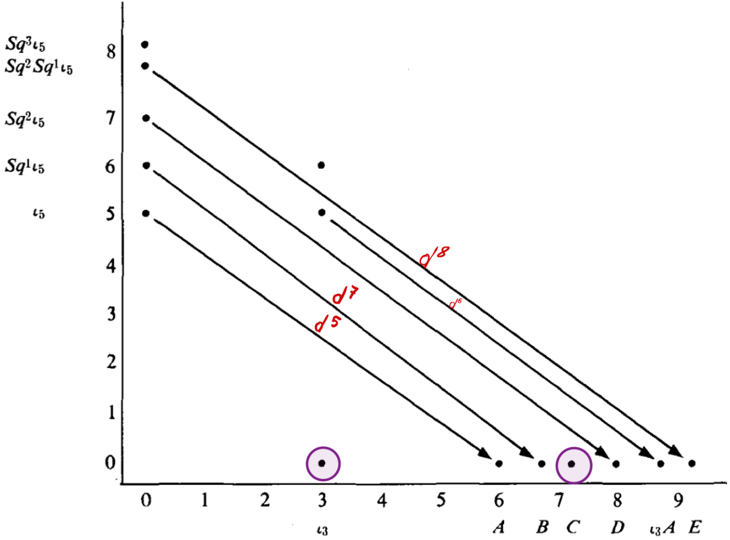
Essendo $i^*(A) = Sq^2(\iota_4)$ e $A \in \mathcal{H}^6(X_1, \mathbb{Z}_2)$

2-componente: $\pi_4(S^3)$ e $\pi_5(S^3)$

Essendo $i^*(A) = Sq^2(\iota_4)$ e $A \in \mathcal{H}^6(X_1, \mathbb{Z}_2)$si ottiene un diagramma

$$
\begin{tikzcd}
 & K(\mathbb{Z}_2,5) \arrow[d] & K(\mathbb{Z}_2,5) \arrow[d] \\
S^3 \times K(\mathbb{Z}_2,5) \arrow[r] \arrow[d] & X_2 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & PK(\mathbb{Z}_2,6) \arrow[d] \\
S^3 \arrow[u, dashed, bend left, "s"] \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "0 \in \mathcal{H}^6(S^3)"'] & X_1 \arrow[r, "A"] & K(\mathbb{Z}_2,6)
\end{tikzcd}
$$

2-componente: $\pi_4(S^3)$ e $\pi_5(S^3)$



2-componente: $\pi_4(S^3)$ e $\pi_5(S^3)$

Gli unici elementi che sopravvivono in E_∞ con grado ≤ 7 sono:

2-componente: $\pi_4(S^3)$ e $\pi_5(S^3)$

Gli unici elementi che sopravvivono in E_∞ con grado ≤ 7 sono:

ι_3 in dimensione 3,

$C' = p^* C$ in dimensione 7,

2-componente: $\pi_4(S^3)$ e $\pi_5(S^3)$

Gli unici elementi che sopravvivono in E_∞ con grado ≤ 7 sono:

$$\iota_3 \text{ in dimensione } 3,$$

$$C' = p^* C \text{ in dimensione } 7,$$

Da cui

$$\mathcal{H}^k(X_2; \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{se } k = 0, 3 \\ 0 & \text{se } k = 1, 2, 4, 5, 6 \end{cases}$$

2-componente: $\pi_4(S^3)$ e $\pi_5(S^3)$

Dalla fibrazione $K(\mathbb{Z}_2, 4) = F_1 \longrightarrow X_1 \longrightarrow B = K(\mathbb{Z}, 3)$

2-componente: $\pi_4(S^3)$ e $\pi_5(S^3)$

Dalla fibrazione $K(\mathbb{Z}_2, 4) = F_1 \longrightarrow X_1 \longrightarrow B = K(\mathbb{Z}, 3)$

$$\cdots \longrightarrow \pi_5(K(\mathbb{Z}_2, 4)) \longrightarrow \pi_5(X_1) \longrightarrow \pi_5(K(\mathbb{Z}, 3)) \longrightarrow \pi_4(K(\mathbb{Z}_2, 4))$$

$$\pi_5(K(\mathbb{Z}, 3)) \longrightarrow \pi_4(K(\mathbb{Z}_2, 4)) \longrightarrow \pi_4(X_1) \longrightarrow \pi_4(K(\mathbb{Z}, 3)) \longrightarrow \cdots$$

2-componente: $\pi_4(S^3)$ e $\pi_5(S^3)$

Dalla fibrazione $K(\mathbb{Z}_2, 4) = F_1 \longrightarrow X_1 \longrightarrow B = K(\mathbb{Z}, 3)$

$$\cdots \longrightarrow \pi_5(K(\mathbb{Z}_2, 4)) \longrightarrow \pi_5(X_1) \longrightarrow \pi_5(K(\mathbb{Z}, 3)) \longrightarrow \pi_4(K(\mathbb{Z}_2, 4))$$

$$\pi_5(K(\mathbb{Z}, 3)) \longrightarrow \pi_4(K(\mathbb{Z}_2, 4)) \longrightarrow \pi_4(X_1) \longrightarrow \pi_4(K(\mathbb{Z}, 3)) \longrightarrow \cdots$$

otteniamo che

$$\pi_4(X_1) \simeq \mathbb{Z}_2 \text{ e } \pi_5(X_1) \simeq 0.$$

2-componente: $\pi_4(S^3)$ e $\pi_5(S^3)$

Analogamente

$$\cdots \longrightarrow \pi_3(K(\mathbb{Z}_2,4)) \longrightarrow \pi_3(X_1) \longrightarrow \pi_3(K(\mathbb{Z},3)) \longrightarrow \pi_2(K(\mathbb{Z}_2,4))$$
$$\longrightarrow \pi_2(K(\mathbb{Z}_2,4)) \longrightarrow \pi_2(X_1) \longrightarrow \pi_2(K(\mathbb{Z},3)) \longrightarrow \cdots$$

2-componente: $\pi_4(S^3)$ e $\pi_5(S^3)$

Analogamente

$$\cdots \longrightarrow \pi_3(K(\mathbb{Z}_2,4)) \longrightarrow \pi_3(X_1) \longrightarrow \pi_3(K(\mathbb{Z},3)) \longrightarrow \pi_2(K(\mathbb{Z}_2,4))$$
$$\longrightarrow \pi_2(K(\mathbb{Z}_2,4)) \longrightarrow \pi_2(X_1) \longrightarrow \pi_2(K(\mathbb{Z},3)) \longrightarrow \cdots$$

otteniamo che

$$\pi_3(X_1) \simeq \mathbb{Z} \text{ e } \pi_2(X_1) \simeq 0$$

e

$$\pi_6(X_1) \simeq 0.$$

2-componente: $\pi_4(S^3)$ e $\pi_5(S^3)$

Dalla sequenza lunga di fibrazione $F_2 = K(\mathbb{Z}_2, 5) \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_1$

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \pi_6(F_2) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \pi_6(X_2) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \pi_6(X_1) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \pi_5(F_2) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \pi_5(X_2) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \pi_5(X_1) \arrow[d, "\wr"] \\
{} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \pi_6(X_2) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] & \pi_5(X_2) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

2-componente: $\pi_4(S^3)$ e $\pi_5(S^3)$

Dalla sequenza lunga di fibrazione $F_2 = K(\mathbb{Z}_2, 5) \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_1$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \pi_6(F_2) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \pi_6(X_2) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \pi_6(X_1) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \pi_5(F_2) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \pi_5(X_2) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \pi_5(X_1) \arrow[d, "\wr"] \\
{} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \pi_6(X_2) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] & \pi_5(X_2) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \pi_4(F_2) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \pi_4(X_2) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \pi_4(X_1) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \pi_3(F_2) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \pi_4(X_2) \arrow[r] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

2-componente: $\pi_4(S^3)$ e $\pi_5(S^3)$

Da cui otteniamo i gruppi di omotopia di X_2, che hanno 2-componente isomorfa a i gruppi di S^3 fino a dimensione 5:

2-componente: $\pi_4(S^3)$ e $\pi_5(S^3)$

Da cui otteniamo i gruppi di omotopia di X_2, che hanno 2-componente isomorfa a i gruppi di S^3 fino a dimensione 5:

$$[\pi_4(S^3)]_2 \simeq [\pi_4(X_2)]_2 \simeq \mathbb{Z}_2$$

$$[\pi_5(S^3)]_2 \simeq [\pi_5(X_2)]_2 \simeq \mathbb{Z}_2.$$

GRAZIE PER L'ATTENZIONE!

Teorema di Borel

Teorema di Borel

Definizione

Data una k-algebra R, degli elementi di R sono un sistema semplice di generatori se i loro prodotti distinti formano una base.

Teorema

Sia $F \longrightarrow X \longrightarrow B$ una fibrazione con X contrattile e B semplicemente connesso. Supponiamo che $\mathcal{H}^*(F; k)$ a coefficienti in un campo k abbia una base data dai prodotti $a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k}$ degli elementi trasgressivi distinti $a_{i_1} \in \mathcal{H}^*(F; k)$, che hanno dimensione dispari se la caratteristica del campo è diversa da 2. Allora

$$\mathcal{H}^*(B; k) \simeq k[\cdots, b_i, \cdots]$$

dove gli elementi b_i rappresentano le tragressioni $\tau(a_i)$.

Dimostrazione di Borel

Idea: Costruire un modello algebrico che vorremo fosse la successione spettrale di Serre della fibrazione e poi dimostrare che questo modello è isomorfo al nostro.

Teorema

Sia Φ una mappa tra i primi due quadranti di due successioni spettrali di tipo coomologico.
Assumiamo che valga per entrambe

$$E_2^{p,q} = E_2^{p,0} \otimes E_2^{0,q},$$

con i differenziali d_2 che corrispondono con i prodotti tensori di quelli definiti per p e q uguali a zero.
Allora ogni coppia di queste condizioni implica la terza:

1. *Φ è un isomorfismo dei temini $E_2^{p,0}$.*
2. *Φ è un isomorfismo dei temini $E_2^{0,q}$.*
3. *Φ è un isomorfismo delle pagine E_∞.*

Il blocco fondamentale per costruire il modello è la SS la cui pagina E_2 sia il prodotto tensore $\Lambda[\bar{x}_i, \bar{y}_i]$ con $\bar{x}_i, \bar{y}_i$ della stessa dimensione di x_i e y_i.
I differenziali non banali, gli unici che possono essere diversi da zero

$$
\begin{tikzcd}
\overline{x}_i \arrow[dr] & \overline{x}_i \otimes \overline{y}_i \arrow[dr] & \overline{x}_i \otimes \overline{y}_i^2 \arrow[dr] & \dots & \\
1 & \overline{y}_i & \overline{y}_i^2 & \overline{y}_i^3 & \dots
\end{tikzcd}
$$

In particolare, risulterà

$$d_r(\bar{x}_i \otimes \bar{y}_i) = \bar{y}_i^{m+1}$$

per $r = deg(\bar{y}_i)$.

La pagina E_∞ consisterà solo di un k nella posizione $(0,0)$.
Definiamo la pagina E_2 come

$$E_2^{p,q} = E_2^{p,0} \otimes E_2^{0,q}$$

dove la riga di base è

$$k[\ldots, \bar{y}_i, \ldots]$$

e la colonna di sinistra

$$\Lambda_k[\ldots, \bar{x}_i, \ldots].$$

I differenziali verranno costruiti induttivamente, gli $\bar{x}_i$ saranno trasgressivi e $d_r(\bar{x}_i) = \bar{y}_i$.

Con queste condizioni abbiamo già

$$d_2(\bar{x}_i) = \begin{cases} \bar{y}_i & \text{se } \deg(\bar{x}_i) = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Per la formula di Kunneth, possiamo ricavarci E_3, ne risulta che le $\bar{x}_i$ di grado 1 e le $\bar{y}_i$ di grado 2 vanno a 0, mentre le altre rimangono invariate.

La colonna di sinistra rimane l'algebra esterna sui generatori $\bar{x}_i$ rimanenti e la riga in basso l'algebra polinomiale sulle $\bar{y}_i$ rimanenti.

Analogamente,

$$E_3^{p,q} = E_3^{p,0} \otimes E_3^{0,q},$$

$$d_3(\bar{x}_i) = \begin{cases} \bar{y}_i & \text{se } \deg(\bar{x}_i) = 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Fino ad arrivare ad E_∞ che avrà un singolo k in posizione $(0,0)$.

Denotiamo la successione spettrale di Serre per la fibrazione data con $E_r^{p,q}$ e con $\bar{E}_r^{\,p,q}$ quella del modello.

Vogliamo definire un isomorfismo $\Phi : \bar{E}_r^{\,p,q} \longrightarrow E_r^{p,q}$.

Sui termini $\bar{E}_2^{\,0,q}$ mandiamo un prodotto di generatori distinti $\bar{x}_i$ nel corrispondente prodotto degli x_i ed estendiamo per linearità.

Sulla riga in basso ${\bar{E}_2}^{p,0}$ sarà l'omomorfismo di anelli che manda $\bar{y}_i$ in y_i, la cui immagine secondo la mappa quoziente $E_2^{p,0} \longrightarrow E_r^{p,0}$ è la trasgressione $\tau(x_i)$ per $r = deg(y_i)$.

Definiamo allora Φ su $E_2^{p,q} = E_2^{p,0} \otimes E_2^{0,q}$ come il prodotto tensore dei valori che assume su ${\bar{E}_2}^{p,0}$ e ${\bar{E}_2}^{0,q}$.

Se k ha caratteristica 2, Φ è solamente un morfismo additivo, infatti $\bar{x}_i^2 = 0$ in quanto appartiene all'algebra esterna, ma non è detto che $x_i^2 = 0$.

Per costruzione, Φ commuta con i differenziali d_2 e quindi induce delle mappe $\bar{E}_3{}^{p,q} \longrightarrow E_3^{p,q}$; sempre per costruzione commuta anche con i differenziali d_3, e così via.

Allora, Φ è una mappa di SS. Poiché E è contrattile, Φ è un isomorfismo tra le pagine E_∞. L'ipotesi che gli x_i formino un sistema semplice di generatori implica che Φ è un isomorfismo tra $\bar{E}_2{}^{0,q}$ e $E_2^{0,q}$.

Per come è stato definito, Φ dipende univocamente da i suoi valori sulla prima riga e sulla prima colonna della pagina $\bar{E}_2$. Dunque Φ è un isomorfismo di successione spettrali.