Giochi collaborativi con funzione di partizione

Cristian Sopio

27 Luglio 2021

Indice

Giochi collaborativi

Definizione

Dato l'insieme di giocatori $N = \{1, 2, \ldots, n\}$*, un Gioco Cooperativo è dato da una funzione che associa ad ogni sottoinsieme di* N *una utilità* $v : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathbb{R}$ *dove per convenzione* $v(\emptyset) = 0$.

Giochi collaborativi

Definizione

Dato l'insieme di giocatori $N = \{1, 2, \ldots, n\}$*, un Gioco Cooperativo è dato da una funzione che associa ad ogni sottoinsieme di* N *una utilità* $v : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathbb{R}$ *dove per convenzione* $v(\emptyset) = 0$.

Definizione (Superadditività)

Un gioco cooperativo si dice superadditivo se per ogni T_1, T_2 *sottoinsiemi disgiunti di* N *si ha*

$$v(T_1 \cup T_2) \geq v(T_1) + v(T_2).$$

Funzione di partizione

Sia $N = \{1, \dots n\}$ un insieme di giocatori e sia

$$P = \{P_1, \dots P_r\}$$

una partizione arbitraria di N nelle coalizioni $P_1, \dots P_r$.
Denotiamo con

$$\Pi = \{P : \text{P è una partizione di N}\}.$$

Funzione di partizione

Sia $N = \{1, \dots n\}$ un insieme di giocatori e sia

$$P = \{P_1, \dots P_r\}$$

una partizione arbitraria di N nelle coalizioni $P_1, \dots P_r$. Denotiamo con

$$\Pi = \{P : \text{P è una partizione di N}\}.$$

Supponiamo che per ogni partizione P esiste una funzione di *outcome*

$$F_P : P \longrightarrow \mathbb{R}$$

che assegna un numero reale $F_P(P_i)$ alla colazione P_i della partizione.

La mappa

$$F : \Pi \longrightarrow \{F_P\}$$

che assegna ad ogni partizione una funzione di outcome è detta *funzione di partizione del gioco*.

La mappa

$$F : \Pi \longrightarrow \{F_P\}$$

che assegna ad ogni partizione una funzione di outcome è detta *funzione di partizione del gioco*.

Definizione

La coppia ordinata

$$\Gamma = \{N, F\}$$

è chiamato gioco collaborativo di n-giocatori con funzione di partizione.

Utilità

Per ogni $M \subset N$ possiamo definire *l' utilità* M.
Se M è vuoto definiamo $v(\emptyset) = 0$.

Utilità

Per ogni $M \subset N$ possiamo definire *l' utilità* M.
Se M è vuoto definiamo $v(\emptyset) = 0$.

Definizione

Se $M \subset N$ è non vuoto l' utilità *di M è*

$$v(M) = \min_{\{P : M \in P\}} F_P(M).$$

Denotiamo, per brevità, $v(\{i\}) = v(i) = v_i$ per ogni $i \in N$.

Utilità

Per ogni $M \subset N$ possiamo definire *l' utilità* M.
Se M è vuoto definiamo $v(\emptyset) = 0$.

Definizione

Se $M \subset N$ è non vuoto l' utilità *di M è*

$$v(M) = \min_{\{P:M\in P\}} F_P(M).$$

Denotiamo, per brevità, $v(\{i\}) = v(i) = v_i$ per ogni $i \in N$.

Osservazione

Questa mappa non è super additiva!

Imputazioni, dominazioni e soluzioni

Notazione: Se $M \subset N$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$: $a(M) = \sum_{i \in M} a_i$

Definizione

Un vettore a $= (a_1, \ldots, a_n)$ *è un* imputazione *se per ogni* $i = 1, \ldots n$ *si ha*

$$a_i \geq v_i \text{ (individualmente razionale)}$$

ed esiste $P \in \Pi$ *tale per cui*

$$a(N) = \sum_{P_j \in P} F_P(P_j) \text{ (realizzabilità).}$$

Imputazioni, dominazioni e soluzioni

Notazione: Se $M \subset N$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$: $a(M) = \sum_{i \in M} a_i$

Definizione

Un vettore a $= (a_1, \ldots, a_n)$ *è un* imputazione *se per ogni* $i = 1, \ldots n$ *si ha*

$$a_i \geq v_i \textit{ (individualmente razionale)}$$

ed esiste $P \in \Pi$ *tale per cui*

$$a(N) = \sum_{P_j \in P} F_P(P_j) \textit{ (realizzabilità).}$$

Sia R l'insieme di tutte le imputazioni del gioco.

Definizione

Se a *e* b *sono due imputazioni e* $M \subset N$ *è non vuoto diremo che* a domina b *via* M *se per ogni* $i \in M$

$$a_i > b_i \quad (M\text{-}preferibile)$$

$$a(M) \leq v(M) \quad (M\text{-}effettiva)$$

e esiste $P \in \Pi$ *per cui* $M \in P$

$$a(N) = \sum_{P_j \in P} F_P(P_j) \quad (M\text{-}realizzabile).$$

Denoteremo la dominazione con a dom_M b

Sia $N = \{1, 2\}$

$$v_1 = 0 \qquad v_2 = 0$$

$$v(\{1, 2\}) = 1$$

Sia $N = \{1, 2\}$

$$v_1 = 0 \qquad v_2 = 0$$

$$v(\{1, 2\}) = 1$$

a è un imputazione se

$$a_1, a_2 \geq v_i = 0$$

Sia $N = \{1, 2\}$

$$v_1 = 0 \qquad v_2 = 0$$

$$v(\{1,2\}) = 1$$

a è un imputazione se

$$a_1, a_2 \geq v_i = 0$$

e

$$a_1 + a_2 = 0$$

$$a_1 + a_2 = 1$$

Sia $N = \{1, 2\}$

$$v_1 = 0 \qquad v_2 = 0$$

$$v(\{1,2\}) = 1$$

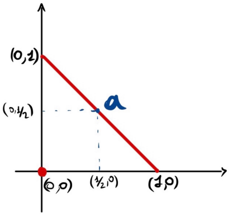
a è un imputazione se

$$a_1, a_2 \geq v_i = 0$$

e

$$a_1 + a_2 = 0$$

$$a_1 + a_2 = 1$$



Se $A \subset R$ definiamo il *dominio* di A via M

$$\mathrm{dom}_M A = \{\mathrm{b} \in \mathbb{R}^n : \exists \mathrm{a} \in A : \mathrm{a}\ \mathrm{dom}_M\ \mathrm{b}\}$$

Se $A \subset R$ definiamo il *dominio* di A via M

$$\mathrm{dom}_M A = \{\mathrm{b} \in \mathbb{R}^n : \exists \mathrm{a} \in A : \mathrm{a}\ \mathrm{dom}_M\ \mathrm{b}\}$$

il *dominio* di A come

$$\mathrm{dom} A = \bigcup_{M \subset N} \mathrm{dom}_M A.$$

Se $A \subset R$ definiamo il *dominio* di A via M

$$\mathrm{dom}_M A = \{\mathrm{b} \in \mathbb{R}^n : \exists \mathrm{a} \in A : \mathrm{a} \ \mathrm{dom}_M \ \mathrm{b}\}$$

il *dominio* di A come

$$\mathrm{dom} A = \bigcup_{M \subset N} \mathrm{dom}_M A.$$

Definizione

Un insieme di imputazioni $K \subset R$ *è una* soluzione *se e solo se*

$$K \cap \mathrm{dom}(K) = \emptyset$$

e

$$K \cup \mathrm{dom}(K) = R.$$

Se $A \subset R$ definiamo il *dominio* di A via M

$$\mathrm{dom}_M A = \{\mathrm{b} \in \mathbb{R}^n : \exists \mathrm{a} \in A : \mathrm{a} \ \mathrm{dom}_M \ \mathrm{b}\}$$

il *dominio* di A come

$$\mathrm{dom} A = \bigcup_{M \subset N} \mathrm{dom}_M A.$$

Definizione

Un insieme di imputazioni $K \subset R$ *è una* soluzione *se e solo se*

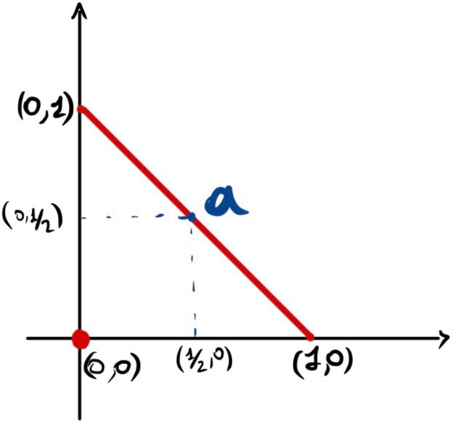
$$K \cap \mathrm{dom}(K) = \emptyset$$

e

$$K \cup \mathrm{dom}(K) = R.$$

Equivalentemente

$$R \setminus \mathrm{dom}(K) = K.$$



$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1 \text{ e } x, y \geq 0\}$$

S-equivalenza

Siano $\Gamma = \{N, F\}$ e $\Gamma' = \{N, F'\}$ due giochi ad n-giocatori con funzione di partizione. Diremo che Γ' è S-equivalente a Γ' se esiste una costante $c > 0$, $a_1, \ldots, a_n$ e una permutazione $\sigma : N \longrightarrow N$ tale che

$$F'_{\sigma(P)}(P_{\sigma(i)}) = cF_P(P_i) + \sum_{j \in P_i} a_j$$

S-equivalenza

Siano $\Gamma = \{N, F\}$ e $\Gamma' = \{N, F'\}$ due giochi ad n-giocatori con funzione di partizione. Diremo che Γ' è S-equivalente a Γ' se esiste una costante $c > 0$, $a_1, \ldots, a_n$ e una permutazione $\sigma : N \longrightarrow N$ tale che

$$F'_{\sigma(P)}(P_{\sigma(i)}) = cF_P(P_i) + \sum_{j \in P_i} a_j$$

Il gioco Γ è detto in *forma normale* se $v_i = 0$ per ogni $i \in N$.

Norma di una partizione

Data una partizione P di Γ

$$\|P\| = \sum_{P_i \in P} F_P(P_i).$$

Norma di una partizione

Data una partizione P di Γ

$$\|P\| = \sum_{P_i \in P} F_P(P_i).$$

$$A(b) = \left\{ a \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} a_i = b \text{ e } a_i \geq 0 \right\}.$$

Norma di una partizione

Data una partizione P di Γ

$$\|P\| = \sum_{P_i \in P} F_P(P_i).$$

$$A(b) = \left\{ a \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} a_i = b \text{ e } a_i \geq 0 \right\}.$$

simplesso di imputazioni: $A(\|P\|) = A(P)$.

Giochi con 2 giocatori

Consideriamo $N = \{1, 2\}$ e $\Pi = \{P^0, P^1\}$

$$P^0 = \{N\} \text{ e } P^1 = \{\{1\}, \{2\}\}.$$

Denotiamo $F_{P^0}(N) = c$ e $F_{P^1}(i) = 0$ per $i = 1, 2$.

Giochi con 2 giocatori

Consideriamo $N = \{1,2\}$ e $\Pi = \{P^0, P^1\}$

$$P^0 = \{N\} \text{ e } P^1 = \{\{1\},\{2\}\}.$$

Denotiamo $F_{P^0}(N) = c$ e $F_{P^1}(i) = 0$ per $i = 1,2$.

$$v(N) = c \text{ e } v_i = 0$$

e

$$R = A(c) \cup \{(0,0)\}.$$

Giochi con 2 giocatori

Consideriamo $N = \{1, 2\}$ e $\Pi = \{P^0, P^1\}$

$$P^0 = \{N\} \text{ e } P^1 = \{\{1\}, \{2\}\}.$$

Denotiamo $F_{P^0}(N) = c$ e $F_{P^1}(i) = 0$ per $i = 1, 2$.

$$v(N) = c \text{ e } v_i = 0$$

e

$$R = A(c) \cup \{(0, 0)\}.$$

Se $c > 0$ i due giocatori devono accettare di collaborare, altrimenti non vincono niente.

Giochi con 3 giocatori

$$P^0 = \{N\},$$
$$P^i = \{\{i\}, \{j, k\}\} \text{ per i=1,2,3},$$
$$P^4 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}.$$

Giochi con 3 giocatori

$$P^0 = \{N\},$$
$$P^i = \{\{i\}, \{j, k\}\} \text{ per i=1,2,3},$$
$$P^4 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}.$$

Le funzioni di outcome sono

$$F_{P^0}(N) = c,$$
$$F_{P^i}(\{i\}) = d_i \qquad F_{P^i}(\{j, k\}) = e_i \text{ per } i = 1, 2, 3,$$
$$F_{P^4}(\{i\}) = g_i \text{ per } i = 1, 2, 3.$$

Giochi con 3 giocatori

$$P^0 = \{N\},$$
$$P^i = \{\{i\}, \{j, k\}\} \text{ per i=1,2,3},$$
$$P^4 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}.$$

Le funzioni di outcome sono

$$F_{P^0}(N) = c,$$
$$F_{P^i}(\{i\}) = d_i \qquad F_{P^i}(\{j, k\}) = e_i \text{ per } i = 1, 2, 3,$$
$$F_{P^4}(\{i\}) = g_i \text{ per } i = 1, 2, 3.$$

le utilità delle coalizioni di N sono

$$v_i = \min \{d_i, g_i\}$$
$$v(\{j, k\}) = e_i \text{ per } i = 1, 2, 3,$$
$$v(N) = c.$$

Definiamo $c_i = d_i + e_i$, l'insieme di tutte le dominazioni R è costituito dai vettori a $= (a_1, a_2, a_3)$ per cui $a_i \geq 0$ e per cui viene soddisfatta una delle seguenti equazioni

Definiamo $c_i = d_i + e_i$, l'insieme di tutte le dominazioni R è costituito dai vettori a $= (a_1, a_2, a_3)$ per cui $a_i \geq 0$ e per cui viene soddisfatta una delle seguenti equazioni

$$a_1 + a_2 + a_3 = c,$$
$$a_1 + a_2 + a_3 = d_i + e_i = c_i \text{ per } i = 1, 2, 3$$
$$a_1 + a_2 + a_3 = g_1 + g_2 + g_3 = g.$$

Definiamo $c_i = d_i + e_i$, l'insieme di tutte le dominazioni R è costituito dai vettori a $= (a_1, a_2, a_3)$ per cui $a_i \geq 0$ e per cui viene soddisfatta una delle seguenti equazioni

$$a_1 + a_2 + a_3 = c,$$
$$a_1 + a_2 + a_3 = d_i + e_i = c_i \text{ per } i = 1, 2, 3$$
$$a_1 + a_2 + a_3 = g_1 + g_2 + g_3 = g.$$

Questi cinque simplessi di imputazioni sono realizzati rispettivamente dalle partizioni P^0, P^i, P^4, denotati con $A(c)$, $A(c_i)$, $A(g)$.

Decomposizione delle soluzioni

Teorema 1

Se K è una qualsiasi soluzione e $a < c = v(N)$,

$$K \cap A(a) = \emptyset.$$

Teorema 2

Se K è una soluzione per

$$T = \bigcup_{\|P\| \geq c} A(P)$$

allora $K' = K \cup (A(c) \setminus \operatorname{dom} K)$ é una soluzione per tutti gli R.

Decomposizione delle soluzioni

Teorema 3

Se K è una soluzione per

$$V = \bigcup_{P \in \Pi \setminus \{\{1\},\dots,\{n\}\}} A(P),$$

allora $K' = K \cup (A(g) \setminus \operatorname{dom} K)$ è una soluzione dove $g = \|\{\{1\},\dots,\{n\}\}\|$.

Esempio

$$\text{Genere } 0 : c > c_1 \geq c_2 \geq c_3$$

$$\text{Genere } 1 : c_1 \geq c > c_2 \geq c_3$$

$$\text{Genere } 2 : c_1 \geq c_2 \geq c > c_3$$

$$\text{Genere } 3 : c_1 \geq c_2 \geq c_2 \geq c_3 \geq c$$

Esempio

$$\text{Genere } 0 : c > c_1 \geq c_2 \geq c_3$$
$$\text{Genere } 1 : c_1 \geq c > c_2 \geq c_3$$
$$\text{Genere } 2 : c_1 \geq c_2 \geq c > c_3$$
$$\text{Genere } 3 : c_1 \geq c_2 \geq c_2 \geq c_3 \geq c$$

L'unica soluzione per il genere 1 è

$$A(c_1) \setminus \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 + x_3 < e_1\}.$$

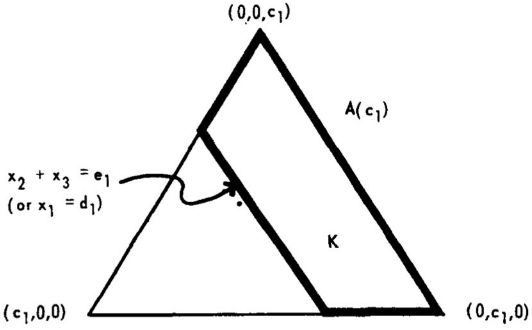


Figure 1 - Genus 1

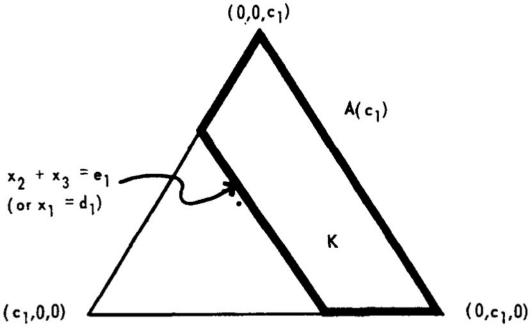


Figure 1 - Genus 1

Teorema

Se $c_1 > c_2 \geq c_3$, $c_1 \geq c$ *e* K *è una qualunque soluzione, si ha*

$$K \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 + x_3 < e_1\} = \emptyset$$

Giochi con $v(N)$ grande

Teorema 1

Se K è una qualsiasi soluzione e $a < c = v(N)$,

$$K \cap A(a) = \emptyset.$$

Giochi con $v(N)$ grande

Teorema 1

Se K è una qualsiasi soluzione e $a < c = v(N)$,

$$K \cap A(a) = \emptyset.$$

Teorema 2

Se K è una soluzione per

$$T = \bigcup_{\|P\| \geq c} A(P)$$

allora $K' = K \cup (A(c) \setminus \operatorname{dom} K)$ é una soluzione per tutti gli R.

Teorema

Per un gioco con n giocatori tale che $F_{\{N\}}(N) = v(N) = c > \|P\|$ *per ogni partizione* $P \neq \{N\}$*, l'unica soluzione è* $K = A(c)$*.*

$P' = \{\{1\}, \dots, \{n\}\}$

Lemma

Non può esistere una dominazione via un sottoinsieme $\{i\}$.

$P' = \{\{1\}, \ldots, \{n\}\}$

Lemma

Non può esistere una dominazione via un sottoinsieme $\{i\}$.

Infatti, $a \operatorname{dom}_{\{i\}} b$ implica che $0 = v_i \geq a_i > b_i \geq 0$ che è assurdo.

$P' = \{\{1\}, \ldots, \{n\}\}$

Lemma

Non può esistere una dominazione via un sottoinsieme $\{i\}$.

Infatti, $a \operatorname{dom}_{\{i\}} b$ implica che $0 = v_i \geq a_i > b_i \geq 0$ che è assurdo.

Teorema 3

Se K è una soluzione per

$$V = \bigcup_{P \in \Pi \setminus \{P'\}} A(P),$$

allora $K' = K \cup (A(g) \setminus \operatorname{dom} K)$ è una soluzione dove $g = \|P'\|$.

Dimostrazione

Possiamo allora assumere che $A(g) \cap V = \emptyset$.

Dimostrazione

Possiamo allora assumere che $A(g) \cap V = \emptyset$.
Infatti, se $A(g) \subset V$ allora si ha $R = V$ e $K = K'$ e K' è una soluzione per R.

Dimostrazione

Possiamo allora assumere che $A(g) \cap V = \emptyset$.
Infatti, se $A(g) \subset V$ allora si ha $R = V$ e $K = K'$ e K' è una soluzione per R.

$$\begin{aligned}
K' \cup \operatorname{dom} K' &= [K \cup (A(g) \setminus \operatorname{dom} K)] \cup \operatorname{dom}[K \cup (A(g) \setminus \operatorname{dom} K)] \\
&= [K \cup \operatorname{dom} K] \cup [(A(g) \setminus \operatorname{dom} K) \cup \operatorname{dom} K] \\
&\quad \cup [K \cup \operatorname{dom}(A(g) \setminus \operatorname{dom} K)] \cup [(A(g) \setminus \operatorname{dom} K) \\
&\quad \cup \operatorname{dom}(A(g) \setminus \operatorname{dom} K)] \\
&\supseteq (K \cup \operatorname{dom} K) \cup A(g) = R
\end{aligned}$$

Dimostrazione

Possiamo allora assumere che $A(g) \cap V = \emptyset$.
Infatti, se $A(g) \subset V$ allora si ha $R = V$ e $K = K'$ e K' è una soluzione per R.

$$\begin{aligned}
K' \cup \mathrm{dom}\, K' &= [K \cup (A(g) \setminus \mathrm{dom}\, K)] \cup \mathrm{dom}[K \cup (A(g) \setminus \mathrm{dom}\, K)] \\
&= [K \cup \mathrm{dom}\, K] \cup [(A(g) \setminus \mathrm{dom}\, K) \cup \mathrm{dom}\, K] \\
&\quad \cup [K \cup \mathrm{dom}(A(g) \setminus \mathrm{dom}\, K)] \cup [(A(g) \setminus \mathrm{dom}\, K) \\
&\quad \cup \mathrm{dom}(A(g) \setminus \mathrm{dom}\, K)] \\
&\supseteq (K \cup \mathrm{dom}\, K) \cup A(g) = R
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K' \cap \mathrm{dom}\, K' &= [K \cup (\mathrm{dom}\, A(g) \setminus \mathrm{dom}\, K)] \cap \mathrm{dom}[K \cup (A(g) \setminus \mathrm{dom}\, K] \\
&\subset [K \cap \mathrm{dom}\, K] \cup [(A(g) \setminus \mathrm{dom}\, K) \cap \mathrm{dom}\, K] \\
&\quad \cup ([K \cup (A(g) \setminus \mathrm{dom}\, K)] \cap \mathrm{dom}\, A(g)) = \emptyset
\end{aligned}$$

$P = N$ oppure $P = \{\{N-i\},\{i\}\}$

Data una qualunque partizione
$Q = \{Q_1, \ldots, Q_r\} \neq \{\{N-i\},\{i\}\}$ e $Q \neq N$ supponiamo che

$$\|Q\| = \sum_{i=1}^{r} F_Q(Q_i) < \max(0, \|(N)\|),$$

$P = N$ oppure $P = \{\{N-i\},\{i\}\}$

Data una qualunque partizione
$Q = \{Q_1, \ldots, Q_r\} \neq \{\{N-i\},\{i\}\}$ e $Q \neq N$ supponiamo che

$$\|Q\| = \sum_{i=1}^{r} F_Q(Q_i) < \max(0, \|(N)\|),$$

Per calcolare le soluzioni si deve solo considerare i casi delle partizioni $P = N$ e $P = \{\{N-i\},\{i\}\}$.

$P = N$ oppure $P = \{\{N-i\},\{i\}\}$

Data una qualunque partizione
$Q = \{Q_1, \ldots, Q_r\} \neq \{\{N-i\},\{i\}\}$ e $Q \neq N$ supponiamo che

$$\|Q\| = \sum_{i=1}^{r} F_Q(Q_i) < \max(0, \|(N)\|),$$

Per calcolare le soluzioni si deve solo considerare i casi delle partizioni $P = N$ e $P = \{\{N-i\},\{i\}\}$.
Il caso $P = N$, si usa solamente per cercare quale partizione del tipo $P = \{\{N-i\},\{i\}\}$ è tale che

$$\|(N-i,i)\| \geq \|(N)\|.$$

Le funzioni di outcome

$$
\begin{aligned}
c =& F_{(N)}(N),\\
d_i =& F_{(N-i,i)}(i),\\
e_i =& F_{(N-i,i)}(N - i),\\
c_i =& d_i + e_i \text{ per } i = 1, \dots n.
\end{aligned}
$$

Le funzioni di outcome

$$\begin{aligned} c =& F_{(N)}(N), \\ d_i =& F_{(N-i,i)}(i), \\ e_i =& F_{(N-i,i)}(N-i), \\ c_i =& d_i + e_i \text{ per } i = 1, \dots n. \end{aligned}$$

Assumiamo allora che $v(i) = 0$ e otteniamo quindi le relazioni le utilità delle partizioni sono

$$\begin{aligned} v(i) &= 0, \\ v(N-i) &= e_i \text{ per } i = 1, \dots n, \\ v(N) &= c. \end{aligned}$$

Caso in cui

$$c_1 > c_2 > \cdots > c_m \geq c > c_{m+j}$$

con $m \leq n$ e $j = 1, \ldots, n - m$ se m è strettamente minore di n.
I simplessi $A(c_i)$ sono distinti per $i \leq m$.

Caso in cui

$$c_1 > c_2 > \cdots > c_m \geq c > c_{m+j}$$

con $m \leq n$ e $j = 1, \ldots, n - m$ se m è strettamente minore di n.
I simplessi $A(c_i)$ sono distinti per $i \leq m$.

Teorema

Se $\Delta_{pj} = c_p - c_j$ l'unica soluzione K è data da

$$K = \left(\bigcup_{j=1}^{m} A(c_j) \right) \setminus \bigcup_{j=1}^{m} \left\{ \mathrm{a} : \sum_{i \neq j} a_k < e_j \text{ e } a_p < d_p - \Delta_{pj} \right\}.$$

Esternalità di un gioco

$S \subset N$ e ρ una partizione di N e $S \in \rho$ la quantità

$$v(S;\rho) := F_\rho(S).$$

Notazione: $v(A; B \cup \rho) = v_\rho(A; B)$

Esternalità di un gioco

$S \subset N$ e ρ una partizione di N e $S \in \rho$ la quantità

$$v(S;\rho) := F_\rho(S).$$

Notazione: $v(A; B \cup \rho) = v_\rho(A; B)$

Definizione

Un PFG è ad esternalità positive *se per ogni $C, S, T \subset N$ sottoinsiemi disgiunti e per ogni partizione ρ di $N \setminus (S \cup C \cup T)$ si ha*

$$v_\rho(C; \{S \cup T, C\}) > v_\rho(C; \{S, T, C\}).$$

Similmente diremo che il gioco è ad esternalità negative se

$$v_\rho(C; \{S \cup T, C\}) < v_\rho(C; \{S, T, C\}).$$

Estensione della superadditività

Definizione (Superadditività)

Un gioco cooperativo si dice superadditivo se per ogni T_1, T_2 *sottoinsiemi disgiunti di* N *si ha*

$$v(T_1 \cup T_2) \geq v(T_1) + v(T_2).$$

Estensione della superadditività

Definizione (Superadditività)

Un gioco cooperativo si dice superadditivo se per ogni T_1, T_2 sottoinsiemi disgiunti di N si ha

$$v(T_1 \cup T_2) \geq v(T_1) + v(T_2).$$

Definizione (Superadditività)

Un gioco cooperativo con funzione di partizione si dice superadditivo se per ogni $S, T \subset N$ sottoinsieme disgiunti e per ogni partizione ρ di $N \setminus (S \cup T)$

$$v_\rho(S \cup T; \{S \cup T\}) > v_\rho(S; \{S, T\}) + v_\rho(T; \{S, T\}).$$

Sia $N = \{1, 2, 3\}$ e consideriamo le utilità simmetriche

Sia $N = \{1, 2, 3\}$ e consideriamo le utilità simmetriche

$$v(\{i\}; \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}) = 4 \text{ per } i = 1, 2, 3;$$
$$v(\{j, k\}; \{\{i\}, \{j, k\}\}) = 9 \text{ e } v(\{i\}; \{\{i\}, \{j, k\}\}) = 1;$$
$$v(N; \{N\}) = 11.$$

Sia $N = \{1, 2, 3\}$ e consideriamo le utilità simmetriche

$$v(\{i\}; \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}) = 4 \text{ per } i = 1, 2, 3;$$
$$v(\{j, k\}; \{\{i\}, \{j, k\}\}) = 9 \text{ e } v(\{i\}; \{\{i\}, \{j, k\}\}) = 1;$$
$$v(N; \{N\}) = 11.$$

La grande coalizione non è efficiente, infatti

$$v(N; \{N\}) = 11 < \sum_{i=1}^{3} v(\{i\}; \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}) = 12.$$

Sia $N = \{1, 2, 3\}$ e consideriamo le utilità simmetriche

$$v(\{i\}; \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}) = 4 \text{ per } i = 1, 2, 3;$$
$$v(\{j, k\}; \{\{i\}, \{j, k\}\}) = 9 \text{ e } v(\{i\}; \{\{i\}, \{j, k\}\}) = 1;$$
$$v(N; \{N\}) = 11.$$

La grande coalizione non è efficiente, infatti

$$v(N; \{N\}) = 11 < \sum_{i=1}^{3} v(\{i\}; \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}) = 12.$$

Osservazione

Il gioco è a esternalità negative!

Estensione della convessità

Definizione (Convesso)

Un gioco collaborativo è convesso se

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$$

Estensione della convessità

Definizione (Convesso)

Un gioco collaborativo è convesso se

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$$

Definizione

Un gioco collaborativo con funzione di partizione è convesso se per ogni $S, T \subset N$ e per ogni partizione ρ di $N \setminus (S \cup T)$ si ha

$$v_\rho(S \cup T; \{S \cup T\}) + v_\rho(S \cap T; \{S \cap T, S \setminus T, T \setminus S\}) \geq$$

$$v_\rho(S; \{S, T \setminus S\}) + v_\rho(T; \{T, S \setminus T\}.$$

Giochi convessi

Proposizione

Se un gioco con funzione di partizione è convesso, per ogni coalizione C e per ogni partizione ρ di $N \setminus C$ e ρ' di C si ha

$$v(C; \rho \cup \rho') \geq \sum_{S \in \rho'} v(S; \rho' \cup \rho).$$

Giochi convessi

Proposizione

Se un gioco con funzione di partizione è convesso, per ogni coalizione C e per ogni partizione ρ di $N \setminus C$ e ρ' di C si ha

$$v(C; \rho \cup \rho') \geq \sum_{S \in \rho'} v(S; \rho' \cup \rho).$$

Corollario

Se un gioco con funzione di partizione è convesso, si ha che

$$v(N; \{N\}) \geq \sum_{S \in \rho'} v(S; \rho').$$

Nucleo di un gioco convesso

Nel caso di un gioco collaborativo, un vettore di payoff a $= (a_1, \dots, a_n)$ appartiene al *nucleo* del gioco se per ogni $S \subset N$ si ha

$$a(S) \geq v(S).$$

Nucleo di un gioco convesso

Nel caso di un gioco collaborativo, un vettore di payoff $a = (a_1, \ldots, a_n)$ appartiene al *nucleo* del gioco se per ogni $S \subset N$ si ha

$$a(S) \geq v(S).$$

Proposizione (Shapley, 1971)

Per un gioco collaborativo convesso si ha che

$$x = (v(\{1, \ldots, i\}) - v(\{1, \ldots, i-1\}))_{i \in N}$$

appartiene al nucleo del gioco.

s-nucleo

Definizione

Un vettore di payoff a $= (a_1, \ldots, a_n)$ *appartiene al* nucleo con aspettativa dei singoli *del gioco, denominato con* s-nucleo *se per ogni $S \subset N$ si ha*

$$a(S) \geq v(S : \{S\} \cup [N \setminus S]),$$

dove denotiamo con $[N \setminus S]$ la partizione in cui $N \setminus S$ è partizionato in singoletti.

s-nucleo

Definizione

Un vettore di payoff a $= (a_1, \ldots, a_n)$ *appartiene al* nucleo con aspettativa dei singoli *del gioco, denominato con* s-nucleo *se per ogni $S \subset N$ si ha*

$$a(S) \geq v(S : \{S\} \cup [N \setminus S]),$$

dove denotiamo con $[N \setminus S]$ la partizione in cui $N \setminus S$ è partizionato in singoletti.

Proposizione

Se un gioco collaborativo con funzione di partizione è convesso, allora ha s-nucleo non vuoto.

Dimostrazione

Definiamo il gioco dato da

$$\hat{v}(S) = v(S; \{S\} \cup [N \setminus S]).$$

Dimostrazione

Definiamo il gioco dato da

$$\hat{v}(S) = v(S; \{S\} \cup [N \setminus S]).$$

Proposizione (Moulin, 1988)

Un gioco collaborativo è convesso se e solo se verifica la convessità su insiemi $S, T \subset N$ *tali che* $|S - T| = |T - S| = 1$.

Dimostrazione

Definiamo il gioco dato da

$$\hat{v}(S) = v(S; \{S\} \cup [N \setminus S]).$$

Proposizione (Moulin, 1988)

Un gioco collaborativo è convesso se e solo se verifica la convessità su insiemi $S, T \subset N$ tali che $|S - T| = |T - S| = 1$.

Presi $S, T \subset N$ con la cardinalità di $T \setminus S$ e di $S \setminus T$ uguale ad 1, dalla convessità per il gioco iniziale con $\rho = [N \setminus (S \cup T)]$, si ha

Dimostrazione

Definiamo il gioco dato da

$$\hat{v}(S) = v(S; \{S\} \cup [N \setminus S]).$$

Proposizione (Moulin, 1988)

Un gioco collaborativo è convesso se e solo se verifica la convessità su insiemi $S, T \subset N$ *tali che* $|S - T| = |T - S| = 1$.

Presi $S, T \subset N$ con la cardinalità di $T \setminus S$ e di $S \setminus T$ uguale ad 1, dalla convessità per il gioco iniziale con $\rho = [N \setminus (S \cup T)]$, si ha

$$v(S \cup T; \{S \cup T\} \cup \rho) + v(S \cap T; \{S \cap T, S \setminus T, T \setminus S\} \cup \rho) \geq$$

$$v(S; \{S, T \setminus S\} \cup \rho) + v(T; \{T, S \setminus T\} \cup \rho)$$

$$\hat{v}(S \cup T) + \hat{v}(S \cap T) \geq \hat{v}(S) + \hat{v}(T).$$

$$\hat{v}(S \cup T) + \hat{v}(S \cap T) \geq \hat{v}(S) + \hat{v}(T).$$

$$x_i = \hat{v}(\{1, \ldots, i\}) - \hat{v}(\{1, \ldots, i-1\})$$

$$\hat{v}(S \cup T) + \hat{v}(S \cap T) \geq \hat{v}(S) + \hat{v}(T).$$

$$x_i = \hat{v}(\{1, \dots, i\}) - \hat{v}(\{1, \dots, i-1\})$$

$$\begin{aligned} a_i = {} & v(\{1, \dots i\}; \{1, \dots i\}, \{i+1\}, \dots, \{n\}) \\ & - v(\{1, \dots i-1\}; \{1, \dots i-1\}, \{i\}, \dots, \{n\}) \end{aligned}$$

è nel s-nucleo del gioco.

m-nucleo

Definizione

Un vettore di payoff a $= (a_1, \ldots, a_n)$ *appartiene al* nucleo con aspettativa di unione *del gioco, denominato con* m-nucleo *se per ogni* $S \subset N$ *si ha*

$$a(S) \geq v(S; \{S, N \setminus S\}).$$

m-nucleo

Definizione

Un vettore di payoff a $= (a_1, \ldots, a_n)$ *appartiene al* nucleo con aspettativa di unione *del gioco, denominato con* m-nucleo *se per ogni $S \subset N$ si ha*

$$a(S) \geq v(S; \{S, N \setminus S\}).$$

Sia $N = \{1, 2, 3\}$ e consideriamo le utilità simmetrici

$$v(\{i\}; \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}) = 4 \text{ per } i = 1, 2, 3;$$
$$v(\{j, k\}; \{\{i\}, \{j, k\}\}) = 9 \text{ e } v(\{i\}; \{\{i\}, \{j, k\}\}) = 6;$$
$$v(N; \{N\}) = 16.$$

Il gioco è convesso: $S = \{1, 2\}$ e $T = \{2, 3\}$, allora si ha

Il gioco è convesso: $S = \{1, 2\}$ e $T = \{2, 3\}$, allora si ha

$$\begin{aligned} 20 =& v(N; \{N\}) + v(\{2\}; \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}) \\ &> v(\{1, 2\}; \{\{3\}, \{1, 2\}\}) + v(\{2, 3\}; \{\{1\}, \{2, 3\}\}) = 18. \end{aligned}$$

Il gioco è convesso: $S = \{1, 2\}$ e $T = \{2, 3\}$, allora si ha

$$\begin{aligned} 20 =& v(N; \{N\}) + v(\{2\}; \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}) \\ &> v(\{1, 2\}; \{\{3\}, \{1, 2\}\}) + v(\{2, 3\}; \{\{1\}, \{2, 3\}\}) = 18. \end{aligned}$$

Ha *m*-nucleo vuoto, infatti

$$a_i \geq v(\{i\}; \{\{i\}, \{j, k\}\}) = 6,$$

ma

$$a(N) \geq 18 \notin \{12, 15, 16\}$$

Bibliografia

- Giovanni Barbarino,*Teoria dei Giochi*, dispense del corso
- Isa E. Hafalir,*Efficiency in coalition games with externalities*, ScienceDirect, Games and Economic Behavior 61 242-258,2007
- R. M. Thrall, W. F. Lucas,*n-persongame in partition function form*, "Naval Research Logistics Quarterly, 10:281-298, 1963
- W. F. Lucas,*Solutions for a class of n-person games in partition form*, The Rand Corporation Santa Monica, California, 1967

GRAZIE PER L'ATTENZIONE!