Giochi Collaborativi
con Funzione di Partizione

Cristian Sopio

July 2021

Indice

Sommario

Lo scopo di questo seminario è quello di analizzare i Giochi Collaborativi con Funzione di Partizione. In particolare, dopo aver introdotto nella Sezione 1 le prime definizioni, alcune già incontrate durante il corso, inizieremo a trattare il caso in cui il numero dei giocatori sia 2 o 3. Successivamente, per affrontare il caso generale di n giocatori, passeremo attraverso l'analisi, nei Paragrafi 3.1,3.2 e 3.3, di alcune particolari partizioni, quali $P = \{\{1\}, \ldots, \{n\}\}$, $P = \{N\}$ e $P = \{\{N - i\}, \{i\}\}$. In questi casi, esibiremo esplicitamente le soluzioni. Infine, nel Paragrafo 3.5, affronteremo il caso di partizioni qualsiasi. Proporremo un'estensione dei concetti di superadditività e di convessità ai giochi collaborativi con funzione di partizione e vedremo sotto quali ipotesi si forma la grande coalizione. Osserveremo che, per questa tipologia di giochi il nucleo non è sempre non vuoto. Specializzeremo allora, nel caso di giochi convessi, la definizione di nucleo a s-nucleo, c-nucleo e m-nucleo, mostrando che i primi due sono non vuoti.

1 Prime definizioni

Iniziamo questo elaborato richiamando alcune definizioni viste a lezione per i giochi collaborativi, rivisitandole per i giochi collaborativi con funzione di partizione (PFG).

1.1 Funzione di partizione e valore di un sottoinsieme di giocatori

Sia $N = \{1, \ldots n\}$ un insieme di giocatori e sia

$$P = \{P_1, \ldots P_r\}$$

una partizione arbitraria di N nelle coalizioni $P_1, \ldots P_r$. Denotiamo con

$$\Pi = \{P : \text{P è una partizione di N}\}.$$

Supponiamo che per ogni partizione P esiste una funzione di *outcome*

$$F_P : P \longrightarrow \mathbb{R}$$

che assegna un numero reale $F_P(P_i)$ alla colazione P_i della partizione.
La mappa

$$F : \Pi \longrightarrow \{F_P\}$$

che assegna ad ogni partizione una funzione di outcome è detta *funzione di pay-off* o *funzione di partizione del gioco.*

Definizione 1.1. *La coppia ordinata*

$$\Gamma = \{N, F\}$$

è chiamato gioco con n-persone con funzione di partizione.

Per ogni $M \subset N$ possiamo definire *il valore, o guadagno, di* M.
Se M è vuoto definiamo $v(\emptyset) = 0$.

Definizione 1.2. *Se $M \subset N$ è non vuoto il* valore *di M è*

$$v(M) = \min_{\{P:M \in P\}} F_P(M).$$

Denotiamo, per brevità, $v(\{i\}) = v(i) = v_i$ per ogni $i \in N$.

Osservazione 1.3. Osserviamo che il minimo viene fatto sulle partizioni in cui M è un elemento della partizione e non tra le quali M è unione di più elementi della partizione.

Inoltre, la mappa $v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ non è *super additiva.* Infatti, possiamo definire un gioco per ogni valore di $v(M)$. nel caso in cui M_1 e M_2 sono due sottoinsiemi disgiunti e $v(M_1 \cup M_2) < v(M_1) + v(M_2)$ abbiamo che due coalizioni quando si uniscono hanno una penalità invece di un vantaggio.
Nel caso in cui prendiamo il minimo non sulle partizioni di cui M è un elemento della partizione, ma può essere ottenuto anche come unione di più sottoinsiemi, otteniamo che v è super additiva.

1.2 Imputazioni, dominazioni e soluzioni

Per un gioco fissato, possiamo definire il concetto di imputazioni, dominazioni e soluzioni.

Definizione 1.4. *Un vettore* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots a_n)$ *è un'*imputazione *se per ogni* $i = 1, \ldots n$ *si ha*

$$a_i \geq v_i$$

ed esiste $P \in \Pi$ *tale per cui*

$$\sum_{i \in N} a_i = \sum_{P_j \in P} F_P(P_j).$$

Sia R l'insieme di tutte le imputazioni del gioco. Le condizioni sono chiamate rispettivamente *individualmente razionale* e *realizzabilità*. Un imputazione $\mathbf{a}$ è un possibile insieme di payoff dei singoli giocatori alla fine del gioco, per cui le condizioni si traducono in

1) i giocatori non devono accettare un payoff minore di quanto otterrebbero giocando da soli;

2) il payoff totale di tutti i giocatori è uguale alla somma di una coalizione di una partizione.

Definizione 1.5. *Se* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$ *sono due imputazioni e* $M \subset N$ *è non vuoto diremo che* $\mathbf{a}$ domina $\mathbf{b}$ *via* M *se per ogni* $i \in M$

$$a_i > b_i,$$

$$\sum_{i \in M} a_i \leq v(M)$$

e per ogni $P \in \Pi$ *per cui* $M \in P$

$$\sum_{i \in N} a_i = \sum_{P_j \in P} F_P(P_j).$$

Denoteremo la dominazione con $\mathbf{a}\ \mathbf{dom}_M\ \mathbf{b}$

Le tre condizioni sono chiamate rispettivamente *M-preferibile*, *M-effettiva*, *M-realizzabile*. Possono essere tradotte come

1) ogni giocatori in M preferisce il suo payoff in $\mathbf{a}$ rispetto a quello in $\mathbf{b}$

2) per ogni giocatore, far parte di M assicura un maggiore guadagno rispetto al far parte di $N \setminus M$

3) **a** può presentarsi quando M è una partizione.

Diremo che M si dice *esattamente effettiva* quando abbiamo $\sum_{i\in M} a_i = v(M)$ e M-*strettamente effettiva* se $\sum_{i\in M} a_i < v(M)$. Se invece non vale la seconda condizione diremo che M è *ineffettiva*.
Se esiste un tale M diremo che **a** domina **b**. Inoltre, se $A \subset R$ definiamo il *dominio* di A via M come $\mathbf{dom}_M A = \{\mathbf{b} \in \mathbb{R} : \exists \mathbf{a} \in A : \mathbf{a}\ \mathbf{dom}_M\ \mathbf{b}\}$ e infine il *dominio* di A come

$$\mathbf{dom} A = \{\mathbf{b} \in \mathbb{R} : \exists \mathbf{a} \in A : \mathbf{a}\ \mathbf{dom}\ \mathbf{b}\}.$$

Si ha quindi

$$\mathbf{dom}(A \cup B) = \mathbf{dom}(A) \cup \mathbf{dom}(B)$$

e

$$\mathbf{dom}(A \cap B) \subset \mathbf{dom}(A) \cap \mathbf{dom}(B).$$

Definizione 1.6. *Un insieme di imputazioni $K \subset R$ è una* soluzione *se e solo se*

$$K \cap \mathbf{dom}(K) = \emptyset$$

e

$$K \cup \mathbf{dom}(K) = R.$$

Queste due condizioni sono equivalenti a chiedere che

$$R \setminus \mathbf{dom}(K) = K$$

e possiamo tradurre questa condizione dicendo che se **a** e **b** sono in K allora nessuna delle due domina l'altra e che se **c** non è un'imputazione di K allora esiste $\mathbf{a} \in K$ che domina **c**.
Diamo adesso la definizione di *core*, questa definizione verrà poi raffinata quando tratteremo il caso generale di un gioco collaborativo di n giocatori.

Definizione 1.7. *L'insieme $C = R \setminus \mathbf{dom}(R)$ è detto il core del gioco.*

Il core è un insieme più stabile di ogni soluzione, ovvero sono le imputazioni in R che non sono dominate da nessun altra imputazione. In particolare, si ha che il core è contenuto in ogni soluzione.

1.3 S-equivalenza

Siano $\Gamma = \{N, F\}$ e $\Gamma' = \{N, F'\}$ due giochi ad n-giocatori con funzione di partizione. Diremo che Γ' è S-equivalente a Γ' se esiste una costante $c > 0$, $a_1, \dots a_n$ e una permutazione $\sigma : N \longrightarrow N$ tale che

$$F'_{\sigma(P)}(P_{\sigma(i)}) = cF_P(P_i) + \sum_{j \in P_i} a_j$$

per ogni $P_i \in P$ e per ogni $P \in \Pi$. Intuitivamente, σ mette in relazione i giocatori e la costante c è detta *costante di peso* e a_j è un aiuto per il giocatore j dato prima che inizi il gioco. Il gioco Γ è detto in *forma normale* se $v_i = 0$ per ogni $i \in N$. Inoltre, Γ è detto in *forma normale stretta* se è in forma normale e

$$\max_{P \in \Pi} \sum_{P_i \in P} F_P(P_i) = 1.$$

É facile provare che essere S-equivalenti è una relazione di equivalenza e che ogni classe di equivalenza contiene un gioco in forma normale e nel caso in cui in Γ esiste $P \in \Pi$ per cui $\sum_{P_i \in P} F_P(P_i) > 0$ abbiamo che in ogni classe di equivalenza contiene un elemento in forma normale stretta. Due giochi in forma normale stretta sono equivalenti se e soltanto se sono identici a meno di permutazioni di N. Due giochi diremo che sono *isomorfi* se abbiamo una corrispondenza biunivoca tra R e R' che preserva la relazione $\mathbf{dom}_M$ per ogni $M \subset N$ e che preserva le soluzioni.
Studiando i giochi a meno di equivalenza, possiamo supporli tutti in forma normale e otteniamo che $\mathbf{a}$ è un'imputazione se $a_i \geq 0$. Data una partizione P di Γ sia

$$\|P\| = \sum_{P_i \in P} F_P(P_i).$$

Inoltre, per ogni costante b sia

$$A(b) = \left\{ a : \sum_{i \in N} a_i = b \text{ e } a_i \geq 0 \right\}.$$

Infine, diremo che $A(\|P\|) = A(P)$ è un *simplesso di imputazioni.*

2 Giochi con 2 e 3 giocatori

Entriamo nella prima parte della nostra trattazione, i PFG con $2, 3$ giocatori. In particolare, è stato deciso di omettere i dettagli dell'esistenza e unicità delle soluzioni nel caso generale di un gioco con 3-giocatori. Un maggiore approfondimento su questa parte si può trovare in [3].

2.1 Giochi con 2 giocatori

Consideriamo $N = \{1, 2\}$ e $\Pi = \{P^0, P^1\}$ dove

$$P^0 = \{N\} \text{ e } P^1 = \{\{1\}, \{2\}\}.$$

Assumiamo inoltre che $F_{P^0}(N) = c$ e $F_{P^1}(i) = 0$ per $i = 1, 2$. Allora,

$$v(N) = c \text{ e } v_i = 0$$

e

$$R = A(c) \cup \{(0, 0)\}.$$

Sicuramente, se $c > 0$ i due giocatori devono accettare di collaborare, altrimenti non vincono niente.

2.2 Giochi con 3 giocatori

Descriviamo adesso, il caso in cui $N = \{1, 2, 3\}$. In questo caso, si ha che l'insieme delle partizioni $\Pi = \{P^p\}$ è costituito da

$$\begin{aligned}
&P^0 = \{N\},\\
&P^i = \{\{i\}, \{j, k\}\} \text{ per i=1,2,3},\\
&P^4 = \{\{1\}, \{2\}\{3\}\}.
\end{aligned}$$

Le funzioni di outcome sono

$$\begin{aligned}
&F_{P^0}(N) = c,\\
&F_{P^i}(\{i\}) = d_i \qquad F_{P^i}(\{j,k\}) = e_i \text{ per } i = 1,2,3,\\
&F_{P^4}(\{i\}) = g_i \text{ per } i = 1,2,3.
\end{aligned}$$

Da cui i valori delle coalizioni di N sono

$$\begin{aligned}
&v(\emptyset) = 0,\\
&v_i = \min\{d_i, g_i\}\\
&v(\{j,k\}) = e_i \text{ per } i = 1,2,3,\\
&v(N) = c.
\end{aligned}$$

Considerando il gioco a meno di S-equivalenza, possiamo supporlo in forma normale con $v_i = 0$ e quindi uno tra v_i e g_i è nullo e l'altro non negativo. Inoltre, se definiamo $c_i = d_i + e_i$ si ha che $e_i \geq c_i$, l'insieme di tutte le partizioni R è costituito dai vettori $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ per cui $a_i \geq 0$ e per cui viene soddisfatta una delle seguenti equazioni

$$\begin{aligned}
&a_1 + a_2 + a_3 = c,\\
&a_1 + a_2 + a_3 = d_i + e_i = c_i \text{ per } i = 1,2,3\\
&a_1 + a_2 + a_3 = g_1 + g_2 + g_3 = g.
\end{aligned}$$

Questi cinque simplessi di imputazioni sono realizzati rispettivamente dalle partizioni P^0, P^i, P^4 e li denoteremo con $A(c)$, $A(c_i)$, $A(g)$.
Se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono due imputazioni e $\emptyset \neq M \subset N$, si ha che $\mathbf{a}\,\mathbf{dom}_M\,\mathbf{b}$ viene tradotto in

$$a_i > b_i \text{ per ogni } i \in M,$$

e

$$\sum_{i \in M} a_i \geq v(M),$$

inoltre, $\mathbf{a}$ fa parte di un simplesso, la cui relativa partizione contiene M.

Osservazione 2.1. Osserviamo che una dominazione via $M = \{i\}$ è impossibile, infatti si avrebbe che $\mathbf{a}\,\mathbf{dom}_{\{i\}}\,\mathbf{b}$ implica che $0 = v_i \geq a_i > b_i \geq 0$. Inoltre, se $M = N$ si ha che $\mathbf{a} \in A(c)$ ed un tale $\mathbf{b}$ per il Teorema 3.4 non è mai in una soluzione, quindi si può non considerare le dominazioni via N.

Alla luce della precedente osservazione, è sufficiente cercare le dominazioni quando $M = \{j, k\}$. In questo caso, si ha che $\mathbf{a}\,\mathbf{dom}_M\,\mathbf{b}$ se

$$a_j > b_j \text{ e } a_k > b_k,$$

$$a_j + a_k \leq v(\{j, k\}) = e_i \text{ oppure } a_i \geq d_i,$$

$$\mathbf{a} \in A(c_i).$$

Allora $\mathbf{a}$ domina tutte le imputazioni $\mathbf{b} \in \{\mathbf{x} : x_j < a_j, x_k < a_k\}$.

3 Giochi con n-giocatori

Iniziamo l'ultima sezione di questo elaborato che tratterà il caso generale di un PFG di n-giocatori. Nelle prime sezioni tratteremo dei casi particolari di partizioni che vengono analizzate in [3] e [4]. Successivamente, tratteremo il caso generale che è introdotto in [2]

3.1 Partizione $\{N\}$ in Giochi con $v(N)$ grande

Definizione 3.1. *Definiamo se* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$ *sono in R:*

$$\mathbf{a} \geq_M \mathbf{b}$$

per indicare che $a_i \geq b_i$ *per ogni* $i \in M$.
Similmente possiamo definire $>_M$ *e* $=_M$.

Lemma 3.2. *Se* $\mathbf{a}\,\mathbf{dom}\,\mathbf{b}$ *e* $\mathbf{b} \geq_S \mathbf{c}$ *con* $M \subset S \subset N$ *allora*

$$\mathbf{a}\,\mathbf{dom}_M\,\mathbf{c}$$

Dimostrazione. Dato che $\mathbf{a}$ domina $\mathbf{b}$, si ha che $\mathbf{a}$ è sia M-effettiva sia M-realizzabile. Allora, $a_i > c_i$ per ogni $i \in M$ come voluto. □

Corollario 3.3. *Sia* $A \subset K \cup \mathbf{dom}\,K$ *con* $K, A \subset R$ *e* $\mathbf{b} \in \mathbf{dom}_N\,A$ *tale che* $\mathbf{b} \geq_M \mathbf{s}$. *Allora, si ha* $\mathbf{b} \in \mathbf{dom}\,K$

Dimostriamo adesso un teorema che ci assicura che una parte di soluzione può essere sul simplesso di imputazioni $A(c)$ realizzato dalla partizione $\{N\}$. Ovvero un'imputazione che non sta in una soluzione può essere un simplesso di imputazioni $A(a)$ con $a < c$.

Teorema 3.4. *Se K è una qualsiasi soluzione e*

$$a < c = v(N).$$

Allora

$$K \cap A(a) = \emptyset.$$

Dimostrazione. Sia $\mathbf{b} \in A(a)$ e definiamo $\mathbf{a}$ attraverso

$$a_i = b_i + d,$$

dove

$$nd = c - \sum_{i \in N} b_i > 0.$$

Allora, $\mathbf{a} \in A(c)$ e $\mathbf{a}\,\mathbf{dom}_N\,\mathbf{b}$. Se $\mathbf{a} \in K$, allora $\mathbf{b} \in \mathbf{dom}_N\, K$, invece se $\mathbf{a} \notin \mathbf{dom}_N\, K$, allora $\mathbf{a} \in \mathbf{dom}_M\, K$ per qualche $M \subset N$ e quindi $\mathbf{b} \in \mathbf{dom}_M\, K$ per il Lemma 3.2. Nell'altro caso $\mathbf{b} \notin K$. □

Teorema 3.5. *Se K è una soluzione per*

$$T = \bigcup_{P \in \Pi : \|P\| \geq c = v(N)} A(P),$$

allora $K' = K \cup (A(c) \setminus \mathbf{dom}\, K)$ é una soluzione per R.

Dimostrazione. Se $A(c) \subset T$ allora, $A(c) \subset K \cup \mathbf{dom}\, K$ e $K = K'$. Se $A(c) \cap T = \emptyset$ allora, $A(c) \subset K' \cup \mathbf{dom}\, K \subset K' \cup \mathbf{dom}\, K'$.
Negli altri casi, se $\mathbf{b} \in R \setminus (A(c) \cup T)$ si ha che $\mathbf{b} \in \mathbf{dom}_N\, A(c)$ e $A(c) \subset K' \cup \mathbf{dom}\, K'$. Allora, per il Corollario 3.3 si ha che $\mathbf{b} \in \mathbf{dom}\, K'$, da cui $K \cup \mathbf{dom}\, K = \emptyset$.

Vediamo adesso che

$$
\begin{aligned}
K' \cap \mathbf{dom}\, K' &= [K \cup (A(c) \setminus \mathbf{dom}\, K)] \cap \mathbf{dom}[K \cup (A(c) \setminus \mathbf{dom}\, K)] \\
&= [K \cap \mathbf{dom}\, K] \cup [(A(c) \setminus \mathbf{dom}\, K) \cap \mathbf{dom}\, K] \cup [K \cap \mathbf{dom}(A(c) \setminus \mathbf{dom}\, K)] \\
&\quad \cup [(A(c) \setminus \mathbf{dom}\, K) \cap \mathbf{dom}(A(c) \setminus \mathbf{dom}\, K)] \\
&\subset \emptyset \cup \emptyset \cup [K \cap \mathbf{dom}\, A(c)] \cup [A(c) \cap \mathbf{dom}\, A(c)] = [K \cup A(c)] \cap \mathbf{dom}\, A(c).
\end{aligned}
$$

Nel caso in cui $\mathbf{b} \in \mathbf{dom}\, A(c)$ e $A(c) \cap T = \emptyset$ si ha che $\mathbf{b} \in \mathbf{dom}_N\, A(c)$ che implica

$$\sum_{i \in N} b_i = c,$$

e $a \in K$ o $a \in A(c)$ implica

$$\sum_{i \in N} a_i \geq c$$

da cui $[K \cup A(c)] \cap \mathbf{dom}\, A(c) = \emptyset$ e $K' \cap \mathbf{dom}\, K' = \emptyset$. Da ciò si ha che K' è una soluzione per R. □

Teorema 3.6. *Per un gioco con n giocatori tale che $F_{\{N\}}(N) = v(N) = c > \|P\|$ per ogni partizione P differente da $\{N\}$, si ha che l'unica soluzione è $K = A(c)$.*

Dimostrazione. Osserviamo che $c > 0$, in quanto

$$v(N) = \sum_{i \in N} F_P(\{i\}) \geq \sum_{i \in N} v_i = 0$$

se $P = \{\{1\}, \ldots, \{n\}\}$. Sia $K = \emptyset$ nel Teorema 3.5 e allora $K' = A(c)$. Quindi $A(c)$ è la una soluzione per il Teorema 3.4. □

Dal precedente teorema otteniamo che l'intersezione di tutte le soluzioni non è necessariamente il core del gioco perché $A(c)$ è l'unica soluzione, ma un'imputazione sotto $A(c)$ può essere dominata da imputazioni in $A(c)$.

3.2 Partizione $\{\{1\}, \ldots, \{n\}\}$

Vediamo in questo paragrafo che la partizione $\{\{1\}, \ldots, \{n\}\}$ non crea problemi nel trovare le soluzioni del gioco. Denotiamo con P' la partizione

$$P' = \{\{1\}, \ldots, \{n\}\}.$$

Lemma 3.7. *Non può esistere una dominazione via un sottoinsieme* $\{i\}$.

Dimostrazione. $a\,\mathbf{dom}_{\{i\}}\,b$ implica che $0 = v_i \geq a_i > b_i \geq 0$ che è assurdo. $\square$

Teorema 3.8. *Se* K *è una soluzione per*

$$V = \bigcup_{P \in \Pi \setminus \{P'\}} A(P),$$

allora $K = K \cup (A(g) \setminus \mathbf{dom}\, K)$ *è una soluzione dove* $g = \|P'\|$.

Dimostrazione. Se $A(g) \subset V$ allora si ha $R = V$ e $K = K'$ e K' è una soluzione per R. Possiamo allora assumere che $A(g) \cap V = \emptyset$. Allora

$$\begin{aligned} K' \cup \mathbf{dom}\, K' &= [K \cup (A(g) \setminus \mathbf{dom}\, K)] \cup \mathbf{dom}[K \cup (A(g) \setminus \mathbf{dom}\, K)] \\ &= [K \cup \mathbf{dom}\, K] \cup [(A(g) \setminus \mathbf{dom}\, K) \cup \mathbf{dom}\, K] \cup [K \cup \mathbf{dom}(A(g) \setminus \mathbf{dom}\, K)] \\ &\quad \cup [(A(g) \setminus \mathbf{dom}\, K) \cup \mathbf{dom}(A(g) \setminus \mathbf{dom}\, K)] \\ &\supseteq (K \cap \mathbf{dom}\, K) \cup A(g) = R \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} K' \cap \mathbf{dom}\, K' &= [K \cup (\mathbf{dom}\, A(g) \setminus \mathbf{dom}\, K)] \cap \mathbf{dom}[K \cup (A(g) \setminus \mathbf{dom}\, K] \\ &\subset [K \cap \mathbf{dom}\, K] \cup [(A(g) \setminus \mathbf{dom}\, K) \cap \mathbf{dom}\, K] \cup ([K \\ &\quad \cup (A(g) \setminus \mathbf{dom}\, K)] \cap \mathbf{dom}\, A(g)) = \emptyset \end{aligned}$$

in quanto $\mathbf{dom}\, A(g) = \emptyset$ perché le uniche coalizioni realizzabili per $\mathbf{a} \in A(g)$ sono quelle fatte di un elemento e per il Lemma 3.7 una dominazione tramite queste è impossibile. Allora, K' è una soluzione per R. $\square$

Come corollario dei Teoremi 3.5 e 3.8, solo i simplessi di imputazioni che hanno "altezza" almeno $A(c)$ con $c = V(N)$ che possono essere realizzati con partizioni non banali, devono essere considerati quando si cerca le soluzioni.

3.3 Partizioni $P = N$ oppure $P = \{\{N - i\}, \{i\}\}$

Prima di considerare il caso generale, trattiamo il caso di un gioco collaborativo con funzione di partizione nel caso di n giocatori, $N = \{1, \ldots, n\}$ e troviamo le soluzioni nel quale prendiamo la partizione $P = N$ oppure $P = \{\{N - i\}, \{i\}\}$. Il caso in cui scegliamo questa partizione, in letteratura è stato trattato da W. F. Lucas in [4]. Per il momento, data una qualunque partizione $Q = \{Q_1, \dots Q_r\}$ non del tipo precedente, supponiamo che

$$\|Q\| = \sum_{i=1}^{t} F_Q(Q_i) < \max(0, \|(N))\|),$$

ovvero che ogni altra partizione abbia un payoff "piccolo".
Sotto questa assunzione, nei Teoremi 3.4, 3.5 e 3.8, per calcolare le soluzioni si deve solo considerare i casi delle partizioni $P = N$ e $P = \{\{N-i\}, \{i\}\}$. Inoltre, il caso $P = N$, si usa solamente per cercare quale partizione del tipo $P = \{\{N-i\}, \{i\}\}$ è tale che

$$\|(N-i, i)\| \geq \|(N)\|.$$

Al fine di avere una notazione più fluida indichiamo le funzioni di outcome con

$$\begin{aligned} c =& F_{(N)}(N), \\ d_i =& F_{(N-i,i)}(i), \\ e_i =& F_{(N-i,i)}(N-i), \\ c_i =& d_i + e_i \text{ per } i = 1, \dots n. \end{aligned}$$

Come abbiamo già fatto nella Sezione 2.2, al fine di trovare le soluzioni di un gioco, possiamo considerarlo a meno di S-equivalenza e prendere nella sua classe di equivalenza il gioco in forma normale. Assumiamo allora che $v(i) = 0$ e otteniamo quindi le relazioni

$$\begin{aligned} & d_i \geq 0, \\ & e_i \leq c_i, \\ & \|(N-i, i)\| = c_i \text{ per } i = 1, \dots n, \\ & \|(N)\| = c, \end{aligned}$$

e che i valori delle partizioni sono

$$\begin{aligned} & v(i) = 0, \\ & v(N-i) = e_i \text{ per } i = 1, \dots n, \\ & v(N) = c. \end{aligned}$$

Un imputazione $\mathbf{a}$ è $(N-i)$-effettiva se

$$\sum_{j \neq i} a_j \leq e_i$$

o equivalentemente se $a_i \geq f_i$. Inoltre, $\mathbf{a}$ è $(N-i)$-realizzabile solo se $\mathbf{a} \in A(c_i)$, ovvero se $a_j \geq 0$ e

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = c_i.$$

Cerchiamo adesso le soluzioni nel caso in cui

$$c_1 > c_2 > \cdots > c_m \geq c > c_{m+j}$$

con $m \leq n$ e $j = 1, \ldots, m-n$ se m è strettamente minore di n. In questo setting, in simplessi $A(c_i)$ sono distinti per $i \leq m$ e si ha una unica soluzione K esibita dal prossimo teorema. Le soluzioni nei casi di $A(N)$ e $A(\|(1, \ldots, n)\|)$ sono già state trattate rispettivamente nei Teoremi 3.5 e 3.8, quindi non verranno ripetute.

Teorema 3.9. *Nel setting appena introdotto, se $\Delta_{pj} = c_p - c_j$ l'unica soluzione K è data da*

$$K = \left(\bigcup_{j=1}^{m} A(c_j) \right) \setminus \bigcup_{j=1}^{m} \left\{ \mathbf{a} : \sum_{i \neq j} a_k < e_j \ e \ a_p < d_p - \Delta_{pj} \ per \ p = 1, \ldots, j-1 \right\}.$$

Dimostrazione.

i. Mostriamo che $K \cup \mathbf{dom}\, K = \cup_{j=1}^{m} A(c_j)$.
   Ciò è semplice tranne nel caso in cui

$$V^j = \left\{ \mathbf{a} \in A(c_j) : \sum_{N \setminus \{j\}} a_k = e_j; a_p \leq d_p - \Delta_{pj}, p = 1, \ldots, j-1 \right\}$$

   è contenuto in K e

$$\mathbf{dom}_{N-\{j\}}\, V^j \supseteq \left\{ \mathbf{a} : \sum_{N \setminus \{j\}} < e_j; a_p < d_p - \Delta_{pj}, p = 1, \ldots, j-1 \right\}$$

con $j = 1, \dots m$. Questo caso particolare accade quando $j = m = n$ e $\sum_{i \in N} d_i < c_n$, da cui $V^n = \emptyset$. In questo caso però, l'insieme

$$V_0^n = \bigcup_{p=1}^{n-1} \{\mathbf{a} \in A(c_n) : a_p = d_p - \Delta_{pn}; a_q \leq d_q - \Delta_{qn}, q = 1, \dots, n-1\}$$

è contenuto in K e

$$\mathbf{dom}\, V_0^n \supseteq \left\{\mathbf{a} : \sum_{k=1}^{n-1} < e_n; a_p < d_p - \Delta_{pn}, p = 1, \dots, n-1\right\}.$$

Così, $\mathbf{dom}\, K$ deve contenere tutte quelle imputazioni che sono state sottratte per ottenere K a $\cup_{j=1}^m A(c_j)$. Infatti, dobbiamo solo dominare con le dominazioni in K che sono esattamente effettive, tranne nel caso particolare.

ii. $K \cap \mathbf{dom}\, K = \emptyset$, così da avere che K è una soluzione. Sia $\mathbf{a} \in K$ $(N-j)$-effettiva e $(N-j)$-realizzabile, allora si ha che $\mathbf{a} \in K \cap \left\{\mathbf{a} : \sum_{N \setminus \{j\}} a_k \leq e_j\right\} \cap A(c_j)$, $a_j \geq d_j$ e $\sum a_i = c_j$. Dalla definizione di K si ha che $a_p \leq d_p - \Delta_{pj}$ con $p = 1, \dots j-1$ e $\sum_{N \setminus \{j\}} a_k \leq e_j$. Tale $\mathbf{a}$ può essere dominato via $(N-j)$ dagli $\mathbf{z}$ tali che $z_p > d_p - \Delta pj$ per $p = 1, \dots j-1$ e $\sum_{N \setminus \{j\}} z_k < e_j$. Dalla definizione di K, segue che un tale $\mathbf{z}$ non è in K. Questo prova che $K \cap \mathbf{dom}\, N \setminus \{j\} K = \emptyset$ per $j \leq m$ e questo è sufficiente per dire che $K \cap \mathbf{dom}\, K = \emptyset$.

iii. Mostriamo che ogni imputazione in $\cup_{j=1}^m A(c_j) \setminus K$ non può essere una soluzione di K' e che K è unico. Sia $\mathbf{b} \in \{\mathbf{a} : \sum_{k=2}^m < e_1\}$, consideriamo il primo termine sottratto nella definizione di K. Per un generico j, mostriamo che se $\mathbf{b}$ appartiene all'insieme

$$D^j = \left\{\mathbf{a} : \sum_{N \setminus \{j\}} a_k < e_j; a_p < d_p - \Delta_{pj}, p = 1, \dots, j-1\right\}$$

allora $\mathbf{b} \notin K'$. Assumiamo che $0 < e_j \leq c_j$[1] e definiamo

$$B^r = \left\{\mathbf{a} \in D^j \cap A(c_j) : \sum_{N \setminus \{j\}} a_k \leq d^r\right\}$$

[1]Nel caso $e_j < 0$ non c'è niente da dimostrare.

dove $d^r = \min(e_j, r\Delta_{j,j+1})$. Prima mostriamo che $B^1 \subset K' \cup \mathbf{dom}_{N-j} K'$: essendo K' una soluzione $B^1 \subset K' \cup \mathbf{dom}\, K'$ e per il Teorema 3.4 otteniamo che $B^1 \cap \mathbf{dom}_{N-j} K' = \emptyset$. Inoltre, $B^r \cap \mathbf{dom}_{N-j} K' = \emptyset$ se $r < k$ perché se $\mathbf{b} \in B^r \subset D^j$ si ha $b_k < d_k - \Delta kj$ e $\sum_{N\setminus\{k\}} b_i = c_j - b_k > c_j - d_k + \Delta_{kj=c_k-d_k=e_k=v(N-k)}$ e quindi $\mathbf{b}$ non è $(N-k)$-effettiva. Adesso, $B^1 \cap \mathbf{dom}_{N\setminus\{k\}} K' = \emptyset$ se $m \geq k > j$ perché se $\mathbf{b} \in B^1$ e l'intersezione è non vuota, esiste $\mathbf{x} \in K' \cap A(c_k)$ tale che $\mathbf{x}\,\mathbf{dom}_{N-k}\,\mathbf{b}$. Da cui, $\sum_{i\in N} x_i > x_j > b_j \geq c_j - d^1 \geq c_j - \Delta_{j,j+1} = c_{j+1} \geq c_k$ e quindi $\mathbf{x}$ non è $(N-k)$-realizzabile e quindi non può dominare $\mathbf{b}$. Allora, $B^1 \cap \mathbf{dom}_{N\setminus\{k\}} K' = \emptyset$ se $k \neq j$ e $B^1 \subset K' \cup \mathbf{dom}_{N\setminus\{j\}} K'$. Allora

$$D^j \cap \left\{ \mathbf{a} : \sum_{N\setminus\{j\}} a_j < d^1 \right\} \subset \mathbf{dom}_{N\setminus\{j\}} B^1 \subset \mathbf{dom}_{N\setminus\{j\}} K'$$

e quindi $D^j \cap \left\{ \mathbf{a} : \sum_{N\setminus\{j\}} a_j < d^1 \right\} \cap K' = \emptyset$. Se $d^1 = e_j$ si ha l'unicità.
Se $d_1 < e_j$, si ha $d^1 = \Delta_{j,j+1}$ e $\left\{ \mathbf{a} : \sum_{N\setminus\{j\}} a_k < \Delta_{j,j+1} \right\} \cap K' = \emptyset$. Quindi, se $\mathbf{b} \in K' \cap A(c_k)$ allora $\sum_{N\setminus\{j\}} b_i \geq \Delta_{j,j+1}$ e $b_j \leq c_k - \Delta_{j,j+1}$. Mostriamo ora che $B^2 \subset K' \cup \mathbf{dom}_{N\setminus\{j\}} K'$. Dato che $B^2 \cap \mathbf{dom}_{N\setminus\{k\}} K' = \emptyset$ quando $k < j$ se $\mathbf{x} \in B^2 \subset D^j$ $\mathbf{x}$ non è $(N-k)$-effettiva come dimostrato prima. Inoltre, $B^2 \cap \mathbf{dom}_{N\setminus\{k\}} = \emptyset$ se $m \geq k > j$ e quindi non esiste $\mathbf{x} \in B^2$ e $\mathbf{b} \in K' \cap A(c_k)$ che domina $\mathbf{x}$ su $N \setminus \{k\}$. Questo implica che $b_j > x_k = c_j - \sum_{N\setminus\{j\}} x_j \geq c_j - d^2 \geq c_j - 2\Delta_{j,j+1}$ e $\sum_{N\setminus\{j\}} b_i = c_k - b_j < c_k - c_j + 2\Delta_{j,j+1} = \Delta_{kj} + 2\Delta_{j,j+1} \geq \Delta_{j,j+1}$ che è assurdo, da cui $B^2 \subset K' \cup \mathbf{dom}_{N\setminus\{j\}} K'$. É chiaro che $D^j \cap \left\{ \mathbf{a} : \sum_{N\setminus\{j\}} a_k < d^2 \right\} \subset \mathbf{dom}_{N\setminus\{j\}} B^2 \subset \mathbf{dom}_{N\setminus\{j\}} K'$ e quindi $D^j \cap \left\{ \mathbf{a} : \sum_{N\setminus\{j\}} a_k < d^2 \right\} \cap K' = \emptyset$. Se $d^2 = e_j$ si è provata l'unicità del teorema.
Se $d^2 < e_j$ si continua come adesso con B^r per $r = 3, 4, \ldots, r_0$ fino a che $d^{r_0} = e_j$, da cui

$$D^j \cap \left\{ \mathbf{a} : \sum_{N\setminus\{j\}} a_k < d^{r_0} \right\} \cap K' = \emptyset.$$

□

Concludiamo questa prima parte di trattazione dei giochi con n giocatori osservando che ogni gioco con i d_i e gli e_i scelti in maniera casuale, che soddisfa

$$\|Q\| = \sum_{i=1}^{t} F_Q(Q_i) < \max(0, \|(N)\|)$$

allora con certezza soddisfa anche

$$c_1 > c_2 > \cdots > c_m \geq c > c_{m+j}$$

a meno di rinominare i giocatori.

3.4 Caso generale

Il caso generale di un gioco collaborativo con n giocatori con funzione di partizione è trattato in [2]. Vogliamo capire sotto quali condizioni è conveniente che si formi la grande coalizione. In particolare, vedremo che la superadditività non sarà sufficiente.

3.5 Efficienza, superadditività e convessità.

Nella prima sezione di questo elaborato è stata data la Definizione 1.2 di valore di un sottoinsieme $S \subset N = \{1, 2 \ldots, n\}$. Consideriamo adesso, dato $S \subset N$ e ρ una partizione di N e $S \in \rho$ la quantità

$$v(S; \rho) \stackrel{def}{=} F_\rho(S).$$

Chiamiamo la coppia (S, ρ) *colazione immersa* di N e denotiamo l'insieme delle coazioni immerse con $EC(N)$.

Definizione 3.10. *Diremo che un gioco con funzione di partizione è ad* esternalità positive *se per ogni $C, S, T \subset N$ sottoinsiemi disgiunti e per ogni partizione ρ di $N \setminus (S \cup C \cup T)$ si ha*

$$v(C; \{S \cup T, C\} \cup \rho) > (C; \{S, T, C\} \cup \rho).$$

Similmente diremo che il gioco è ad esternalità negative se

$$v(C; \{S \cup T, C\} \cup \rho) < (C; \{S, T, C\} \cup \rho).$$

In parole, un gioco è detto ad esternalità positive (negative), se l'unirsi di due colazioni permette alle altre coalizioni un vale v maggiore (minore).
Come abbiamo sottolineato nella prima sezione i giochi che trattiamo non sono super additivi, ma si ha un'estensione naturale della superadditività anche nei giochi con funzione di partizione. In particolare, è possibile chiedere che per ogni $S, T \subset N$ sottoinsieme disgiunti e per ogni partizione ρ di $N \setminus (S \cup T)$ si abbia

$$v(S \cup T; \{S \cup T\} \cup \rho) > v(S; \{S, T\} \cup \rho) + v(T; \{S, T\} \cup \rho).$$

Osservazione 3.11. Questa estensione della superadditività, non rende la grande coalizione formata da tutti i giocatori più efficiente, come si può osservare dal seguente esempio.

$\diamondsuit$ **1** Sia $N = \{1, 2, 3\}$ e consideriamo i valori simmetrici

$v(\{i\}; \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}) = 4$ per $i = 1, 2, 3$;
$v(\{j, k\}; \{\{i\}, \{j, k\}\}) = 9$ e $v(\{i\}; \{\{i\}, \{j, k\}\}) = 1$ per $\{i, j, k\} = N$;
$v(N; \{N\}) = 11$.

Nel precedente esempio la grande coalizione non è efficiente, infatti

$$v(N; \{N\}) = 11 < \sum_{i=1}^{3} v(\{i\}; \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}) = 12,$$

ma si può osservare che il gioco è ad esternalità negative. Osserviamo infine che se il gioco è ad esternalità positive e vale la superadditività, allora la grande coalizione diventa la più efficiente.

Parliamo adesso della *convessità*, anche in questo caso si ha un'estensione naturale anche nel caso di un gioco con funzione di partizione.

Definizione 3.12. *Un gioco collaborativo con funzione di partizione è* convesso *se* *per ogni $S, T \subset N$ e per ogni partizione ρ di $N \setminus (S \cup T)$ si ha*

$$v(S \cup T; \{S \cup T\} \cup \rho) + v(S \cap T; \{S \cap T, S \setminus T, T \setminus S\} \cup \rho) \geq$$

$$v(S; \{S, T \setminus S\} \cup \rho) + v(T; \{T, S \setminus T\} \cup \rho).$$

In modo diretto, la convessità non assicura che la grande coalizione sia la più efficiente, ma con un po' di lavoro, tramite la prossima proposizione, vedremo che ogni coalizione può ottenere al più quanto la somma di quanto può ottenere chi ne fa parte.

Proposizione 3.13. *Se un gioco con funzione di partizione è convesso, per ogni coalizione C e per ogni partizione ρ di $N \setminus C$ e ρ' di C si ha*

$$v(C; \rho) \geq \sum_{S \in \rho'} v(S; \rho' \cup \rho).$$

Dimostrazione. Fissiamo una coalizione $C \subset N$ e una partizione ρ di $N \setminus C$. Dimostriamo la proposizione per induzione sulla cardinalità della partizione ρ' di C. Denotiamo $\rho' = \{C_1, \dots, C_k\}$ con $k \leq |C|$.[2]
Per semplicità di notazione denotiamo

$$\overline{S}_{i,j} \overset{def}{=} C_i \cup C_{i+1} \cup \dots \cup C_j$$

e

$$S_{i,j} \overset{def}{=} \{C_i, C_{i+1} \dots, C_j\}.$$

Per ipotesi induttiva, si ha che per ogni $3 \leq l \leq k$ e per ogni partizione ρ'' di $C_{l+1} \cup \dots \cup C_k$

$$v(\overline{S}_{1,l}; \{\overline{S}_{1,l}\} \cup \rho \cup \rho'') \geq$$

$$v(\overline{S}_{1,l-2}; \{\overline{S}_{1,l-2}, C_{l-1}, C_l\} \cup \rho \cup \rho'') + v(\{C_{l-1}\}; \{S_{1,l}\} \cup \rho \cup \rho'') + v(\{C_l\}; \{S_{1,l}\} \cup \rho \cup \rho'').$$

Il passo base: se $l = 3$, nella definizione di convessità prendiamo $S = \overline{S}_{1,2}$ e $T = \overline{S}_{2,3}$, da cui $S \cap T = \{C_2\}$ e otteniamo

$$v(\overline{S}_{1,3}; \{\overline{S}_{1,3}\} \cup \rho \cup \rho'') + v(\{C_2\}; \{S_{1,3}\} \cup \rho \cup \rho'') \geq v(\overline{S}_{1,2}; \{\overline{S}_{1,2}, C_3\} \cup \rho \cup \rho'') + v(\overline{S}_{2,3}; \{\overline{S}_{2,3}, C_1\} \cup \rho \cup \rho'').$$

[2] Supponiamo i C_i non vuoti, altrimenti li omettiamo.

Dalla superadditività applicata al membro di destra della disuguaglianza si ha

$$v(\overline{S}_{1,3}; \{\overline{S}_{1,3}\} \cup \rho \cup \rho'') \geq$$

$$v(C_1; \{S_{1,3}\} \cup \rho \cup \rho'') + v(C_2; \{S_{1,3}\} \cup \rho \cup \rho'') + v(C_3; \{S_{1,3}\} \cup \rho \cup \rho'').$$

Passo induttivo: Assumiamo l'ipotesi induttiva per $l = t-1$ e mostriamo la tesi per $l = t$. Fissiamo ρ'' partizione di $\overline{S}_{t+1,k}$, per $S = \overline{S}_{1,t-1}$ e $T = \overline{S}_{2,t}$ si ha $T \cap S = \overline{S}_{2,t-1}$ e dalla convessità si ottiene

$$v(\overline{S}_{1,t}; \{\overline{S}_{1,t}\} \cup \rho \cup \rho'') + v(\overline{S}_{2,t-1}; \{\overline{S}_{2,t-1}, C_1, C_t\} \cup \rho \cup \rho'') \geq$$

$$v(\overline{S}_{1,t-1}; \{\overline{S}_{1,t-1}, C_t\} \cup \rho \cup \rho'') + v(\overline{S}_{2,t}; \{\overline{S}_{2,t}, C_1\} \cup \rho \cup \rho'').$$

Sempre per convessità, da $S = \overline{S}_{1,t-2}$ e $T = \overline{S}_{2,t-1}$ si ha $T \cap S = \overline{S}_{2,t-2}$, si ottiene

$$v(\overline{S}_{1,t-1}; \{\overline{S}_{1,t-1}, C_t\} \cup \rho \cup \rho'') + v(\overline{S}_{2,t-2}; \{\overline{S}_{2,t-2}, C_1, C_{t-1}, C_t\} \cup \rho \cup \rho'') \geq$$

$$v(\overline{S}_{1,t-2}; \{\overline{S}_{1,t-2}, C_{t-1}, C_t\} \cup \rho \cup \rho'') + v(\overline{S}_{2,t-1}; \{\overline{S}_{2,t-1}, C_1, C_t\} \cup \rho \cup \rho'').$$

Unendo i risultati ottenuti:

$$v(\overline{S}_{1,t}; \{\overline{S}_{1,t}\} \cup \rho \cup \rho'') + v(\overline{S}_{2,t-2}; \{\overline{S}_{2,t-2}, C_1, C_{t-1}, C_t\} \cup \rho \cup \rho'') \geq$$

$$v(\overline{S}_{1,t-2}; \{\overline{S}_{1,t-2}, C_{t-1}, C_t\} \cup \rho \cup \rho'') + v(\overline{S}_{2,t}; \{\overline{S}_{2,t}, C_1\} \cup \rho \cup \rho'').$$

Usando l'ipotesi induttiva per $l = t - 1$ si ha

$$v(\overline{S}_{2,t}; \{\overline{S}_{2,t}, C_1\} \cup \rho \cup \rho'') \geq$$

$$v(\overline{S}_{2,t-2}; \{\overline{S}_{2,t}, C_1, C_{t-1}, C_t\} \cup \rho \cup \rho'') + v(C_{t-1}; \{\overline{S}_{2,t}, C_1\} \cup \rho \cup \rho'') + v(C_t; \{\overline{S}_{2,t}, C_1\} \cup \rho \cup \rho'').$$

Mettendo tutto insieme e usando l'ipotesi induttiva

$$v(\overline{S}_{1,t}; \{\overline{S}_{1,t}\} \cup \rho \cup \rho'') \geq$$

$$v(\overline{S}_{1,t-2}; \{\overline{S}_{1,t}, C_1, C_{t-1}, C_t\} \cup \rho \cup \rho'') + v(C_{t-1}; \{\overline{S}_{1,t}, C_1\} \cup \rho \cup \rho'') + v(C_t; \{\overline{S}_{1,t}, C_1\} \cup \rho \cup \rho'').$$

Da ciò, per ogni partizione ρ'' si ha

$$v(C;\rho) \geq \sum_{S\in\rho'} v(S;\rho' \cup \rho).$$

$\square$

Corollario 3.14. *Se un gioco con funzione di partizione è convesso, si ha che*

$$v(N;N) \geq \sum_{S\in\rho} v(S;\rho).$$

Osservazione 3.15. Notiamo che un gioco convesso non deve necessariamente avere esternalità positive. Consideriamo infatti l'Esempio 3.5, modificando $v(N, \{N\}) = 15$ invece di 11. Questo gioco è convesso ed ha esternalità negative.

3.6 Specializzazione del Core

Consideriamo in questo paragrafo i giochi collaborativi convessi. Nel caso di un gioco collaborativo, senza funzione di partizione possiamo dire che un vettore di payoff $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ appartiene al *core* del gioco se per ogni $S \subset N$ si ha

$$\sum_{i\in S} a_i \geq v(S).$$

Un interessante caratteristica dei giochi collaborativi è che il core è non vuoto. Viceversa se consideriamo un gioco collaborativo con funzione di partizione questo non è più vero, ma è necessario dare definizioni meno forti di core.

Definizione 3.16. *Un vettore di payoff* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ *appartiene al* core con aspettativa dei singoletti *del gioco, denominato con* s-core *se per ogni* $S \subset N$ *si ha*

$$\sum_{i\in S} a_i \geq v(S : \{S\} \cup [N \setminus S]),$$

dove denotiamo con $[N \setminus S]$ *la partizione in cui* $N \setminus S$ *è elemento della partizione.*

Proposizione 3.17. *Se un gioco collaborativo con funzione di partizione è convesso, allora ha s-core non vuoto.*

Dimostrazione. Definiamo il gioco dato da $\hat{v}(S) = v(S; \{S\} \cup [N \setminus S])$ e dimostriamo che tale gioco è convesso. Presi $S, T \subset N$ con la cardinalità di $T \setminus S$ e di $S \setminus T$ uguale ad 1, allora dalla convessità per il gioco iniziale, con $\rho = [N \setminus (S \cup T)]$, si ha

$$v(S \cup T; \{S \cup T\} \cup \rho) + v(S \cap T; \{S \cap T, S \setminus T, T \setminus S\} \cup \rho) \geq$$

$$v(S; \{S, T \setminus S\} \cup \rho) + v(T; \{T, S \setminus T\} \cup \rho)$$

o con la notazione introdotta

$$\hat{v}(S \cup T) + \hat{v}(S \cup T) \geq \hat{v}(S) + \hat{v}(T).$$

Adesso, dobbiamo mostrare che la precedente disuguaglianza vale per ogni S', T' senza la restrizione che le differenze hanno un solo elemento. Da ciò otteniamo che l's-core è non vuoto, infatti

$$a_i = v(\{1, \dots i\}; \{1, \dots i\}, \{i+1\}, \dots, \{n\}) - v(\{1, \dots i-1\}; \{1, \dots i-1\}, \{i\}, \dots, \{n\})$$

è nel core del gioco di partenza. $\square$

Un'altra specificazione del core è la seguente.

Definizione 3.18. *Un vettore di payoff* $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ *appartiene al* core con aspettativa cauta *del gioco, denominato con* c-core *se per ogni* $S \subset N$ *si ha*

$$\sum_{i \in S} a_i \geq v(S; \{S\} \cup \rho^\star),$$

dove

$$\rho^\star = \arg\min_\rho v(S, \{S\} \cup \rho).$$

Corollario 3.19. *Un gioco con funzione di partizione convesso ha c-core non vuoto.*

Definizione 3.20. *Un vettore di payoff* $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ *appartiene al* core con aspettativa di unione *del gioco, denominato con* m-core *se per ogni* $S \subset N$ *si ha*

$$\sum_{i \in S} a_i \geq v(S; \{S, N \setminus S\}).$$

Il prossimo esempio mostra con un gioco non deve avere necessariamente m-core non vuoto.

$\diamondsuit$ **2** Sia $N = \{1, 2, 3\}$ e consideriamo i valori simmetrici

$$v(\{i\}; \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}) = 4 \text{ per } i = 1, 2, 3;$$
$$v(\{j, k\}; \{\{i\}, \{j, k\}\}) = 9 \text{ e } v(\{i\}; \{\{i\}, \{j, k\}\}) = 6 \text{ per } \{i, j, k\} = N;$$
$$v(N; \{N\}) = 16.$$

Si verifica facilmente che questo gioco è convesso: $S = \{1, 2\}$ e $T = \{2, 3\}$, allora si ha

$$20 = v(N; \{N\}) + v(\{2\}; \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}) > v(\{1, 2\}; \{\{3\}, \{1, 2\}\}) + v(\{2, 3\}; \{\{1\}, \{2, 3\}\}) = 18.$$

Comunque, questo gioco ha m-core vuoto quando i singoletti deviano[3] Questo vuol dire che la grande coalizione si forma almeno a 18 e quindi l'm-core è vuoto. Osserviamo che il gioco precedente ha entrate positive.

Definizione 3.21. *Un vettore di payoff* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ *appartiene al* core con aspettativa razionale *del gioco, denominato con* r-core *se per ogni* $S \subset N$ *si ha*

$$\sum_{i \in S} a_i \geq v(S; \{S\} \cup \rho^\star),$$

dove

$$\rho^\star = \arg\max_\rho \sum_{C \in \rho} v(C, \{S\} \cup \rho).$$

4 Conclusioni

In questo elaborato, si è introdotto il concetto di Gioco Collaborativo con Funzione di Partizione. Dopo aver introdotto le prime definizioni, alcune simili (se non uguali) a quelle viste nel corso durante la parte di giochi collaborativi, si è analizzato il caso di giochi con pochi giocatori $N = 2, 3$, tralasciando la ricerca delle soluzioni nel caso di 3 giocatori, che il lettore interessato può approfondire in [3]. Successivamente, ci siamo concentrati sul caso di N giocatori con $N \in \mathbb{N}_{\geq 4}$, affrontando preliminarmente

[3]Un singolo presume che gli altri due si coalizzano, e così riesce ad ottenere 6.

il caso di partizioni particolari, $P = \{\{1\}, \ldots, \{n\}\}$, $P = N$ e $P = \{N - i, \{i\}\}$. Si è esibito le soluzioni in questi casi come conseguenza dei Teoremi 3.4, 3.5, 3.6, per poi procedere in direzione di una qualsiasi partizione dell'insieme N. Nell'ultima parte del lavoro, si è data la definizione di esternalità, un'estensione della superadditività e della convessità di un gioco collaborativo, ad un gioco collaborativo con funzione di partizione. Dopo aver enunciato queste definizioni rivisitate per il nostro setting, ci siamo chiesti in quale casi si forma la Grande Coalizione formata da tutti i giocatori. Si è visto che la superadditività non è sufficiente nel caso in cui il gioco sia a esternalità negative, invece, indipendentemente dalle esternalità, tramite la Proposizione 3.13 si è mostrato che un gioco convesso ha la proprietà che la grande coalizione è la più efficiente. Successivamente, si è considerato i giochi convessi, dando delle opportune specializzazioni di core e dimostrando che l's-core e il c-core sono non vuoti.

Riferimenti bibliografici

[1] Giovanni Barbarino,*Teoria dei Giochi*, dispense del corso

[2] Isa E. Hafalir,*Efficiency in coalition games with externalities*, ScienceDirect, Games and Economic Behavior 61 242-258,2007

[3] R. M. Thrall, W. F. Lucas,*n-persongame in partition function form*, "Naval Research Logistics Quarterly, 10:281-298, 1963

[4] W. F. Lucas,*Solutions for a class of n-person games in partition form*, The Rand Corporation Santa Monica, California, 1967