Elementi di Topologia

per il corso di Analisi 1

Cristian Sopio
Cristofer Villani

A.A. 2017/2018

Indice

Premessa

I principali riferimenti per queste dispense sono, oltre ai nostri appunti, il testo di G. Prodi, *Analisi Matematica I*, e i *Complementi di Matematica* del Seminario Matematico-Fisico del I anno della SNS. Chiaramente, esse contengono poco più che i concetti topologici essenziali, e utili ad avere una base teorica solida per lo studio delle nozioni di continuità, limiti, successioni, in particolare nell'ottica del corso tenuto dal prof. Novaga nell'A.A. 2017/2018. Il modo in cui esse sono strutturate ci sembra, in qualche misura, vantaggioso: prima introduciamo il caso più generale possibile degli spazi topologici, per poi passare alle proprietà valide nei particolari spazi in cui la topologia è indotta da una distanza, gli spazi metrici. In ultima battuta, ci spingiamo a considerare gli spazi "speciali" $\mathbb{R}^n$, con le loro specifiche e caratterizzanti proprietà. In questo modo, al prezzo di un po' di astrazione in più all'inizio, si dovrebbero evitare le spiacevoli confusioni che potrebbero sorgere a fare il percorso in senso inverso.
Una nota tecnica: i numeri a margine indicizzati dal simbolo $\diamondsuit$ indicano la presenza, a fine sezione, di esempi relativi all'argomento cui sono affiancati; in tali esempi, le parti sottolineate in blu rappresentano, di fatto, degli esercizi lasciati al lettore.
Infine, c'è una buona probabilità che, tra le pagine, si nasconda più di un errore: in caso doveste trovarne, sarebbe gradito che li segnalaste a *cristofervillani@gmail.com* o a *cristiansopio@yahoo.it*. Ciò detto, buona lettura e buono studio,

Cristian Sopio
Cristofer Villani

1 Spazi Topologici

Per prima cosa, è chiaramente necessario definire il nostro "ambiente di lavoro": nello specifico, ci interessa caratterizzare un insieme come uno *spazio*. Ma, a pensarci bene, la nostra idea intuitiva di che cosa sia uno spazio si fonda essenzialmente su questo: che possiamo dire, isolata una sua parte, quali punti stiano dentro di essa, quali fuori, quali sul suo contorno. La definizione che stiamo per dare sembrerà, in qualche modo, più astratta; basterà, tuttavia, scorrere qualche riga perché essa si riappacifichi con l'intuizione qui fornita.

1.1 Prime definizioni: aperti e chiusi

Definizione 1.1.1. *Sia X un insieme; diciamo* topologia *su X una collezione $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$* ♢ 1
di sottoinsiemi di X, che definiamo aperti*, tale che* ♢ 2

i. $X \in \tau, \emptyset \in \tau$;

ii. *se I è un insieme di indici, e $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$ una famiglia di aperti, allora anche $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$;*

iii. *se $\tau \ni A, B$ aperti, anche $A \cap B \in \tau$.*[1]

La coppia (X, τ) prende il nome di spazio topologico.

Definizione 1.1.2. *In uno spazio topologico (X, τ), un sottoinsieme $C \in X$ si dice* chiuso ♢ 3
se il suo complementare C^c è aperto.

Osservazione 1.1.3. Si noti che chiuso non è il contrario di aperto: in (X, τ), X e $\emptyset$ sono sia aperti che chiusi (valendo $X = \emptyset^c$ e viceversa), e possono esistere sottoinsiemi di X che non sono né aperti né chiusi.

Dalla definizione, segue subito che

Proposizione 1.1.4. *Se (X, τ) è uno spazio topologico*

i. *data una famiglia di chiusi $\{C_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$, $\bigcap_{i \in I} A_i \in \tau$;*

ii. *se A, B sono chiusi, $A \cup B \in \tau$.*

Dimostrazione. La tesi si ottiene, immediatamente, considerando le proprietà dell'unione e dell'intersezione del complementare di un insieme (le cosiddette *leggi di De Morgan*). □

Osservazione 1.1.5. Non fa nessuna differenza se, per definire uno spazio topologico, si sceglie di usare il concetto di chiuso con le proprietà appena dimostrate (unite alla *i.* della definizione sopra), ottenendo poi gli aperti come complementari dei chiusi.

Vogliamo ora introdurre, nel nostro spazio, un indicatore del concetto intuitivo di "vicinanza": lo facciamo con la seguente

[1] Cioè, induttivamente, se $A_1, ..., A_n \in \tau$, per $n \in \mathbb{N}$, allora $\bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \tau$

Definizione 1.1.6. *Sia (X, τ) uno spazio topologico, e $x_0 \in X$. Diciamo che $U \in X$ è un* intorno *di x_0 se $\exists A$ aperto t.c. $x_0 \in A \subseteq U$. Dato $x \in X$, scriveremo $U(x)$ per indicare un intorno di x, $\mathscr{I}_x$ per riferirci alla famiglia di tutti gli intorni di x.*

Il fatto che, grazie a questa definizione, abbiamo un modo di mettere tra loro in relazione i punti di X, ci permette di esplicitare l'idea che abbiamo dato all'inizio: vogliamo cioè, preso un sottoinsieme di X, essere in grado di classificare i punti dello spazio in rapporto ad esso. Facciamolo:

Definizione 1.1.7. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e $T \subseteq X$ un suo sottoinsieme.*

- *Si dice che $x \in X$ è un* punto aderente *per T se $\forall U(x)$ aperto si ha che $T \cap U(x) \neq \emptyset$;*
- *Si definisce* chiusura *di T l'insieme dei suoi punti aderenti, cioè* ♢ **4**

$$\overline{T} = \{x \in X : \forall U(x), T \cap U(x) \neq \emptyset\}$$

- *Si dice che $x \in X$ è un* punto di accumulazione *per T se $\forall U(x)$ aperto si ha che $T \cap U(x) \setminus \{x\} \neq \emptyset$;*
- *Diciamo* derivato *di T l'insieme dei suoi punti di accumulazione, cioè*

$$D(T) = \{x \in X : \forall U(x), T \cap U(x) \setminus \{x\} \neq \emptyset\}$$

- *Si dice che $x \in X$ è un* punto interno *per T se $\exists U$ intorno di x per cui $U \subseteq T$; diciamo inoltre* esterno *a T un punto interno a $X \setminus T$;*
- *Si chiama* parte interna *di T l'insieme dei suoi punti interni, ovvero*

$$\mathring{T} = \{x \in X \mid \exists U(x) \subseteq T\}$$

- *Si dice che $x \in X$ è un* punto isolato *per T se $\exists U$ intorno di x per cui $T \cap U = \{x\}$; alternativamente, x è isolato in X se $\exists U$ intorno di x per cui $T \cap U \setminus \{x\} = \emptyset$;*
- *Si definisce la* frontiera *(o* bordo*) di T come l'insieme ∂T dei punti aderenti a T e a T^c.*

1.2 Caratterizzazioni equivalenti degli oggetti topologici

Vogliamo rendere ancora più esplicito il fatto che la serie di definizioni appena date sia coerente con l'intento che abbiamo di rendere X uno spazio. Innanzitutto, chiariamo che "aperti" e "chiusi" sono proprio i nomi giusti per le cellule della nostra topologia e per i loro complementari.

Proposizione 1.2.1. *Sia (X, τ) spazio topologico e $T \subseteq X$. Sono equivalenti i seguenti fatti:*

i. T è aperto.

ii. T^c *è chiuso.*

iii. T *è intorno di ogni suo punto.*

iv. $T = \mathring{T}$

v. $T \cap \partial T = \emptyset$

Dimostrazione. Osserviamo intanto che la *ii.* si ottiene dalla *i.* per passaggio al complementare, e viceversa. A questo punto, la *i.* implica la *iii*: infatti, in particolare, un aperto contenente un punto è un suo intorno; ma dalla *iii* segue subito la *iv*: se ogni punto di T ha T come intorno, è chiaro che, in particolare, è ad esso interno; la *v.*, poi, si ottiene dalla *iv.* considerando che, se un punto è interno a T, sta in esso con tutto un suo intorno: pertanto, è alquanto improbabile che sia aderente a T^c. La *v.* implica la *iii.*, perché se nessun punto di T è aderente al complementare di T, ogni suo punto è interno; infine, dalla *iii.* segue la *i.*: se T, intorno di ogni suo punto, non fosse aperto, non lo sarebbe nemmeno l'unione di tutti gli aperti contenuti negli intorni che contengono ognuno dei punti di T, che è proprio T, e ciò contraddirebbe la prima definizione che abbiamo dato. □

Proposizione 1.2.2. *Sono equivalenti i seguenti fatti:*

i. T *è chiuso*

ii. T *contiene tutti i suoi punti di accumulazione*

iii. $T = \overline{T}$

iv. $\partial T \subseteq T$

Dimostrazione. Supponiamo che T chiuso non contenesse i suoi punti di accumulazione; allora qualcuno di essi sarebbe in T^c, che però è aperto, e certo non contiene punti di accumulazione per T. Pertanto, dalla *i.* viene la *ii.*; ma la *ii.* porta immediatamente alla *iii.*: se T contiene tutti i suoi punti di accumulazione, non può che contenere anche i punti aderenti, poiché segue dalle definizioni che un punto aderente che non sia di accumulazione deve stare in T. La *iii.* conduce poi alla *iv.* perché, in particolare, il bordo è un sottoinsieme della chiusura. In ultimo, chiudiamo il cerchio osservando che, se $T \supseteq \partial T$, il suo complementare non può che contenere solo punti interni, ed è pertanto aperto. □

È un utile esercizio integrare le dimostrazioni sopra con tutte le implicazioni mancanti. Ci sono però anche altri oggetti che meritano una caratterizzazione più esplicita:

Proposizione 1.2.3. *La chiusura* $\overline{T}$ *di un sottoinsieme* $T \subseteq X$ *è il più piccolo chiuso che contiene* T*.*

Dimostrazione. Il fatto che $\overline{T}$ sia chiuso viene subito dalla *iii.* della proposizione precedente. Che, poi, sia il più piccolo, segue dal fatto che, per un $C \subseteq X$ chiuso tale che $C \supseteq T$, ogni punto aderente a T è a maggior ragione aderente a C: pertanto, non può che essere $C \supseteq \overline{T}$. □

Proposizione 1.2.4. *Preso $T \subseteq X$, la sua parte interna $\mathring{T}$ è il più grande aperto contenuto in T.*

Dimostrazione. Nella proposizione ..., abbiamo già visto che $\mathring{T}$ è un aperto. Se poi c'è un aperto $A \subseteq X$ contenuto in T, allora in particolare tutti i suoi punti interni sono interni anche a T: allora, $A \subseteq \mathring{T}$. □

Resta solo una cosa da fare: elencare tutta una serie di relazioni e proprietà degli oggetti topologici che abbiamo introdotto. Molte sono banali, ma restano comunque un buon esercizio per chiarire i concetti introdotti.

Proposizione 1.2.5. *Valgono le seguenti relazioni:*

i. $X \setminus \mathring{T} = \overline{X \setminus T}$;

ii. $\mathring{\overline{(X \setminus T)}}$ — $\mathring{(X \setminus T)} = X \setminus \overline{T}$;

iii. *Se* $A \subseteq X$ *aperto* $A \subseteq \mathring{\overline{A}}$;

iv. *Se* $C \subseteq X$ *chiuso* $\overline{\mathring{C}} \subseteq C$;

v. $\partial T = \partial(X \setminus T)$;

vi. $D(T) \subseteq \overline{T}$;

vii. $D(T)$ *è chiuso;*

viii. *Se* $x \in \overline{T} \setminus T$ *allora* $x \in D(T)$;

ix. $\forall x \in T$, x *è di accumulazione o isolato per* T;

x. $(\overline{T})^c = \mathring{T^c}$;

xi. $\overline{T}$ *è l'unione disgiunta di* $D(T)$ *e dei punti isolati;*

xii. $\overline{T} = T \cup \partial T = T \cup D(T)$;

xiii. $X = \mathring{T} \sqcup \partial T \sqcup \mathring{T^c}$;

xiv. $\partial T = \overline{T} \setminus \mathring{T}$.

1.3 Assiomi di Hausdorff e spazi separati

Notiamo ora che abbiamo dato la definizione di topologia a partire dal concetto di aperto; tuttavia, l'idea di intorno è altrettanto fondamentale nell'attribuire a un insieme la struttura di spazio topologico. Potremmo, cioè, determinare la topologia di un insieme fornendo assiomi sugli intorni, e dedurre da essi la caratterizzazione di aperti e chiusi. È quello che faremo con la successiva

Definizione 1.3.1. S*ia X un insieme, $\mathscr{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una collezione di suoi sottoinsiemi, che diciamo* intorni*, con le seguenti proprietà:*

a) $\forall x \in X, \exists U(x)$ *intorno t.c.* $x \in U$;

b) *se* $U(x), V(x)$ *sono intorni di* x, *allora* $x \in U \cap V$;

c) *se* $U(x)$ *è un intorno di* x *e* $U(x) \subseteq V(x)$, *anche* $V(x)$ *è un intorno di* x;

d) *per ogni intorno* $U(x)$ *di* x $\exists V(x)$ *intorno di* x *t.c.,* $\forall y \in V(x), U(x)$ *è intorno di* y.

Diciamo allora che $(X, \mathscr{U})$ *rispetta gli* assiomi di Hausdorff.

È immediato verificare, usando le definizioni di aperti e intorni, che

Proposizione 1.3.2. *Se* $(X, \mathscr{U})$ *rispetta gli assiomi di Hausdorff, detto* $\tau = \{A \in \mathscr{U} \mid A$ *è intorno di ogni suo punto*$\}$, (X, τ) *è uno spazio topologico.*
Viceversa, se (X, τ) *è uno spazio topologico, e* $\mathscr{U} = \{\mathscr{I}_x\}_{x \in X}$, $(X, \mathscr{U})$ *rispetta gli assiomi di Hausdorff.*

Sappiamo, perciò, che gli aperti di uno spazio topologico determinano univocamente gli intorni dei suoi punti e viceversa; inoltre, la proposizione fornisce una maniera di passare dagli uni agli altri. Pensare uno spazio topologico in termini della relativa vicinanza dei suoi punti è utile, perché garantisce l'intuizione giusta per un'ulteriore richiesta: che i suoi punti siano anche abbastanza "lontani" da essere distinguibili. Nello specifico, che

e) $\forall x, y \in X, \exists U \in \mathscr{I}_x, V \in \mathscr{I}_y$ *t. c.* $U \cap V = \emptyset$. (assioma di separazione)

La sottoclasse di spazi topologici che rispetta tale proprietà ha importanti caratteristiche, come vedremo, tanto da spingerci a dare un nome ai suoi membri:

Definizione 1.3.3. *Uno spazio topologico* (X, τ) *in cui valga l'assioma di separazione si dice* separato *(o spazio* di Hausdorff*, o spazio* T2[2]*).* ♢ **5**

1.4 Basi e topologia indotta

Tenendo presente l'ambivalenza che abbiamo trovato tra aperti e intorni, vogliamo dare forma a sistemi minimali di questi oggetti che descrivano completamente la topologia di uno spazio: usando un nome abbastanza prevedibile, li chiamiamo *basi.*

Definizione 1.4.1. *Sia* (X, τ) *uno spazio topologico,* $\mathscr{U} = \{\mathscr{I}_x\}_{x \in X}$. *Diciamo* ♢ **6**

- base della topologia *su* X, *una collezione* $\mathcal{B} = \{A_i\}_{i \in I}$ *di aperti tale che ogni* $A \subseteq X$ *aperto è unione (finita o infinita) di elementi di* $\mathcal{B}$*; si ha allora che* $\mathcal{B}$ genera *la topologia.*
- base di intorni *o* sistema fondamentale di intorni *di* $x \in X$ *una sottofamiglia* $\mathscr{I}_x^*$ *di* $\mathscr{I}_x$ *con la proprietà che* $\forall U(x) \in \mathscr{I}_x$ $\exists V(x) \in \mathscr{I}_x^*$ *tale che* $V(x) \subseteq U(x)$.[3]

[2] La T è tedesco *Trennung*, che vale proprio "separazione", il numero si riferisce alla classificazione progressiva degli spazi topologici in base ai cosiddetti *assiomi di separabilità*.

[3] È importante notare che *a ogni* punto x di X corrisponde un sistema fondamentale di intorni, che infatti si dice anche *base locale* dello spazio.

È facile osservare che, tanto nelle definizioni quanto nelle dimostrazioni, considerare l'intera topologia o una sua base, l'intera famiglia degli intorni di un punto o un suo sistema fondamentale non è in alcun modo riduttivo: detto in altri termini, se una proprietà vale per aperti/intorni arbitrariamente piccoli, segue immediatamente che essa è verificata per tutti gli aperti/intorni più grandi (nel senso dell'inclusione).
Ci chiediamo ora quando, prese per ogni punto due basi di intorni distinte, le loro famiglie generino la stessa topologia.[4]

Proposizione 1.4.2. *Sia X un insieme e, preso $x \in X$, siano $\{\mathscr{I}_x^*\}_{x\in X}$ e $\{\mathscr{I}_x^{**}\}_{x\in X}$ due famiglie di basi locali dei punti di X. Esse generano la stessa topologia se e solo se, preso x qualsiasi in X, $\forall U(x) \in \mathscr{I}_x^* \ \exists V(x) \in \mathscr{I}_x^{**}$ t.c. $V \subseteq U$ e, viceversa, $\forall V(x) \in \mathscr{I}_x^{**} \ \exists U(x) \in \mathscr{I}_x^*$ t.c. $U \subseteq V$.*

Dimostrazione. La necessità segue direttamente dalla definizione di base locale. Per la sufficienza, si osservi che, determinata per un qualsiasi x una sua base di intorni, *tutti* i suoi intorni si ottengono semplicemente come i soprainsiemi degli intorni della base; allora, se la condizione richiesta è vera, segue subito che i soprainsiemi degli elementi di $\mathscr{I}_x^*$ sono gli stessi degli elementi di $\mathscr{I}_x^{**}$. Dalla *prop. 1.2.2* segue la tesi. □

Come avremo modo di constatare, l'esistenza di una base (di intorni o, ancora meglio, della topologia) *abbastanza piccola* per uno spazio topologico garantisce che esso abbia particolari caratteristiche di regolarità. Chiariamo ciò che intendiamo:

Definizione 1.4.3. *Sia (X, τ) uno spazio topologico. Diciamo che*[5]

- X *è* primo numerabile *se gode della proprietà che, $\forall x \in X$, x ha una base locale $\mathscr{I}_x$ numerabile* (primo assioma di numerabilità)*;* ♢ **7**
- X *è* secondo numerabile *se τ ha una base numerabile* (secondo assioma di numerabilità)*.* ♢ **8**

Proposizione 1.4.4. *Sia (X, τ) uno spazio topologico primo numerabile e $T \subseteq X$. Allora abbiamo che $\forall \overline{x} \in \overline{T}$, $\exists (x_n) \subseteq T$ convergente a $\overline{x}$.*

Dimostrazione. Prendiamo quindi una base numerabile di intorni per $\overline{x} \in \overline{T}$, $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e sia, come già introdotto $V_k = \bigcap_{i=1}^{k} U_k$ per cui sappiamo che $V_0 \supseteq V_1 \supseteq \cdots \supseteq V_k \supseteq \cdots$. Vogliamo adesso costruire una successione $(x_n) \subseteq T$ convergente a $\overline{x}$. Essendo un punto aderente sappiamo che $\forall k \in \mathbb{N}$, $V_k \cap T \neq \emptyset$, prendiamo quindi $x_0 = x \in V_0 \cap T$, $x_1 = x \in V_1 \cap T$, quindi $x_k = x \in V_k \cap T$. La successione (x_n) è quindi per costruzione contenuta definitivamente in V_0 e quindi in particolare in U_0. Per definizione di limite abbiamo quindi che (x_n) tende a $\overline{x}$ □

Vediamo ora come sia possibile, dato uno spazio topologico, restringersi a un suo sottoinsieme nel modo più naturale:

---

[4] Intendendo dire, con ciò, che generano la stessa topologia le famiglie di aperti che tali intorni determinano.

[5] Si ricordi che un insieme è numerabile se può essere messo in bigezione con $\mathbb{N}$.

Proposizione 1.4.5. *Sia* (X, τ) *è uno spazio topologico e* $T \subseteq X$ *un suo sottoinsieme. Allora*

i. (T, υ), *con* $\upsilon = \{A \cap T \mid A \in \tau\}$ *è uno spazio topologico;*

ii. $(T, \mathscr{V})$, *con* $\mathscr{V} = \{\mathscr{J}_y\}_{y \in T}$ *e* $\mathscr{J}_y = \{U \cap T \mid U \in \mathscr{I}_y\}$ $\forall y \in T$ *rispetta gli assiomi di Haussdorf.*

Dimostrazione. In virtù della *prop. 1.2.2*, basterà dimostrare una delle due implicazioni. Dimostriamo la *i.*:

a. $T = X \cap T$ e $\emptyset = \emptyset \cap T$ stanno in υ;

b. detta $\{B_j\}_{j \in J}$ una famiglia di aperti di υ, con $B_j = A_j \cap T, A_j \in \tau$ vale

$$\bigcup_{j \in J} B_j = \bigcup_{j \in J} (A_j \cap T) = \left(\bigcup_{j \in J} A_j \right) \cap T \in \upsilon$$

essendo $\bigcup_{j \in J} A_j \in \tau$;

c. se $B, B' \in \upsilon$ e $B = A \cap Y, B' = A' \cap Y$, $B \cap B' = (A \cap T) \cap (A \cap T) = (A \cap A') \cap T \in \upsilon$, essendo $A \cap A' \in \upsilon$.

$\square$

Definizione 1.4.6. *Con la notazione della* prop. 1.3.4*,* υ *si dice* topologia indotta *o* subordinata *da* τ *su* T*. Si dice pure che* T *è un* sottospazio *di* X*.*

A meno di specificare diversamente, considereremo sempre un sottoinsieme di uno spazio topologico dotato della topologia subordinata. Osserviamo, però, che le due topologie, quella originaria e quella indotta, non sono affatto sovrapponibili su T: ad esempio, T stesso è sempre chiuso e aperto in υ, mentre può non essere alcuna delle due cose in τ. Completiamo la caratterizzazione della topologia subordinata:

Osservazione 1.4.7. I chiusi di υ sono le intersezioni dei chiusi di τ con T, cioè i $C \cap Y \mid \exists A \in \tau$ t.c. $C = X \setminus A$: questo, perché se C_T è chiuso in υ, $C_T = T \setminus A_T = T \setminus (A \cap T) = (X \setminus A) \cap T$ con A_T aperto in υ, A aperto in τ, e quindi $X \setminus A$ chiuso in τ. Segue allora immediatamente la

Proposizione 1.4.8. *Sia* $Z \subseteq T$*,* $\overline{Z}_T$ *la sua chiusura in* (T, υ)*,* $\overline{Z}$ *la sua chiusura in* (X, τ)*. Allora* $\overline{Z}_T = \overline{Z} \cap T$*.*

Osservazione 1.4.9. È chiaro che, se T è chiuso in (X, τ), vale proprio $\overline{Z}_T = \overline{Z}$.

1.5 Continuità

A questo punto, la struttura di uno spazio topologico dovrebbe essere abbastanza chiara; pertanto, vogliamo spingerci a considerare un concetto, fondamentale in analisi, che trova in topologia la sua naturale espressione: quello di *continuità*. Essa sarà, in sostanza, alla base di ogni altro concetto in queste pagine, e il modo in cui una funzione continua preserva le caratteristiche dei vari spazi che introdurremo sarà per noi di primario interesse; pertanto, qui ne vedremo solo le proprietà basilari.

Definizione 1.5.1. *Siano (X, τ) e (Y, σ) due spazi topologici. Sia $f : X \to Y$ una applicazione. f si dice* continua *in x se $\forall\ V(f(x))$, $\exists\ U(x)$ per cui*

$$f(U) \subseteq V$$

f si dice continua in X *se è continua in ogni punto di X.*

Osservazione 1.5.2. Equivalentemente, si può dire che f è continua in x se, $\forall V(f(x))$, $f^{-1}(V)$ è intorno di x.

Ma, ormai ci siamo abituati, se si può definire un'idea usando gli intorni, dev'esserci una maniera equivalente di caratterizzarla tramite gli aperti:

Teorema 1.5.3. *Siano (X, τ) e (Y, σ) due spazi topologici e $f : X \to Y$ è continua in X* se e solo se*, per ogni aperto $V \subseteq \sigma$, $f^{-1}(V)$ è aperto in X.*

Dimostrazione.

⇒) Cioè, vogliamo che la controimmagine di un aperto sia ancora un aperto. Sia allora $x \in f^{-1}(V)$ con V aperto. Siccome V è intorno di $f(x)$, per la continuità di f si ha che $\exists U(x)$ per cui $f(U) \subseteq V$; ma ciò vuol dire che

$$f^{-1}(V) \subseteq \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U(x) \subseteq f^{-1}(V)$$

e quindi $f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U(x)$ che è, appunto, un aperto.

⇐) Supponiamo adesso che la controimmagine di ogni aperto di σ sia un aperto. Abbiamo allora che, $\forall f(x) \in Y$, $\exists V(f(x)) \in \sigma$ aperto; essendo aperto, in particolare, esso contiene $V(\mathring{f}(x))$ e quindi, fissato $x \in X$, abbiamo che $f(x) \subseteq V(\mathring{f}(x)) \subseteq V(f(x))$; allora, $f^{-1}(V(\mathring{f}(x)))$ è un aperto che contiene x. Possiamo adesso concludere perché siamo arrivati alla definizione di continuità, ovvero:

$$\forall V_{f(x)}, \exists f^{-1}(V(\mathring{f}(x))) : f(f^{-1}(V(\mathring{f}(x)))) \subseteq (V(\mathring{f}(x)) \subseteq V(x)$$

□

Osservazione 1.5.4. Altro fatto solito: il passaggio al complementare fornisce una proposizione equivalente, per cui f è continua se e solo se $\forall V \subseteq Y$ chiuso $f^{-1}(V)$ è un chiuso in X. Infatti, basta osservare che per le leggi di De Morgan vale

$$f^{-1}(V^c) = (f^{-1}(V))^c$$

Proposizione 1.5.5. *Siano (X, τ) e (Y, σ) spazi topologici, $f : X \to Y$ un' applicazione. f è continua $\Leftrightarrow$ $f : X \to f(X)$ è continua.*

Dimostrazione.

⇐) Ovviamente, $\forall y \in Y \setminus f(X)$, $\nexists x \in X$ per cui $y = f(x)$, e la definizione di continuità è vera a vuoto.

$\Rightarrow$) Se f è continua su tutto Y, lo è in particolare sulla sua immagine.

□

Vediamo ora che la continuità è preservata dalla composizione: useremo questo risultato costantemente.

Teorema 1.5.6. (Composizione) *Siano (X, τ), (Y, σ) e (Z, η) tre spazi topologici. Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ applicazioni continue. Allora anche $g \circ f : X \to Z$ è continua.*

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che preso $x \in X$ per cui $f(x) = y$, $g(y) = z$, $\forall W(z) \subseteq Z$, $\exists U(x)$ per cui $g(f(U(x))) \subseteq W(z)$. Ma questo è ovvio perché, per la continuità di g, $g^{-1}(z)$è un intorno di y. Inoltre per la continuità di f, $f^{-1}(g^{-1}(z))$ è un intorno di x, da cui la tesi. □

Caratterizziamo, infine, tramite il concetto di continuità, il limite di una funzione:

Definizione 1.5.7. *Siano (X, τ) e (Y, σ) due spazi topologici. Sia $T \subseteq X$ e $f : T \to Y$ una funzione. Inoltre sia $x_0 \in X$ punto di accumulazione per T. Si pone allora*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in Y$$

se la funzione

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in T \setminus \{x_0\} \\ \ell & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

è continua in x_0; tale definizione è analoga a dire che, $\forall V(\ell)$, $\exists U(x_0)$ per cui $F((U \cap T) \setminus \{x_0\}) \subseteq V$.

1.6 Limiti e Successioni

In questo paragrafo, siamo interessati a sfruttrare le *successioni* che, lo ricordiamo, sono funzioni aventi come dominio l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali[6], per fornire caratterizzazioni equivalenti dei concetti finora introdotti. Si avrà modo di osservare, andando avanti nelle dimostrazioni, come questo modo di guardare ad essi sia, spesso, il più utile. Iniziamo specializzando alle successioni la nozione di limite, e dimostrandone l'unicità nel caso di spazi separati.

Definizione 1.6.1. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia (x_n) una successione a valori in X. Si dice che ℓ è il* limite *di (x_n) se, $\forall V(\ell)$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ per cui $\forall n \geq n_0$ $(x_n) \subseteq V$*

Proposizione 1.6.2. *Sia (X, τ) uno spazio topologico di Hausdorff. Allora, se il limite di (x_n) a valori in X esiste, è unico.* ♢ 9

Dimostrazione. Per gli assiomi di spazio topologico di Hausdorff, sappiamo che $\forall x, y$ con $x \neq y$, $\exists U(x), V(y)$ disgiunti. Supponiamo allora per assurdo che (x_n) abbia due limiti diversi ℓ e ℓ', allora definitivamente[7] (x_n) appartiene sia ad $U(x)$ e $V(y)$, quindi $(x_n) \subseteq U(x) \cap V(y)$, il che è appunto un assurdo perché i due intorni sono disgiunti. □

[6] Il codominio, in generale, sarà un qualsiasi spazio topologico.

[7] Dicendo che un predicato vale *definitivamente*, intendiamo che $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che esso è vero $\forall n \geq n_0$

Teorema 1.6.3. *Sia (X, τ) uno spazio topologico primo numerabile. Allora:*

i. *Un punto $x \in X$ è aderente a $T \subseteq X$* se e solo se $\exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *a valori in T e che il suo limite sia x.*

ii. *Un punto $x \in X$ è a $T \subseteq X$* se e solo se $\exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *a valori in $T \setminus \{x\}$ e che il suo limite sia x*

iii. *Un insieme C è chiuso* se e solo se *è chiuso er successioni, ovvero che* $\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$ *convergente ad un certo limite ℓ, $\ell \in C$*

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che, data $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, una numerazione degli elementi di un sistema fondamentale di intorni di un punto $x \in X$, e posto:

$$W_k = \bigcap_{i=0}^{k} U_i$$

Allora anche i W_k formano un sistema fondamentale di intorni, e vale che: $W_0 \supseteq W_1 \supseteq \cdots \supseteq W_k \supset \cdots$ Ciò ci permette di dimostrare il teorema.

i. $\Rightarrow$) Se $x \in \overline{T}$ allora $\forall k \geq 0$ abbiamo che $\exists x_i \in W_k(x) \cap T$ e quindi, definitivamente, la successione costruita con gli x_i è contenuta in un intorno di x, $(x_n) \to x$.

$\Leftarrow$) Viceversa supponiamo che x sia il limite di una successione (x_n) a valori in T. Allora definitivamente la successione $(x_n) \subseteq W_k$, $k \in \mathbb{N}$; da ciò, $T \cap W_k(x) \neq \emptyset$ e quindi $x \in \overline{T}$.

ii. Analoga alla precedente.

iii. $\Rightarrow$) Supponiamo che C sia un chiuso e che (x_n) sia una successione a valori in C convergente ad un certo limite ℓ. È chiaro che o $\ell \in C$ oppure $\ell \in C^c$. Ma se fosse $\ell \in C^c$, che è aperto, ℓ non potrebbe essere un punto aderente per C, il che è assurdo per quanto già detto.

$\Leftarrow$) Ovviamente sappiamo che, se ℓ è il limite di una successione a valori in C, $\ell \in \overline{C}$: pertanto, essendo $\ell \in C$, $\overline{C} \subseteq C$; l'altra inclusione, che è ovvia, fornisce l'uguaglianza di C con la sua chiusura, il che dimostra la tesi.

□

Osservazione 1.6.4. Se viene meno l'ipotesi che X sia primo numerabile le implicazioni del teorema valgono solo in un senso. Nello specifico,

i. Un punto $x \in X$ è aderente a $T \subseteq X$ **se** $\exists$ (x_n) a valori in T e che il suo limite sia x.

ii. Un punto $x \in X$ è di accumulazione per $T \subseteq X$ **se** $\exists$ (x_n) a valori in $T \setminus \{x\}$ e che il suo limite sia x

iii. Un insieme C è chiuso **solo se** è chiuso per successioni, ovvero $\forall\ (x_n) \subseteq C$ convergente ad un certo limite ℓ, $\ell \in C$.

Teorema 1.6.5. *Siano (X,τ) e (Y,σ) due spazi topologici.*

i. Sia (x_n) una successioni a valori in X convergente ad $\overline{x}$. Allora se $f : X \to Y$ è continua, la successione (x_n) converge ad $f(\overline{x})$

ii. Se (X,τ) è un primo numerabile, allora $f : X \to Y$ è continua se e solo se $\forall (x_n)$ *convergente a $\overline{x}$, $(f(x_n))$ converge ad $f(\overline{x})$.*

Dimostrazione.

i. Preso $V(f(\overline{x}))$ si ha, per la continuità di f, che $\exists U(\overline{x})$ per cui definitivamente la successione convergente a $\overline{x}$ è contenuta in U. Allora, definitivamente, si ha che $(f(x_n)) \subseteq V(f(\overline{x}))$.

ii. In questo caso vale anche l'altra implicazione. Infatti, supponiamo per assurdo che f non sia continua in $\overline{x}$; allora, comunque scelto un intorno $U(\overline{x})$, $\nexists\ V(f(\overline{x}))$ per cui $f(U) \subseteq V$. Prendiamo quindi una base di intorni $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, e recuperiamo la costruzione dei $W_k(x)$ fatta all'inizio del teorema precedente. È facile vedere che presa la successione $\underline{(x_n)}$ tale che $\forall n$, $x_n \in W_n$, (x_n) converge a $\overline{x}$, mentre $f(x_n)$ non può convergere a $f(\overline{x})$.

□

1.7 Connessione

Definizione 1.7.1. *Uno spazio topologico (X,τ) si dice* connesso *se non è unione disgiunta di due aperti non vuoti, i.e. se, $\forall A, B \neq \emptyset$ aperti in τ t.c. $A \cup B = X$, $A \cap B \neq \emptyset$; altrimenti, si dice* sconnesso. *Inoltre, $T \subseteq X$ si dice connesso se è connesso con la topologia indotta.*

In effetti, questa importante proprietà non fa altro che tradurre l'idea intuitiva che abbiamo di uno spazio fatto "di un solo pezzo": essa garantisce, infatti, che, comunque cerchiamo di spezzare in due il nostro spazio, non possiamo evitare di avere dei punti in cui le due parti sono attaccate. È facile vedere che

Proposizione 1.7.2. *Se (X,τ) è uno spazio topologico, sono equivalenti:*

i. X è connesso;

ii. $\forall C, D \neq \emptyset$ chiusi in X tale che $A \cup B = X$, $A \cap B \neq \emptyset$;

iii. $\forall A \in \tau$ aperto, $A \notin \{\emptyset, X\}$, $X \setminus A \cap \partial(X \setminus A) \neq \emptyset$;

iv. gli unici elementi di τ sia aperti che chiusi sono X e $\emptyset$.

v. le uniche funzioni continue da X in $(\{0,1\}, \tau_{\text{disc}})$ sono quelle costanti.

Dimostrazione. A parte osservare che la *iii.* è forse ancora più vicina all'idea intuitiva di connessione, dimostriamo solo *i.* $\Leftrightarrow$ *v.*, essendo le altre equivalenze banali.
$f : X \to \{0,1\}$ è continua $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(0)$ e $f^{-1}(1)$ sono aperti. Osservando che vale $X = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1)$ e $f^{-1}(0) \cap f^{-1}(1) = \emptyset$[8], si ottiene subito che X è connesso $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(0) = X$ o $f^{-1}(1) = X$; in caso contrario, la partizione di X in due aperti disgiunti e non vuoti lo renderebbe sconnesso. □

Da quest'ultima caratterizzazione della connessione, viene subito la

Proposizione 1.7.3. *Sia $f : X \to Y$ una funzione continua tra spazi topologici. Se X è connesso, lo è anche $f(X)$.*

Dimostrazione. Sia $g : f(X) \to \{0,1\}$ continua. Per il teorema di composizione, anche $g \circ f : X \to \{0,1\}$ lo è: allora è costante, essendo X connesso; nello specifico, quindi, g è costante, da cui la tesi.
In alternativa, senza usare la *prop. 1.4.2*, si supponga per assurdo che sia $f(X)$ sconnesso. Allora $f(X)$ è unione disgiunta di A', B' aperti non vuoti. Essendo f continua, $f^{-1}(A')$ e $f^{-1}(B')$ sono aperti non vuoti e disgiunti[9] la cui unione è, banalmente, X: cioè, X è sconnesso, contro l'ipotesi. □

Vediamo ora altre proprietà degli spazi connessi:

Proposizione 1.7.4. *Sia (X, τ) uno spazio topologico connesso. Allora*

a. se $T \subseteq X$ è connesso, lo è anche $\overline{T}$;

b. se $\{T_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è una famiglia di sottospazi connessi di X t.c. $\forall i \neq j, T_i \cap T_j \neq \emptyset$, anche $\bigcup_{i \in I} T_i$ è connessa.

Dimostrazione.
a. $f : T \to \{0,1\}$ continua è costante, diciamo $f(T) = 0$; e il fatto che i punti di $\overline{T} \setminus T$ siano di accumulazione per T implica che, $\forall \overline{y} \in \overline{T}$,
$$f(\overline{y}) = \lim_{y \to \overline{y}} f(y) = 0.$$
Perciò, f è costante anche su $\overline{T}$.

b. Consideriamo
$$f : \bigcup_{i \in I} T_i \to \{0,1\}$$
continua. Sappiamo che $f \restriction_{T_i}$ è costante $\forall i \in I$; inoltre, essendo gli T_i a due a due non disgiunti, e dovendo f assumere gli stessi valori sulle loro intersezioni per definizione di funzione, si ha che le $f \restriction_{T_i}$ sono a due a due coincidenti; vale a dire che f è costante.

□

[8] Il che segue dalla nota proprietà delle controimmagini di costituire una partizione del dominio.
[9] vd. nota precedente.

Diamo ora un nome ai "pezzi" connessi da cui il nostro spazio è composto; il modo più semplice per farlo è il seguente:

Definizione 1.7.5. *Sia* (X, τ) *uno spazio topologico. Preso* $x \in X$*, e detta* $\mathcal{T}(x) = \{T \subseteq X \mid T \ni x, T \text{ connesso}\}$*, si definisce*

$$\mathscr{C}_x = \bigcup_{T \in \mathcal{T}(x)} T$$

la componente connessa *di* x*.*

Chiaramente, essa non è mai vuota, essendo $\{x\}$ connesso, e coincide col più grande connesso contenente x. Si vede poi subito che è chiusa, per il fatto (*prop. 1.4.5.a*) che la chiusura di un connesso è connessa. Inoltre

Proposizione 1.7.6. *La famiglia* $\{\mathscr{C}(x)\}_{x \in X}$ *delle componenti connesse dei punti di* X *forma una partizione di* X*.*

Dimostrazione. Che ognuno dei $\mathscr{C}(x)$ non sia vuoto l'abbiamo visto; inoltre, è evidente che $\bigcup_{x \in X} \mathscr{C}(x)$, contenendo $\bigcup_{x \in X} \{x\}$, sia uguale a X. Infine, se $\mathscr{C}(x) \cap \mathscr{C}(x') \neq \emptyset$ per qualche x, x', $\mathscr{C}(x) \cup \mathscr{C}(x')$ è connessa (*prop. 1.4.5.b*), e contenuta per definizione in $\mathscr{C}(x), \mathscr{C}(x')$; ma allora dev'essere per forza $\mathscr{C}(x) = \mathscr{C}(x')$. □

Nel caso limite, cioè quando $\mathscr{C}(x) = \{x\}$ $\forall x \in X$, diciamo che X è *totalmente sconnesso*.

1.8 Connessione per archi

Un altro modo intuitivo di percepire uno spazio connesso è attribuirgli la proprietà che, presi due suoi punti qualsiasi, esista un modo per raggiungere uno dei due a partire dall'altro; in altri termini, un *cammino* che li connetta. Vogliamo esplicitare questa intuizione: per farlo, ci serviremo della

Definizione 1.8.1. *Sia* (X, τ) *uno spazio topologico. Una* curva *di* X *è un'applicazione continua* $\gamma : \mathbb{R} \to X$*;* $f(X)$ *si dice* sostegno *della curva. Se essa è definita su un chiuso* $[a, b]$*,* $f(a)$ *e* $f(b)$ *sono i suoi* estremi*; inoltre, se* $f \restriction_{[a,b)}$ *è iniettiva, la curva è* semplice*; se poi vale* $f(a) = f(b)$*, la curva si dice* chiusa.[10]
In particolare, diciamo arco *o* cammino *di* X *una curva* $p : [0, 1] \to X$*.*

Ora possiamo dare forma al concetto che vogliamo esprimere:

Definizione 1.8.2. *Uno spazio topologico* (X, τ) *si dice* connesso per archi *se,* $\forall x, y \in X$*,* ♢ **10**
esiste un arco di X *di estremi* x *e* y *.* ♢ **11**

Come c'era da aspettarsi, la connessione e la connessione per archi hanno una relazione ben precisa, nel senso che

[10]Ci si prenda un attimo per convincersi che questa definizione è coerente con l'immagine di "curva" che l'intuito fornisce.

Proposizione 1.8.3. *Se uno spazio topologico (X, τ) è connesso per archi, allora è connesso.*

Dimostrazione. Supponiamo non lo sia; allora è unione disgiunta di A, A' aperti non vuoti. Prendiamo quindi due punti $x \in A, x' \in A'$ e l'arco γ che li congiunge (tale cioè che $\gamma(0) = x, \gamma(1) = x'$). Essendo A, A' anche chiusi, le intersezioni $\gamma([0,1]) \cap A, \gamma([0,1]) \cap A'$ sono chiuse, non vuote, disgiunte nella topologia indotta da X su $\gamma([0,1])$. Cioè, $\gamma([0,1])$ è sconnesso: peccato solo che $[0,1]$ sia connesso in $\mathbb{R}$[11], e γ sia continua per definizione, e mandi perciò connessi in connessi. $\square$

Non solo: se definiamo, anche per la connessione per archi, le componenti connesse, in modo che

Definizione 1.8.4. *Per ogni $x \in X$, con (X, τ) spazio topologico, si dice* componente connessa per archi *l'insieme $\mathscr{C}_P(x) = \{y \in X \mid \exists\ \gamma$ arco con $\gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y\}$.*

è un interessante esercizio verificare che vale la

Proposizione 1.8.5. *In uno spazio topologico (X, τ), ogni componente connessa $\mathscr{C}(x)$ è unione disgiunta delle componenti connesse per archi (distinte) $\mathscr{C}_P(y)$ con $y \in \mathscr{C}(x)$.*

Gli esempi a fine capitolo mostrano, però, che non necessariamente uno spazio con- ♢ **12**
nesso lo è per archi: in altre parole, la connessione per archi è *strettamente* più forte della connessione. Almeno, in generale: scopriremo infatti che, in spazi "sufficientemente regolari", le due accezioni saranno in effetti equivalenti.

1.9 Compattezza

Definizione 1.9.1. *Una famiglia $\{A_i\}_{i \in I}$ di sottoinsiemi di X tale che $\bigcup_{i \in I} A_i = X$ si dice un* ricoprimento *di X. Con termini prevedibili, esso è* aperto *se i suoi elementi sono aperti,* finito *se è finita la sua cardinalità.*
Dato un ricoprimento $\mathcal{A}$ di X, una sua sottofamiglia che è ancora un ricoprimento di X si dice sottoricoprimento, ricoprimento estratto *da $\mathcal{A}$.*

Introduciamo questo concetto perché esso ci permette di dare una caratterizzare un'altra proprietà fondamentale degli spazi topologici:

Definizione 1.9.2. *Uno spazio topologico (X, τ) si dice* compatto *se ogni suo ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito; cioè, esplicitamente, se $\forall \mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ ricoprimento aperto di X, $\exists \{A_1, A_2, ..., A_n\} \subseteq \mathcal{A}$ tali che $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = X$.*
Inoltre, un sottoinsieme $T \subseteq X$ è compatto se lo è nella topologia indotta.

Diamo innanzitutto delle formulazioni equivalenti di compattezza, di immediata verifica:

Proposizione 1.9.3. *Se (X, τ) è uno spazio topologico, le seguenti proprietà sono equivalenti:*

[11] Si veda, per convincersene, l'esempio ...; la generalizzazione di questo fatto è dimostrata in ...

i. *X è compatto;*

ii. *per ogni famiglia di chiusi $\mathcal{C} = \{C_j\}_{j\in J}$ tale che ogni sua sottofamiglia finita $\{C_1, C_2, ..., C_n\}$ ha $C_1 \cap C_2 \cap ... \cap C_n \neq \emptyset$ ha $\bigcap_{j\in J} C_j \neq \emptyset$;*

iii. *per ogni famiglia di chiusi $\mathcal{C} = \{C_j\}_{j\in J}$ tale che $\bigcap_{j\in J} C_j = \emptyset$, esiste una sottofamiglia finita $\{C_1, C_2, ..., C_n\}$ con $C_1 \cap C_2 \cap ... \cap C_n = \emptyset$.*

Dimostrazione.
i.⇔*iii.* per passaggio al complementare;
ii.⇔*iii.* per passaggio alla contronominale. □

Passiamo ora a vedere le proprietà degli spazi compatti: in particolare, ci interessa come essi si comportano rispetto ai chiusi e alla continuità.

Teorema 1.9.4. *Sia (X, τ) uno spazio topologico. Allora:*

i. *Se (X, τ) è di Hausdorff e $T \subseteq X$ è compatto, allora T è chiuso.*

ii. *Se (X, τ) è compatto, ogni suo sottoinsieme chiuso è compatto.*

Dimostrazione.

i. Dimostriamo che, nelle ipotesi date, se T non è chiuso allora non è compatto. Consideriamo $x \in \overline{T} \setminus T$, che esiste perché T non è chiuso; poiché X è separato, per ogni $y \in T$ esistono $V(y)$ e $U(x)$ intorni aperti per cui $V(y) \cap U(x) = \emptyset$. Evidentemente, $\{V(y)\}_{y\in Y}$ costituiscono un ricoprimento aperto di T. Supponiamo che, per assurdo, esista un ricoprimento finito $\{V(y_1), V(y_2), \cdots, V(y_n)\}$ e sia $U = U_1(x) \cap U_2(x) \cap \cdots \cap U_n(x)$ dove gli U_j sono i corrispettivi disgiunti dei $V(y_j)$. Allora in quanto intersezione finita di aperti U è un intorno aperto di x disgiunto da $\bigcup_{i=0}^{n} V(y_i) = T$; cioè $U \cap T = \emptyset$, il che è assurdo perché $x \in T$.

ii. Sia (X, τ) compatto e T chiuso in X. Prendiamo un ricoprimento aperto di T, diciamo $\{A_i\}_{i\in I}$; In particolare, allora, $\{X \setminus T\} \cup \{A_i\}_{i\in I}$ è un ricoprimento aperto di X. Ma X è compatto, per cui da esso si può estrarre un sottoricoprimento finito; di qui, se abbiamo l'accortezza di togliere $X \setminus T$ dal sottoricoprimento ottenuto, si ottiene la tesi.

□

Teorema 1.9.5. *Sia $f : X \to Y$ continua tra (X, τ) e (Y, σ) spazi topologici. Allora se $T \subseteq X$ è compatto in X, $f(T)$ è compatto in Y.*

Dimostrazione. Sia $\{A_i\}_{i\in I}$ un sottoricoprimento aperto di $f(T)$. Allora $\{f^{-1}(A_i)\}_{i\in I}$ è un sottoricoprimento di T, per cui ne esiste uno finito. Cioè

$$\begin{aligned} f(T) &\subseteq f(f^{-1}(A_{i_1}) \cup f^{-1}(A_{i_2}) \cup \cdots \cup f^{-1}(A_{i_n})) \\ &= f(f^{-1}(A_{i_1})) \cup f(f^{-1}(A_{i_2})) \cup \cdots \cup f(f^{-1}(A_{i_n})) \\ &= A_{i_1} \cup A_{i_n} \cup \cdots \cup A_{i_n} \end{aligned}$$

□

Teorema 1.9.6. *Infine, vediamo la forma generale, per gli spazi topologici, di un teorema molto noto:* (BOLZANO-WEIERSTRASS) *Ogni sottoinsieme T infinito di (X, τ) compatto ammette un punto di accumulazione.*

Dimostrazione. Se, per assurdo, non esiste alcun punto di accumulazione per T, $\forall x \in X$ $\exists U(x)$ aperto tale che sia $U(x) \cap X \subseteq \{x\}$. Ma, è evidente, $\{U(x)\}_{x \in X}$ è un ricoprimento aperto di X; essendo X compatto ne esiste un sottoricoprimento finito

$$\bigcup_{k=1}^{n} U_k(x) \cap T \subseteq \{x_1, \cdots, x_n\}$$

Cioè, $T \subseteq \{x_1, \cdots, x_n\}$ contro l'ipotesi che T sia infinito. □

Tutte le proprietà viste finora ci inducono a dire che la compattezza di uno spazio traduca, in qualche modo, l'idea intuitiva che i suoi punti non siano "troppo dispersi". La seguente definizione sembra esprimere lo stesso concetto:

Definizione 1.9.7. *Uno spazio (X, τ) è* compatto per successioni *(o* sequenzialmente compatto*) se, ogni successione (x_n) a valori in X ammette una sottosuccessione (x_{n_k}) convergente.*

Tuttavia - la notizia non giungerà inaspettata - le due caratterizzazioni non sono affatto equivalenti: esistono, cioè, spazi compatti per ricoprimenti non compatti per successioni e viceversa. La categoria di spazi topologici che introdurremo fra non molto, però, contribuirà a sanare tale discrasia.

1.10 Omeomorfismi e spazi omeomorfi

Come ogni classe di oggetti matematici che si rispetti, anche tra gli spazi topologici è essenziale definire un particolare concetto di "uguaglianza": vale a dire che, come per le strutture algebriche, ci interessa chiarire quando due spazi siano *isomorfi*, cioè praticamente identici, sovrapponibili, intercambiabili, per ogni proprietà che coinvolga le loro topologie. Anche intuitivamente, ci aspettiamo che questo accada quando uno spazio si possa ottenere da un altro evitando strappi o rotture. Siccome la nozione che garantisce una "deformazione senza strappi" è la continuità, otteniamo

Definizione 1.10.1. *Dati $(X, \tau), (Y, \sigma)$ spazi topologici, si dice* omeomorfismo *(o* isomorfismo topologico*) tra X e Y un'applicazione $f : X \to Y$ con le seguenti proprietà:*

i. *f è continua;*

ii. *f è bigettiva;*

iii. *$f^{-1} : Y \to X$ è continua.* ♢ **13**

Nel caso in cui una f siffatta esista, X e Y si dicono omeomorfi.

Osservazione 1.10.2. La richiesta *iii.* è essenziale: non è cioè affatto vero che l'inversa di una bigezione continua sia anch'essa continua. Ci si aspetterà, ormai, di sentirsi dire che, se gli spazi sono il frutto di una mente assai poco perversa, l'affermazione diventa invece vera.

Non vogliamo addentrarci troppo nello studio degli omeomorfismi, che va ben oltre l'obiettivo di queste dispense: vale la pena, però, isolare la seguente

Proposizione 1.10.3. *Se due spazi topologici* $(X, \tau), (Y, \sigma)$ *sono omeomorfi, allora*

a. X *è connesso se e solo se lo è* Y*;*

b. X *è compatto se e solo se lo è* Y*;*

c. X *è separato se e solo se lo è* Y*.*

Dimostrazione. I punti *a.* e *b.* seguono immediatamente dal fatto che una funzione continua manda connessi in connessi e compatti in compatti.
Veniamo al punto *c.*, dimostrando che X compatto $\Rightarrow Y$ compatto. Sia f l'omeomorfismo tra X e Y: in particolare, f^{-1} è continua e iniettiva. Siano allora $x, y \in Y$ due punti distinti: per ipotesi, $f(x) \neq f(y)$ esistono due aperti $A \ni f(x), B \ni f(y)$ di X tali che $A \cap B = \emptyset$. Per la continuità di f, le loro controimmagini $f^{-1}(x), f^{-1}(y)$ sono aperte, e chiaramente disgiunte, da cui la tesi. L'implicazione simmetrica si ottiene considerando f al posto di f^{-1}. □

Per il fatto che due spazi omeomorfi si comportano necessariamente allo stesso modo rispetto a connessione, compattezza, separazione, diciamo che queste proprietà sono *invarianti topologici*; come è facile immaginarsi, ce ne sono molti altri. È altrettanto immaginabile che esse non sono invarianti *completi*: non tutti gli spazi connessi, o compatti, o di Hausdorff, cioè, sono omeomorfi.

1.11 Prodotto di spazi topologici

In ultima analisi, risulta interessante chiedersi se, presi due spazi topologici, diciamo (X, τ), (Y, σ), sul loro prodotto cartesiano $X \times Y$ si possa indurre una topologia. In effetti la risposta è sì, e si trova che il modo più utile per farlo è imporre che le proiezioni canoniche dal prodotto agli insieme di partenza siano continue. Cioè, preso un punto $(x, y) \in X \times Y$, consideriamo due intorni aperti $U(x)$ e $V(y)$: imporre la continuità delle proiezioni equivale a richiedere che siano aperti

$$\pi_X^{-1}(U(x)) = U \times Y \pi_Y^{-1}(V(y)) = X \times V$$

Diamo allora la seguente

Definizione 1.11.1. *Siano* (X, τ)*,* (Y, σ) *due spazi topologici. Si definisce* topologia prodotto *su* $X \times Y$ *la famiglia*

$$\tau \times \sigma = \{U \times V : U \in \tau, V \in \sigma\}$$

Allora, da come abbiamo costruito la topologia, segue immediatamente il

Teorema 1.11.2. *Sia* (Z, η) *un ulteriore spazio topologico.* $g : Z \to X \times Y$ *è continua se e solo se sono continue* $\pi_X \circ g$ *e* $\pi_Y \circ g$*, dove* $\pi_X : X \times Y \to X$ *e* $\pi_Y : X \times Y \to Y$ *sono le proiezioni canoniche.*

Osservazione 1.11.3. Come al solito, il procedimento si può iterare ad un numero finito di spazi topologici.

Vediamo ora come la topologia prodotto si comporta rispetto a connessione e compattezza.

Teorema 1.11.4. *i. Se (X, τ) e (Y, σ) sono connessi, allora $(X \times Y, \tau \times \sigma)$ è connesso.*

ii. Se (X, τ) e (Y, σ) sono compatti, allora lo è anche $(X \times Y, \tau \times \sigma)$ è compatto.

Dimostrazione.

i. Segue dalla definizione di connessione e della topologia prodotto (supponiamo che esistano due aperti disgiunti la cui unione è l'intero prodotto, allora per continuità delle proiezioni le loro controimmagini$\cdots$).

ii. Sia $\{A_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $X \times Y$. Per ogni coppia $(x, y) \in X \times Y$ si scelga $A_{(x,y)} \in \{A_i\}_{i \in I}$ che contenga la coppia (x, y), a sua volta ogni $A_{(x,y)} \supseteq U(x) \times V(y)$ intorni aperti, contenuti rispettivamente nelle topologie τ e σ.
Per ogni $x \in X$ abbiamo che $\{V_y\}_{y \in Y}$, ricoprimento aperto di Y, ammette un sottoricoprimento finito. Ponendo $U^{'}(x) = U_1(x) \cap \cdots U_n(x)$, un intorno di x, si ha che:

$$U^{'}(x) \times Y = \bigcup_{j=1}^{n} U^{'}(x) \times V(y_j) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U^{'}(x_j) \times V(y_j) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} A(x, y_j)$$

Lavorando analogamente per ogni $y \in Y$ otteniamo che

$$X \times Y \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n_k} A(x_k, y_{y,k})$$

E quindi abbiamo così trovato un sottoricoprimento finito per $X \times Y$.

□

Osservazione 1.11.5. Così, induttivamente, possiamo estendere il ragionamento al prodotto finito di spazi compatti. In realtà, a patto di ammettere l'assioma della scelta, il risultato si estende al prodotto di una famiglia arbitraria di compatti: tale estensione è uno dei più importanti teoremi della topologia generale, il *Teorema di Tychonoff*, che peraltro all'assioma di scelta è proprio equivalente. Come si immaginerà, di esso non esiste alcuna dimostrazione che possa essere riportata in queste pagine senza correre il rischio di esagerare con fatti che, con l'analisi, c'entrano poco.

Ma c'è di più: vale anche il viceversa, la cui dimostrazione è un utile esercizio.

Proposizione 1.11.6. *Siano (X, τ) e (Y, σ) spazi topologici il cui prodotto è compatto, allora anche X e Y sono compatti.*

1.12 ♢ Esempi ♢ e Complementi

♢ **1** Vediamo esempi significativi di topologie su un insieme X: **T 1.1.1**

a. $\tau_{ban} = \{X, \emptyset\}$ é la topologia *banale*, o *indiscreta*: distingue solo l'intero spazio dal vuoto;

b. all'estremo opposto, $\tau_{disc} = \mathcal{P}(X)$ è la topologia *discreta*, in cui ogni sottoinsieme (equivalentemente, ogni punto) di X è aperto;

c. $\tau_{cof} = \{\emptyset\} \cup \{T \subseteq X \mid X \setminus T \text{ è finito}\}$ è la topologia *cofinita*, in cui un insieme è aperto se e solo se è vuoto o il suo complementare è finito: è chiaro che, su insiemi finiti, coincide con la topologia discreta.

In generale, quindi, un insieme è dotato di numerose topologie: in particolare, potremmo volerle classificare in base all'accuratezza con cui suddividono l'insieme. Diciamo allora che una topologia τ su X è *più fine* di un'altra, chiamiamola υ, quando è un suo sovrainsieme (e τ contiene quindi tutti gli aperti di υ più altri): otteniamo così che la famiglia delle topologie di X è parzialmente ordinata da questa inclusione: nello specifico, la meno fine di tutte è la topologia banale, la più fine è quella discreta.

♢ **2** Citiamo anche topologie notevoli su un insieme specifico a noi più familiare, $\mathbb{R}$: **T 1.1.1**

a. $\tau_{eu} = \{\bigcup_{i \in I} U_i \subseteq \mathbb{R} \mid \forall i \in I \ \exists a, b \in \mathbb{R} \text{ per cui } U_i = (a, b)\}$ si dice topologia *euclidea* su $\mathbb{R}$, in cui gli aperti sono proprio le unioni arbitrarie di intervalli aperti: tale topologia, che estenderemo poi a $\mathbb{R}^n$, sarà alla base del nostro studio di questi spazi;

b. $\tau_+ = \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$ è la topologia della *semicontinuità inferiore*: come si vede, i suoi aperti sono le semirette destre della retta reale;

c. chissà come mai si definirà τ_-, la topologia della *semicontinuità superiore*.

♢ **3** Così, ad esempio, la topologia cofinita su un insieme X è quella i cui chiusi sono tutti e soli i sottoinsiemi finiti di X; la topologia euclidea di $\mathbb{R}$, invece, è determinata dall'avere come chiusi tutti e soli gli intervalli chiusi. **T 1.1.2**

♢ **4** Dati $A, B \subseteq X$, valgono le seguenti relazioni tra le loro chiusure: **T 1.1.7**

i. $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$;

ii. $\overline{A} \cap \overline{B} \supseteq \overline{A \cap B}$

È facile ottenere, da esse, le corrispondenti relazioni tra $\mathring{A}$ e $\mathring{B}$.

♢ **5** Sono spazi di Haussdorf **T 1.3.3**

i. qualsiasi insieme X con la topologia discreta, essendo, $\forall x, y \in X$, $\{x\}$ e $\{y\}$ intorni di x, y e valendo, chiaramente, $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$;

ii. $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea;

Non sono invece separati

i. qualsiasi insieme X con più di due elementi dotato della topologia indiscreta;

ii. qualsiasi insieme infinito con la topologia cofinita;

iii. $(\mathbb{R}, \tau_+)$ ed $(\mathbb{R}, \tau_-)$ essendo, $\forall A, A'$ aperti in una delle due topologie, $A \subseteq A'$ o viceversa.

♢ **6** i. Una base della topologia discreta su un insieme X è l'insieme $\mathcal{B} = \{\{x\} \in \mathcal{P}(X) \mid x \in X\}$; **T 1.4.1**

ii. Una base di intorni per ogni punto $x \in \mathbb{R}$ è $\mathcal{B}_{eu}(x) = \{(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$

♢ **7** Molti spazi topologici sono primi numerabili; banalmente, lo è ogni insieme X con la topologia discreta: $\forall x \in X$ una base di $\mathscr{I}_x$ è il solo $\{x\}$; vedremo poi, in particolare, che lo sono tutti gli *spazi metrici*. **T 1.4.3**
Ma non lo sono tutti; ad esempio, un insieme X più che numerabile dotato della topologia cofinita non è mai primo numerabile.

♢ **8** Lo si immaginerà, se uno spazio è secondo numerabile, allora è anche primo numerabile: infatti, si può scegliere dall'intera famiglia dei suoi aperti una quantità numerabile di essi, diciamo $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, perché ognuno degli aperti contenga almeno uno degli A_i. Ma allora, essendo gli intorni di *un unico punto* x nello spazio sovrainsiemi di aperti, a maggior ragione tale condizione varrà per essi. **T 1.4.3**
Inoltre, uno spazio secondo numerabile è forzato a essere "abbastanza piccolo": infatti, dato (X, τ) secondo numerabile, dev'essere $|\tau| \leq |\mathbb{R}|$.
Con questo risultato in mente, è facile trovare uno spazio che sia primo numerabile ma non secondo numerabile.

♢ **9** Se X non è separato, l'unicità del limite è in generale falsa. Un esempio è dato da $\mathbb{R}$ con la topologia τ_+ della semicontinuità inferiore: quali sono, in questo caso, i possibili valori di **T 1.6.2**

$$\lim_{x\to 0} x^2?$$

♢ **10** Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il suo grafico $\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}$ è connesso per archi. **T 1.8.2**

♢ **11** Sono connessi per archi **T 1.8.2**

i. $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$;

ii. il sottospazio di $\mathbb{R}^2$ formato dai dischi $\{(x - k)^2 + y^2 \leq 1\}$, con $k \in \mathbb{Z}$.

♢ **12** L'esempio classico di spazio connesso, ma non connesso per archi è il cosiddetto *seno del topologo*: in $\mathbb{R}^2$, è l'insieme $\mathcal{S} = \{(x, sin(\frac{1}{x})) \mid x > 0\} \cup \{(0, y) \mid |y| \leq 1\}$. Infatti **T 1.8.5**

$\mathcal{S}$ *è connesso.* Cioè, se $f : \mathcal{S} \to \{0, 1\}$ è continua, allora è costante. Ma i pezzi che abbiamo unito, essendo grafici di funzioni reali di variabile reale, sono connessi: allora, f è costante su ciascuno di essi. È anche vero che ogni punto del segmento verticale è di accumulazione per il grafico del seno: vale a dire, la sua immagine secondo f è uguale al limite dei valori che f assume sul grafico del seno, avvicinandosi al segmento: perciò, f non può che assumere sul segmento lo stesso valore.

$\mathcal{S}$ *non è connesso per archi.* Supponiamo lo sia: allora esiste un arco $\gamma : \mathbb{R} \supset [0, 1] \to \mathcal{S}$ tale che, fissati y sul segmento verticale e x sul grafico del seno, $\gamma(0) = (0, y)$, $\gamma(1) = (x, \sin(1/x)$. Ma γ è, per definizione, continuo, e dev'esserlo allora componente per componente: sia perciò, al variare di t, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, e prendiamo $y = 0$ e $x > 0$, da cui $sin(1/x) \neq 0$; allora, sia $y*$ l'ultimo valore per cui $gamma_2(y*) = 0$: è immediato notare che, per continuità, esso coincide con

$$\lim_{t \to y*^+} sin(1/t)$$

Peccato che questo limite, com'è noto, non esista.

♢ **13** L'ultima richiesta non è affatto superflua: si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \supset [0, 2\pi) \to \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ tale che $f(t) = (\cos t, \sin t)$; essa, lo si vede, è continua e bigettiva. Tuttavia, f^{-1} è discontinua in $(0, 1)$. D'altronde, un omeomorfismo tra i due spazi non potrebbe esistere: infatti, il primo è compatto, il secondo no. **T 1.10.1**

2 Spazi metrici

2.1 Prime definizioni

Introduciamo ora una nuova categoria di spazi, partendo da un altro concetto estremamente vicino all'intuito: un modo per distinguere i punti dello spazio è, banalmente, avere modo di dire *quanto due suoi punti siano lontani*. Diamo forma a quest'intuizione:

Definizione 2.1.1. *Su un insieme non vuoto X si può definire una* distanza $d : X \times X \to [0, \infty)$ *che gode delle seguenti tre proprietà:* ♢ **1**

i. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y\ \forall x, y \in X$ (non degenerazione)

ii. $d(x, y) = d(y, x)\ \forall x,y \in X$ (simmetria)

iii. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)\ \forall x,y,z \in X$ (disuguaglianza triangolare)

La coppia (X, d) con d che rispetta le precedenti proprietà si dice spazio metrico.

Uno spazio metrico è, quindi, uno spazio su cui sia definita una distanza. In esso, isoliamo innanzitutto i seguenti oggetti, che risulteranno fondamentali per il prosieguo:

Definizione 2.1.2. *Sia (X, d) uno spazio metrico. $\forall x_0 \in X$ e $\forall r > 0$, si definisce*

- palla aperta di centro x_0 e raggio r, *come* $B_r(x_0) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}$
- palla chiusa di centro x_0 e raggio r, *come*

$$\overline{B_r}(x_0) = \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}$$

- sfera di centro x_0 e raggio r, *come*

$$S_r(x_0) = \{x \in X : d(x_0, x) = r\}$$

La loro prima applicazione sta nella seguente proposizione, di verifica immediata, che mette in relazione spazi metrici e topologici, definendo i secondi come una specializzazione dei primi: questo vuol dire, in particolare, che tutti i risultati finora visti continuano a valere negli spazi metrici.

Proposizione 2.1.3. *Sia (X, d) uno spazio metrico. La distanza d induce su X una topologia, diciamo τ_d, che ha come aperti le unioni (anche vuote) delle palle di centro x_0 e raggio $r > 0$, al variare di $x_0 \in X$ e di $r \in \mathbb{R}$.*

In particolare, poi, non dovrebbe sorprendere che uno spazio metrico sia sempre separato; meno intuitivo, ma fondamentale, è che esso è sempre primo numerabile.

Proposizione 2.1.4. *Con la notazione appena usata,*

i. La topologia τ_d è di Hausdorff, e soddisfa il primo assioma di numerabilità.

ii. Dato $T \subseteq X$, $d \restriction_{T \times T}$ è una distanza per T e induce la topologia subordinata.

Dimostrazione.

i. Per dimostrare che la topologia definita come l'unione delle palle aperte è separata notiamo che, presi x e y con $x \neq y$, $d(x, y) = d_1 > 0$. Allora possiamo prendere per x e y le palle di raggio $\rho < \frac{d_1}{2}$: evidentemente esse sono disgiunte. Inoltre abbiamo che, preso $x \in X$, una base dei suoi intorni è $\{B_{\frac{1}{n}}(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

ii. Si tratta di una semplice verifica, che lasciamo per esercizio.

□

Infine, osserviamo che avere una disposizione una distanza ci consente di dire, in particolare, quanto sia esteso lo spazio in cui stiamo lavorando.

Definizione 2.1.5. *Sia (X, d) uno spazio metrico e $T \subseteq X$. Si definisce* diametro di T*:*

$$\delta(T) = \sup\{d(x, y) : x, y \in T\}$$

Si dice che T è limitato *se ha diametro finito.*

2.2 Funzioni continue e più che continue

Le definizioni di continuità e di limite che abbiamo dato per spazi topologici generali si specializzano, com'è noto, nel seguente modo in spazi metrici:

Proposizione 2.2.1. (Cauchy) *Siano $(X, d_X), (Y, d_Y)$ spazi metrici. Allora*

i. $f : X \to Y$ è continua in $x_0 \in X$ se e solo se $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ per cui, per ogni x con la proprietà che $d_X(x, x_0) < \delta$, $d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$; vale a dire che f è continua se e solo se $\forall \epsilon > 0$ e $\forall x \in X$, $\exists \delta > 0$ per cui, $\forall x_1 \in X$ tale che $d_X(x, x_1) < \delta$, $d_Y(f(x), f(x_1)) < \epsilon$;

ii. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ *se e solo se $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ per cui, per ogni x tale che $d_X(x, x_0) < \delta$, $d_Y(f(x), \ell) < \epsilon$.*

Tuttavia, il fatto di avere a disposizione il concetto di distanza ci induce a dar vita a forme più forti di continuità:

Definizione 2.2.2. *Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, e sia definita $f : X \to Y$. Si dice che*

i. f è uniformemente continua *(abbreviato,* U.C.*) se, a meno di prendere punti di X abbastanza vicini, la distanza tra le loro immagini è controllabile a piacere; vale a dire, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ per cui $\forall x, x_1 \in X$ tali che $d_X(x, x_1) < \delta$, $d_Y(f(x), f(x_1)) < \epsilon$;*

ii. f è continua secondo Hölder *o* hölderiana *se, presi punti* qualsiasi*, la distanza delle loro immagini si controlla, a meno di costante, con una potenza della loro distanza: cioè, $\exists C \in \mathbb{R}, \alpha \in (0, 1)$ tali che $\forall x, y \in X$, $d_Y(f(x), f(y)) \leq C d_X(x, y)^\alpha$;*

iii. *f è continua* secondo Lipschitz *o* lipschitziana *se, addirittura, è hölderiana con $\alpha = 1$, ovvero $\exists C \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x, y \in X$, $d_Y(f(x), f(y)) \leq C d_X(x,y)$; C si dice* costante di Lipschitz*.*

Per come le abbiamo definite, è chiaro il modo in cui esse sono in relazione l'una con l'altra: vale cioè la catena di implicazioni f lipschitziana $\Rightarrow$ hölderiana $\Rightarrow$ uniformemente continua $\Rightarrow$ continua[12]. Ha pure poco senso restringere ulteriormente l'hölderianità ad $\alpha > 1$: le uniche funzioni che rispetterebbero questa caratteristica sarebbero quelle costanti.
Il caso delle funzioni lipschitziane, invece, ha profonde conseguenze, e ci induce a darne caratterizzazioni ulteriori:

Definizione 2.2.3. *Siano (X, d_X), (Y, d_Y) spazi metrici.*

i. *Una funzione $f : X \to Y$ lipschitziana iniettiva la cui inversa sia anch'essa lipschitziana si dice* bilipschitziana*; equivalentemente, f è bilipschitziana se $\exists K \geq 1$ tale che $\forall x, y \in X$*
$$\frac{1}{K} d_X(x,y) \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq K d_X(x,y)$$

ii. *Una funzione $f : X \to Y$ lipschitziana con costante di Lipschitz uguale a 1 si dice un'*isometria *di X su $f(X)$: come si vede, essa conserva le distanze;*

iii. *Un'endofunzione $f : X \to X$ lipschitziana con costante di Lipschitz minore di 1 si dice invece una* contrazione *di X.*

Osservazione 2.2.4. Essendo la distanza tra due punti nulla se e solo se i due punti sono uguali, un'isometria è sempre iniettiva; in particolare, se è anche surgettiva, induce sui due spazi un vero e proprio *isomorfismo*, rendendo X e X' *metricamente isomorfi* o, più semplicemente, *isometrici*.

Notiamo che

Proposizione 2.2.5. *La distanza $d : X \times X \to (\mathbb{R}, d_{eu})$ su uno spazio metrico (X, d) è lipschitziana; in particolare, essa è continua.*

Dimostrazione. Prese due coppie di punti $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X \times X$, e considerando il punto (x_2, y_1) otteniamo, dalla disuguaglianza triangolare su $\mathbb{R}$,

$$|d(x_1, x_2) - d(y_1, y_2)| \leq |d(x_1, x_2) - d(x_2, y_1)| + |d(x_2, x_1) - d(y_1, y_2)|$$

Applicando poi a ognuno degli addendi al secondo membro la disuguaglianza triangolare su X, si ha

$$|d(x_1, x_2) - d(x_2, y_1)| + |d(x_2, x_1) - d(y_1, y_2)| \leq d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2)$$

che è proprio la distanza $d_{X \times X}((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ nello spazio prodotto. Ricompattando le disuguaglianze, si ottiene la tesi. □

[12] Si noti, in particolare, che le definizioni di continuità e continuità uniforme differiscono per la sola posizione dei quantificatori.

Lasciamo per esercizio la facile verifica che

Proposizione 2.2.6. *Dati due spazi metrici (X, d_X), (Y, d_Y), e prese due funzioni $f, g : X \to Y$ lipschitziane, è lipschitziana anche la loro composizione $g \circ f$.*

Diamo invece un'ultima definizione: per le basi di intorni, abbiamo fornito un modo di vedere quando due basi diverse generino la stessa topologia. Essendo le palle aperte nient'altro che intorni, essa si specializza facilmente alla topologia indotta da una distanza: cioè, due distanze d, d' su generano la stessa topologia su X se e solo se, in ogni punto $x_0 \in X$, per ogni palla $B_d(x_0)$ costruita con la prima distanza $\exists B_{d'}(x_0)$ costruita con la seconda tale che $B_{d'}(x_0) \subseteq B_d(x_0)$, e viceversa. Ci si convinca che tale considerazione equivale alla seguente

Definizione 2.2.7. *Due distanze d, d' su uno spazio X si dicono* (bilipschitz-)equivalenti *se la mappa identica $\iota : (X, d) \to (X, d')$ è bilipschitziana.*

2.3 Completezza

Una proprietà che sembra scontata, e che invece non è propria di tutti gli spazi metrici, è che tutte le successioni con la proprietà di Cauchy convergano. Certo, valgono i seguenti risultati:

Proposizione 2.3.1. *Se (x_n) è una successione di Cauchy che ammette una sottosuccessione convergente, allora converge.*

Dimostrazione. Prendiamo (x_{n_k}) sottosuccessione convergente di (x_n), e diciamone ℓ il limite: definitamente $(x_{n_k}) \subseteq B_{\frac{1}{n}(\ell)}$. Ma la successione originaria di Cauchy, vale a dire che, $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ per cui, $\forall n, n^{'} > n_0$, vale $d(x_n - x_{n^{'}}) < \epsilon$. Pertanto, in particolare per $\epsilon = \frac{1}{n}$, in ogni palla di centro ℓ troviamo punti di (x_n); allora anche la successione originaria converge a ℓ. □

Osservazione 2.3.2. Ogni successione convergente è di Cauchy.

Dimostrazione. Sia (x_n) una successione convergente ad un certo limite ℓ. Allora sappiamo che, definitivamente, $d(\ell, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$; in particolare $\forall n^{'} > n$ anche $d(\ell, x_{n^{'}}) < \frac{\epsilon}{2}$. Di qui, per la disuguaglianza triangolare,

$$d(x_{n^{'}}, x_n) \leq d(x_{n^{'}}, \ell) + d(\ell, x_n) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Per cui (x_n) è di Cauchy. □

Tuttavia, il viceversa può non essere vero: si pensi, banalmente, a $\mathbb{Q}$, e alla successione

$$x_n = \frac{\lfloor 10^n \pi \rfloor}{10^n}$$

delle approssimazioni successive di π. Eh. È giustificata perciò la

Definizione 2.3.3. *Sia (X, d) uno spazio metrico, si dice che X è* completo *se ogni successione di Cauchy di elementi di X converge a un elemento di X. Inoltre un sottoinsieme T di uno spazio metrico di dice completo se è completo rispetto alla distanza subordinata.*

Proposizione 2.3.4. *Sia (X, d) uno spazio metrico, allora:*

i. Se $T \subseteq X$ è completo, allora è chiuso.

ii. Se (X, d) è completo, allora ogni suo sottoinsieme chiuso è completo.

Dimostrazione.

i. Sia $x \in \overline{T}$: il fatto che x sia aderente a T implica che esiste una successione di elementi in T, diciamo (x_n), convergente ad x; Ma T è completo e (x_n) di Cauchy: pertanto, $x \in T$, e quindi T è chiuso.

ii. Se (X, d) è completo vuol dire che tutte le successioni di Cauchy convergono. Prendiamo allora $T \subseteq X$ chiuso e una successione di Cauchy: $(x_n) \subseteq T$, vogliamo vedere se la successione converge ad un valore $\ell \in T$. Per ipotesi lo spazio (X, d) è completo; quindi considerando (x_n) a valori in X, sappiamo che il suo limite è sicuramente contenuto in X. Cioè se $\ell \notin T$, $\ell \in T^c$: ma se per assurdo fosse così T non sarebbe chiuso.

□

Ma uno spazio completo non si comporta bene solo rispetto ai sottoinsiemi *già* chiusi: al contrario, come stiamo per dimostrare, il dominio una funzione a valori in uno spazio completo si può naturalmente *estendere* alla sua chiusura; a patto, però, che essa goda di continuità uniforme.

Teorema 2.3.5. (Estensione) *Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici, con (Y, d_Y) completo. Allora, ogni funzione $f : X \supseteq T \to Y$ uniformemente continua ammette un'unica estensione $\tilde{f} : \overline{T} \to Y$, anch'essa uniformemente continua.*

Dimostrazione.

Se $\tilde{f}$ esiste, è unica. Poiché, infatti, $\tilde{f}$ dev'essere in particolare continua, non può fare altro che assumere, su un punto $x \in \overline{T}$, il valore limite dell'immagine tramite f di una successione tendente a x. Consideriamo cioè la successione (x_n) a valori in T che converge ad x: essa è di Cauchy, e l'uniforme continuità di f ci garantisce che sia di Cauchy anche $(f(x_n))$: ciò, unito alla completezza di Y, vuol dire che $(f(x_n))$ ha limite in Y, diciamo ℓ_x. Proprio ℓ_x, allora, dev'essere la nostra $\tilde{f}(x)$.

$\tilde{f}$ è ben definita. Non è difficile vederlo: se, infatti, consideriamo un'altra successione in T convergente a x, diciamo (x_n^*), è chiaro che $d_X(x_n, x_n^*) \xrightarrow{n} 0$; ma l'uniforme continuità di f impone che lo stesso succeda anche a $d_Y(f(x_n), f(x_n^*))$, e pertanto i due limiti coincidono.

$\tilde{f}$ *è uniformemente continua.* L'uniforme continuità di f implica che, fissato $\epsilon > 0$, a patto di scegliere $\delta > 0$ abbastanza piccolo, $d_Y(f(x), f(x')) < \frac{\epsilon}{2}$ ogni qual volta sia $d_X(x, x') < \delta$. Chiaramente, questo vale anche per due successioni $(x_n), (x'_n)$ convergenti a x, x' rispettivamente: cioè, il fatto che la distanza sia continua garantisce che definitivamente $d_X(x_n, x'_n) < \delta$; vale a dire, che $d_Y(f(x_n), f(x'_n)) < \frac{\epsilon}{2}$. Ma anche d_Y è continua, e si può perciò scrivere

$$\lim_n d_Y(f(x_n), f(x'_n)) = d_Y(\lim_n f(x_n), \lim_n f(x'_n)) = d_Y(\tilde{f}(x), \tilde{f}(x')) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

con l'usuale trucco che ci permette di aggirare il fatto che le disuguaglianze strette non passano al limite.

□

Osservazione 2.3.6. In realtà, il fatto aver dimostrato il teorema tramite successioni ci permette di indebolire leggermente l'ipotesi: non ci interessa davvero che f sia uniformemente continua globalmente; basta infatti che, $\forall x \in T$, lo sia in una palla centrata in x. Si dice allora che f dev'essere *localmente* uniformemente continua.

Quello che vorremmo fare ora è chiederci se ci sia modo, preso uno spazio non completo, di "tapparne i buchi" e *completarlo*. Più nello specifico,

Definizione 2.3.7. *Per ogni spazio metrico (X, d), vorremmo chiamare* completamento *di X lo spazio metrico (X^*, d^*), se esiste, per cui:*

i. (X^*, d^*) è completo;

ii. Esiste un isometria $j : X \to X^*$ tale che $j(X)$ è denso in X^*.

Prima di arrivare al risultato che vogliamo, però, abbiamo bisogno dei due lemmi che seguono: dimostriamo il primo; il secondo, la cui verifica è lasciata per esercizio, ci permetterà di introdurre una distanza *degenere*[13], in cui cioè punti distinti possano distare 0, a meno di identificare quei punti.

Lemma 2.3.8. *Con la notazione del teorema di estensione, se f è un isometria, allora anche $\tilde{f}$ lo è.*

Dimostrazione. Essenzialmente bisogna dimostrare che presi $x, y \in \overline{T}$ a una certa distanza, essa non varia passando a $f(x)$ e $f(y)$. Essendo però x e y aderenti a T possiamo trovare, in T, due successioni (x_n), (y_n) che hanno come limite rispettivamente x e y. Allora basta considerare che $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_X(x_n, y_n) = d_Y(f(x_n), f(y_n))$. Come prima, il passaggio al limite fornisce la tesi. □

Lemma 2.3.9. *Sia X un insieme e sia $d : X \times X \to [0, +\infty)$ una* distanza degenere*, una funzione cioè che soddisfi le proprietà di simmetria e disuguaglianza triangolare, e per cui valga $d(x, x) = 0$, $\forall x \in X$. Si ha allora che*

i. la relazione $x \sim y \iff d(x, y) = 0$ su X è di equivalenza;

[13] Si suole chiamarla anche *pseudometrica*, e si dice *pseudometrico* uno spazio di essa dotato

ii. *è, pertanto, ben definita la funzione*

$$d^* : (X/\sim) \times (X/\sim) \to [0, +\infty)$$

tale che $d^*([x],[y]) = d(x,y)$, *dove* $[x],[y]$ *sono le classi di equivalenza di* x, y *rispetto a* $\sim$*;*

iii. *si vede facilmente che* d^* *è una distanza su* $X/\sim$.

Osservazione 2.3.10. Capita, a volte, di identificare X con $j(X)$, come sua copia isometrica dentro X^*.

Siamo pronti, adesso, a enunciare il

Teorema 2.3.11. (Completamento) *Ogni spazio metrico* (X, d_X) *ammette un completamento. Tale completamento è unico a meno di isometrie.* ♢ **2**

Dimostrazione. Siccome quello che vogliamo è che ogni successione di Cauchy converga, il modo più naturale per imporre che ciò valga sembra essere quello di costruire uno spazio contenente una copia isometrica di X a partire dall'insieme stesso delle successioni di Cauchy. Faremo proprio questo: partiamo dall'insieme $X^{\mathbb{N}}$ delle successioni a valori in X, e isoliamo il suo sottoinsieme $\mathfrak{C}$ delle successioni di Cauchy. Sulle coppie di successioni in $\mathfrak{C}$, definiamo la funzione a valori in $\mathbb{R}^+$

$$d((x_n),(x'_n)) \equiv \limsup_n d_X(x_n, x'_n)$$

per ogni $(x_n),(x'_n) \in \mathfrak{C}$. Essa è una pseudometrica: è infatti evidentemente simmetrica e si annulla su coppie di successioni identiche; per la subadditività del lim sup, poi, vale anche la disuguaglianza triangolare. Tuttavia, se due successioni distinte $(x_n),(x'_n)$, all'aumentare di n, verificano $\lim_n d_X(x_n, x'_n)$, è palese che valga $d((x_n),(x'_n)) = 0$. Ma non è un problema: basta prendere la relazione di equivalenza

$$(x_n) \sim (x'_n) \Leftrightarrow \lim_n d_X(x_n, x'_n) = 0$$

e passare al quoziente $\mathfrak{C}/\sim \equiv X^*$ con la distanza indotta d^* perché, grazie al *lemma 2.3.9*, (X^*, d^*) sia uno spazio metrico effettivo. Dimostriamo allora che

(X^*, d^*) *contiene una copia isometrica di* X. Infatti, la funzione $j : X \to X^*$ definita da $x \overset{j}{\longmapsto} (x)$, dove (x) è la successione che vale costantemente x, è un'evidente isometria.

$j(X)$ *è denso in* X. Ciò equivale a mostrare che ogni successione di Cauchy è arbitrariamente vicina a qualche successione costante (che, in effetti, è quasi un'ovvietà). Infatti, presa $(x_n) \in \mathfrak{C}$, esiste per definizione, $\forall \epsilon > 0$, un n_0 per cui $d_X(x_n, x_{n_0}) < \frac{\epsilon}{2}$. Ma allora, detta $[(x_n)]$ la classe di equivalenza di (x_n) in X^*, vale chiaramente

$$d^*([(x_n)], j(x_{n_0})) = \limsup_n d_X(x_n, x_{n_0}) \le \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

da cui la tesi.

(X^*, d^*) *è completo.* Prendiamo allora una successione (ξ_n) di Cauchy a valori in X^*: ci interessa far vedere che essa ammette limite in X^*. Ora, poiché $j(X)$ è denso in X^*, possiamo trovare una sequenza di $x_n \in X$ con la proprietà che la distanza di ogni ξ_n dal corrispondente $j(x_n)$ sia piccola a piacere; più precisamente, imponiamo che

$$d^*((\xi_n), j(x_n)) < \frac{1}{n+1}$$

In questo modo, si vede facilmente che anche (x_n) è di Cauchy: infatti, per la proprietà di Cauchy di (ξ_n) vale, definitivamente, diciamo a partire da N, $d^*((\xi_n), (\xi_{n'})) < \frac{\epsilon}{2}$; cioè, per disuguaglianza triangolare,

$$\begin{aligned} d_X(x_n, x_{n'}) &= d^*(j(x_n), j(x_{n'})) \\ &\leq d^*(j(x_n), (\xi_n)) + d^*((\xi_n), (\xi_{n'})) + d^*((\xi_{n'}), j(x_{n'})) \\ &\leq \frac{1}{n+1} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{n'+1} \end{aligned}$$

e basta prendere N abbastanza grande perché valga

$$\frac{2}{N+1} < \frac{\epsilon}{2}$$

per ottenere la maggiorazione

$$\frac{1}{n+1} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{n'+1} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

che ci dà esattamente la condizione voluta. Ma questo ci permette di concludere, osservando che $(\xi_n) \xrightarrow{n} \xi = [(x_n)] \in X^*$: infatti,

$$d^*(\xi, (\xi_n)) \leq d^*(\xi, j(x_n)) + d^*(j(x_n), (\xi_n)) < \limsup_{k\to\infty} d_X(x_k, x_n) + \frac{1}{n+1}$$

e l'ultima somma, per il fatto che (x_n) è di Cauchy, tende a 0.

(X^*, d^*) *è unico.* Questo è decisamente più facile. Supponiamo infatti di avere due completamenti, diciamo (X_1^*, d_1^*) e (X_2^*, d_2^*): allora abbiamo anche due isometrie iniettive, diciamo $j_1 : X \to X_1^*$ e $j_2 : X \to X_2^*$. Ma basta comporle opportunamente, ottenendo l'isometria $j_1 \circ j_2^{-1} : j_2(X) \to X_1^*$; allora, il fatto che $(X_1^*, d*_1)$ sia completo, $j_2(X)$ sia denso in X_2^* (e quindi $\overline{j_2(X)} \supseteq X_2^*$) ci permette di applicare il lemma ..., estendendo $j_1 \circ j_2^{-1}$ a $\tilde{j} : X_2^* \to X_1^*$. Che $\tilde{j}$ sia un isomorfismo metrico è immediato.

$\square$

Concludiamo il paragrafo con un importante teorema che mette in relazione gli spazi completi e le funzioni lipschitziane: esso ci sarà particolarmente utile nell'ultimo risultato che dimostreremo.

Teorema 2.3.12. (Banach-Caccioppoli) *In uno spazio metrico completo non vuoto (X, d), una contrazione $T : X \to X$ di X ammette uno e un solo punto fisso: cioè, $\exists! \xi \in X$ tale che $T(\xi) = \xi$.*

Dimostrazione. Per prima cosa prendiamo un punto $x_0 \in X$, e definiamo la successione (x_n) tale che $x_1 = T(x_0), x_2 = T(x_1) = T^2(x_0)$ e, in generale, $x_k = T(x_{k-1}) = T^{k-1}(x_0)$. Dimostriamo che

(x_n) *è di Cauchy.* Per farlo, consideriamo prima che, detta Q la costante di Lipschitz di T, la lipschitzianità della contrazione T impone che valga

$$d(x_0, x_1) \leq Qd(T(x_0), T(x_1)) = Qd(x_1, x_2)$$

Ora, inducendo su n, verifichiamo che

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(T(x_n), T(x_{n+1})) \leq Qd(x_n, x_{n+1}) \leq Q \cdot Q^n d(x_0, x_1) = Q^{n+1} d(x_0, x_1)$$

dove abbiamo usato prima il fatto che T è lipschitziana, poi l'(implicita) ipotesi induttiva. Quindi, per il principio di induzione, vale che $d(x_n, x_{n+1}) \leq Q^n d(x_0, x_1) \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Prendiamo ora $x_k, x_h \in (x_n)$ con $k < h$ e sfruttiamo la disuguaglianza triangolare e la proprietà appena dimostrata, ottenendo

$$\begin{aligned} d(x_k, x_h) &\leq d(x_k, x_{k+1}) + d(x_{k+1}, x_{k+2}) + ... + d(x_{h-1}, x_h) \\ &\leq Q^k d(x_0, x_1) + Q^{k+1} d(x_0, x_1) + ... + Q^{h-1} d(x_0, x_1) \\ &= Q^k d(x_0, x_1) \sum_{i=0}^{h-k-1} Q^i \leq Q^k d(x_0, x_1) \sum_{j=0}^{\infty} Q^j \\ &= Q^k d(x_0, x_1) \frac{1}{1-Q} \end{aligned}$$

dove, negli ultimi due passaggi, abbiamo raccolto e sostituito alla somma finita di potenze di Q la corrispondente serie geometrica e poi il valore a cui essa converge. Ricordiamo che T è una contrazione, cioè $Q \in (0, 1)$: allora, la disuguaglianza così ottenuta, ovvero

$$d(x_h, x_k) \leq d(x_0, x_1) \frac{Q^k}{1-Q} = \epsilon_k$$

afferma proprio che la successione degli (x_n) è di Cauchy.

Esiste ξ fisso. Allora, poiché X è completo per ipotesi, (x_n) ammette limite, diciamo appunto ξ. Ma dalla definizione della successione, $x_n = T(x_{n-1})$, si ottiene, passando al limite e sfruttando la continuità di T,

$$\lim_n x_n = \lim_n T(x_{n-1}) \Rightarrow \lim_n x_n = T(\lim_n x_{n-1})$$

da cui quello che volevamo: $\xi = T(\xi)$.

ξ *è unico.* Supponiamo che $\exists y \in X$ tale che $y = T(y)$; allora

$$0 \leq d(y, \xi) \leq d(T(\xi), T(y)) \leq Qd(\xi, y)$$

che implica che sia $d(y, \xi) = 0$, da cui $y = \xi$ per la non degenerazione di d.

□

2.4 Compattezza

Abbiamo già caratterizzato la compattezza per gli spazi topologici: tuttavia, come si sarà notato, la loro generalità non fornisce un buon ambiente in cui studiare i compatti. Diversamente, vedremo adesso che avere a disposizione gli strumenti degli spazi metrici darà nuove applicazioni alla nozione di compattezza: in particolare, prima ci accingiamo a dimostrare l'equivalenza, nei metrici, di compattezza per ricoprimenti e compattezza sequenziale; passeremo poi ad apprezzare il buon comportamento delle funzioni continue su spazi compatti.
Per prima cosa, si vede facilmente che

Proposizione 2.4.1. *Uno spazio metrico (X, d) sequenzialmente compatto è necessariamente completo.*

Dimostrazione. È chiaro: presa una successione (x_n) di Cauchy, da essa si può estrarre una sottosuccessione convergente, diciamo, a $\ell \in X$; ma di certo, allora, anche (x_n) ha limite ℓ, da cui la tesi. □

Diamo ora la seguente

Definizione 2.4.2. *Uno spazio metrico si dice* totalmente limitato *se, $\forall \epsilon > 0$, esiste una sequenza finita di palle $B_1, ..., B_n$ di raggio ϵ che lo ricopre.*

Dagli esempi si vede come la limitatezza totale implichi la limitatezza, ma sia più forte: esistono cioè spazi limitati che non lo sono totalmente. Inoltre, il seguente teorema fornisce una caratterizzazione dei compatti in termini di totale limitatezza:

Teorema 2.4.3. *Uno spazio metrico (X, d) è sequenzialmente compatto se e solo se è completo e totalmente limitato.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$) Che compatto voglia dire completo l'abbiamo già visto. Supponiamo per assurdo che uno spazio compatto non sia totalmente limitato. Allora $\exists \tilde{\epsilon} > 0$ tale che nessuna sequenza finita di palle di raggio $\tilde{\epsilon}$ ricopra X. Sia allora $x_0 \in X$; di certo, perché $B_{\tilde{\epsilon}}(x_0)$ non sia un ricoprimento di X, $\exists x_1 \in X$ con $d(x_0, x_1) > \tilde{\epsilon}$; perché non lo sia neppure $\{B_{\tilde{\epsilon}}(x_0), B_{\tilde{\epsilon}}(x_1)\}$, dev'esserci $x_2 \in X$ la cui distanza da x_0, x_1 è maggiore di $\tilde{\epsilon}$ e, induttivamente, $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_{n+1} \mid d(x_{n+1}, x_k) > \tilde{\epsilon}\ \forall k \leq n$: chiaramente, non c'è sottosuccessione di (x_n) che converga.

$\Leftarrow$) Sia, al variare di $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}_m$ un ricoprimento finito di X costituito di palle di raggio $\frac{1}{2^m}$; vogliamo dimostrare che da ogni successione $(x_n($ a valori in X si può estrarre una sottosuccessione $(x_{n_k}($ di Cauchy: costruiamola. È chiaro che x_n sta frequentemente in (almeno) una delle palle, diciamo B_0, e prendiamo x_{n_0} il primo valore in B_0; diciamo poi B_1 una palla tale che $(x_n($ stia frequentemente in $B_0 \cap B_1$, e scegliamo come x_{n_1} $(n_1 > n_0)$ il primo valore in tale intersezione. Iterando il procedimento, scegliamo ogni x_{n_k} in modo che sia $n_k > n_{k-1}$ e $x_{n_k} \in \bigcap_{i=0}^{m} B_i$: la successione (x_{n_k}) è quella che cercavamo. Dalla completezza di X si ottiene la tesi. □

Quindi, in particolare, spazi metrici compatti e sottospazi compatti di spazi metrici sono limitati.

Teorema 2.4.4. *Uno spazio metrico (X, d) è sequenzialmente compatto se e solo se è compatto.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$) Per assurdo, supponiamo che esista un ricoprimento aperto $\{A_i\}_{i\in I}$ di X privo di sottoricoprimenti finiti. Dal teorema precedente, sappiamo che X è totalmente limitato: perciò, esiste una sequenza finita $\mathcal{B}_m$ di palle di raggio $1/2^m$ che lo ricopre. Allora, almeno una di queste palle non dev'essere contenuta in alcuno degli aperti del ricoprimento: altrimenti, $\mathcal{B}_m$ sarebbe un suo sottoricoprimento finito. Sia, al variare di m, $B(x_m)$ quella palla. Ma la compattezza sequenziale di X implica che dalla successione (x_m) dei centri delle palle *non* contenute in alcuno degli aperti se ne può estrarre una (x_{m_k}) convergente, diciamo, a $\ell \in X$; in particolare, ℓ sta in uno degli A_i con tutta una sua palla di raggio, diciamo, r. Allora, basta prendere k tale che $1/2^{m_k} < r/2$ e $d(x_{m_k}, \ell) < r/2$ per trovare che $B(x_{m_k})$ sta in $B_r(\ell)$ e quindi in A_i: ma allora x_{m_k} non fa parte della successione, il che è evidentemente assurdo.

$\Leftarrow$) Anche qui ragioniamo per assurdo: supponiamo, cioè, che esista una successione (x_n) a valori in X priva di sottosuccessioni convergenti. Allora nessun valore di (x_n) è assunto da essa frequentemente (altrimenti, trovare una sottosuccessione convergente ad esso sarebbe banale); in più, l'insieme T dei valori della successione non può avere punti di accumulazione, come anche tutti i suoi sottoinsiemi $T_m = \{x_n \mid n > m\}$: T e i T_m sono quindi chiusi, con i T_m non vuoti, tali che $T_{m+1} \subset T_m$ e che $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} T_m = \emptyset$. Pertanto, i loro complementari A_m sono aperti, tali che $A_m \subset A_{m+1}$ e che la loro unione è tutto X, cioè lo ricoprono. Ma, per ipotesi, si può estrarre da $\{A_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ un sottoricoprimento finito $\{A_{m_1} \subset A_{m_2} \subset ... \subset A_{m_k}\}$. Peccato che questo vorrebbe dire, per il fatto che gli A_m sono inscatolati, che $A_{m_k} = X$, cioè il suo complementare $T_{m_k} = \emptyset$.

□

In particolare, adattando l'ultima parte della precedente dimostrazione si prova la

Proposizione 2.4.5. *Sia (X, d) uno spazio metrico compatto, $C_1 \supset C_2 \supset ... \supset C_m \supset ...$ una successione di suoi sottospazi chiusi non vuoti e inscatolati; allora $\exists x \in C_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.*

Passiamo ora a esaminare le conseguenze della compattezza metrica rispetto alla continuità.

Proposizione 2.4.6. *Siano (X, d_X), (Y, d_Y) spazi metrici compatti, $f : X \to Y$ una bigezione continua. Allora f^{-1} è continua.*

Dimostrazione. La tesi è equivalente al fatto che le controimmagini di aperti sono aperte; cioè, le controimmagini di chiusi sono chiuse; cioè, f è chiusa (nel senso che manda chiusi in chiusi); ma questa è un'ovvia conseguenza del fatto che f continua manda compatti in compatti. □

Di notevole importanza risulta il seguente risultato:

Teorema 2.4.7. (Heine-Cantor) *Dati (X, d) e (X, d') spazi metrici, con X compatto, se $f : X \to Y$ è continua, allora è uniformemente continua.*

Dimostrazione. Ancora una volta, per assurdo, supponiamo che f non sia uniformemente continua: allora $\exists \tilde{\epsilon} > 0$ tale che $\forall \delta > 0$ possiamo trovare $x, y \in X$ con $d(x, y) < \delta$ tali che $d'(f(x), f(y)) > \tilde{\epsilon}$. In particolare, prendiamo $\delta = \frac{1}{n}$ al variare di n e indichiamo, $\forall n \in \mathbb{N}$, con x_n, y_n i punti incriminati; il fatto che X sia compatto ci permette di estrarre dalla successione (x_n) una sottosuccessione (x_{n_k}) convergente, diciamo, a ℓ: valendo $\lim_{n_k} d(x_{n_k}, y_{n_k}) \leq \lim_{n_k} \frac{1}{n_k} = 0$, si vede che tende a ℓ anche la successione degli (y_{n_k}) e, poiché f è continua, vale $lim_{n_k} f(x_{n_k}) = lim_{n_k} f(y_{n_k}) = f(\ell)$, cioè $lim_{n_k} d'(x_{n_k}, y_{n_k}) = 0$, che è assurdo. □

2.5 Prodotto di spazi metrici

Chiaramente, poiché in particolare gli spazi metrici sono topologici separati e primi numerabili, vagono in essi tutte le proposizioni precedentemente dimostrate.
Vogliamo, però, vedere esplicitamente come introdurre una distanza sulla topologia prodotto. Lo facciamo con il seguente

Teorema 2.5.1. *Siano (X, d_X) e (Y, d_X) due spazi metrici, allora al prodotto $X \times Y$ si può attribuire una struttura di spazio metrico.*

Dimostrazione. Consideriamo

$$\delta_1((x, y), (x_1, y_1)) = \max\{d_1(x, x_1), d_2(y, y_1)\}$$

e

$$\delta_2((x, y), (x_1, y_1)) = \sqrt{d_1(x, x_1)^2 + d_2(y, y_1)^2}$$

Si può facilmente vedere che sono distanze; vale, in particolare, che

$$\delta_1 \leq \delta_2 \leq \sqrt{2}\delta_1$$

Basta infatti osservare che la prima disuguaglianza vale perché aggiungiamo quantità positive, nella seconda in particolare c'è l'uguaglianza se $d_1(x, x_1) = d_2(y, y_1)$. Allora le due distanze introdotte sono bi-lipschitz equivalenti e generano gli stessi intorni, i quali, per un punto $(x_0, y_0) \in X \times Y$ sono della forma

$$\{(x, y) : d_1(x, x_0) < \epsilon, d_2(y, y_0) < \epsilon\}$$

□

Proposizione 2.5.2. *Siano X^* e Y^* due completamenti rispettivamente di (X, d_1) e (Y, d_2) si vede facilmente allora che*

$$(X \times Y)^* = X^* \times Y^*$$

con l'immersione $j_1 \times j_2 : X \times Y \to X^* \times Y^*$ con $j_1 \times j_2(x_1, x_2) = (j_1(x_1), j_2(x_2))$
Inoltre se (X, d) è uno spazio metrico con completamento X^* e immersione j il completamento di $T \subseteq X$ dotato della distanza indotta risulta essere $\overline{j(T)} \in X^*$

2.6 Successioni di funzioni

Vediamo ora le proprietà di particolari successioni: quelle fatte di funzioni definite su spazi metrici.

Definizione 2.6.1. *Siano (X, d_X), (Y, d_Y) spazi metrici, e sia (f_n) una successione di funzioni $f_n : X \to Y$. Diciamo che*

- (f_n) converge puntualmente *a una funzione $f : X \to Y$ se, al variare di x, $(f_n(x))$ sta definitivamente vicino a $f(x)$; vale a dire, $\forall x \in X$, $\forall \epsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tale che $d_Y(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ $\forall n > N$;*
- (f_n) converge uniformemente *a $f : X \to Y$ se, definitivamente, l'intera f_n sta vicino ad f; ovvero, $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tale che, $\forall x \in X$, $d_Y(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ $\forall n > N$;*

Si vede come tra convergenza uniforme e convergenza puntuale esista la stessa relazione che c'è tra continuità uniforme e continuità: la convergenza uniforme richiede, infatti, che l'indice N dopo il quale la successione di funzioni approssima f a meno di un ϵ non dipenda da x, ma sia lo stesso $\forall x \in X$.
Il risultato seguente caratterizza meglio l'uniforme convergenza:

Proposizione 2.6.2. *Dati (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, una successione (f_n) di funzioni $f_n : X \to Y$ converge uniformenmente a $f : X \to Y$ se e solo se la massima distanza tra f ed f_n tende a 0, vale a dire $\sup\{d_Y(f_n(x), f(x)) \mid x \in X\} \to 0$ per $n \to +\infty$.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$) Se (f_n) converge uniformemente a f allora, fissato un *epsilon* > 0, possiamo trovare un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $d_Y(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ $\forall x \in X, n > n_0$; ma allora, definitivamente, $\sup\{d_Y(f_n(x), f(x)) \mid x \in X\} \leq \epsilon$: l'arbitrarietà di ϵ fornisce la tesi.

$\Leftarrow$) Basta leggere al contrario la dimostrazione del punto precedente.

□

Se poi (f_n) è fatta di funzioni continue, vale la

Proposizione 2.6.3. *Dati (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, sia (f_n) una successione di funzioni* continue *$f_n : X \to Y$ uniformemente convergente a f. Allora, f è continua.*

Dimostrazione. Perché f sia continua in ogni punto $x_0 \in X$ fissato, deve esistere un $\delta > 0$ tale che, $\forall x \in X$ con $d_X(x, x_0) < \delta$, sia $d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$. Ma (f_n) converge uniformemente a f, per cui, da un n_0 in poi, $d_Y(f(x), f_n(x)) < \frac{\epsilon}{3}$; il fatto, poi, che f_{n_0} sia continua in x_0, ci garantisce l'esistenza di un $\delta > 0$ tale che $d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) < \frac{\epsilon}{3}$ a patto che $d_X(x, x_0) < \delta$. Allora, posto $d_X(x, x_0) < \delta$, vale la disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f(x_0)) &\leq d_Y(f(x), f_{n_0}(x)) + d_Y(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) + d_Y(f_{n_0}(x_0), f_{n_0}(x_0)) \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \leq \epsilon \end{aligned}$$

□

2.7 Spazi di funzioni

I risultati appena ottenuti per le successioni di funzioni ci suggeriscono di fare un tentativo: provare a vedere, cioè, se, a meno di aggiungere qualche proprietà agli spazi considerati, sia possibile definire una distanza su insiemi di funzioni continue definite su spazi metrici. Notiamo intanto il seguente

Lemma 2.7.1. *Siano $(X, d_X), (Y, d_Y)$ spazi metrici, e sia X compatto. Allora, per ogni coppia di $f, g : X \to Y$ continue,*

$$\rho(f, g) \equiv \sup\{d_Y(f(x), g(x)) \mid x \in X\}$$

è finito, ed esiste $x_0 \in X$ tale che $d_Y(f(x_0), g(x_0)) = \rho(f, g)$.

Dimostrazione. Segue, immediatamente, dal Teorema di Weierstrass applicato a $D_{fg}(x) : X \to \mathbb{R}$, definita da

$$x \overset{D_{fg}}{\longmapsto} d_Y(f(x), g(x))$$

Il massimo valore di D_{fg}, diciamo appunto $D_{fg}(x_0)$, è proprio $\rho(f, g)$. Si noti che possiamo applicare Weierstrass perché X è compatto; inoltre, la continuità di D_{fg} segue dalla continuità della distanza. □

Detto allora

$$\mathcal{C}(X, Y) \equiv \{f : X \to Y \mid f \text{ è continua}\}$$

possiamo enunciare la

Proposizione 2.7.2. *Siano (X, d_X), (Y, d_Y) spazi metrici, e X compatto. Allora*

$$\rho(f, g) \equiv \sup\{d_Y(f(x), g(x)) \mid x \in X\}$$

è una distanza su $\mathcal{C}(X, Y)$, che diciamo distanza uniforme *o* del sup *e indichiamo (anche) con $\|f - g\|_\infty$. Pertanto, $(\mathcal{C}(X, Y), \rho)$ è uno spazio metrico.*

Dimostrazione. Sappiamo già che $\rho(f, g)$ è finita, e la sua positività e simmetria derivano direttamente dal fatto che è l'estremo superiore di un insieme di distanze. Vediamo invece la disuguaglianza triangolare: ci interessa mostrare che, prese $f, g, h \in \mathcal{C}(X, Y)$, valga

$$\rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g)$$

Ma, tenendo conto del fatto che $\exists x_0 \in X$ per cui $\rho(f, g) = d_Y(f(x_0), g(x_0))$, otteniamo

$$\rho(f, g) = d_Y(f(x_0), g(x_0)) \leq d_Y(f(x_0), h(x_0)) + d_Y(h(x_0), g(x_0)) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g)$$

dove l'ultima disuguaglianza è giustificata dal passaggio al sup. □

Non solo la scelta della distanza sullo spazio delle funzioni continue è stata scelta in modo alquanto naturale, perché coincide proprio con la massima distanza tra i valori che due funzioni f e g assumono al variare di x; ma, in virtù di quanto abbiamo già visto sulle successioni di funzioni, rispetta pure la

Proposizione 2.7.3. *Sia* $(\mathcal{C}(X,Y),\rho)$ *lo spazio delle funzioni continue con la distanza del* sup. *Se una successione* (f_n) *converge in* $\mathcal{C}(X,Y)$, *allora lo fa uniformemente.*

Dimostrazione. È ovvio: se (f_n) converge a f, allora $\rho(f_n,f) \xrightarrow{n} 0$, cioè tende a 0 il

$$\sup\{d_Y(f_n(x),f(x)) \mid x \in X\}$$

che sappiamo già essere la condizione di convergenza uniforme. □

Ma, soprattutto, a patto di avere (Y,d_Y) completo, vale il seguente teorema, che risulterà fondamentale alla fine del prossimo capitolo.

Teorema 2.7.4. *Sia* (X,d_X) *compatto e* (Y,d_Y) *completo. Allora* $(\mathcal{C}(X,Y),\rho)$ *è completo.*

Dimostrazione. C'è da provare che, se (f_n) è una successione di Cauchy in $\mathcal{C}(X,Y)$, allora essa converge a in $\mathcal{C}(X,Y)$. È abbastanza evidente che (f_n) converga puntualmente a una certa $f: X \to Y$: infatti, fissato $x \in X$, $d_Y(f_h(x),f_k(x)) \leq \rho(f_h,f_k)$, e quindi $(f_n(x))$ è una successione di Cauchy e converge a $f(x) \in Y$ per la completezza di Y. Il fatto che converga uniformemente viene dal fatto che, essendo (f_n) di Cauchy, vale, $\forall \epsilon > 0$, $d_Y(f_h(x),f_k(x)) < \frac{\epsilon}{2}$ defininitivamente, diciamo da n_0. Ma allora, posto $h > n_0$, per $k \to +\infty$ si ha

$$d_Y(f_h(x),f(x)) = \lim_{m\to+\infty} d_Y(f_h(x),f_k(x)) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

dove, si noti, poiché le disuguaglianze strette non passano al limite, è risultato sensato aver maggiorato la distanza con $\frac{\epsilon}{2}$.
Allora, non dipendendo n_0 da x, (f_n) converge uniformemente a f e, come già sappiamo, da ciò segue che f è continua e sta in $\mathcal{C}(X,Y)$. □

2.8 ♢ Esempi ♢ e Complementi

♢ **1** Vediamo i seguenti esempi di distanze: **T 2.1.1**

i. Su $\mathbb{R}^n$, preso k tale che $1 \leq k < +\infty$, lo sono, per ogni $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n)$ le funzioni

$$d_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt[k]{(|x_1 - y_1|^k + \cdots + |x_n - y_n|^k)}$$

$$d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{(|x_1 - y_1|^k + \cdots + |x_n - y_n|^k)} = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - y_j|$$

sono, rispettivamente, la *k-distanza* e la ∞*-distanza*. Ci si sarà resi conto, o lo si farà a breve, di che cosa sia in realtà la *2-distanza*. Inoltre, la *1-distanza* ha, a differenza delle sue colleghe un po' grigie, anche un nome più fantasioso: si suole designarla come *distanza Manhattan*. Perché? Inoltre, si estende al prodotto di spazi metrici qualsiasi?

ii. Dato un insieme X non vuoto, la funzione definita, $\forall x, y \in X$, da

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

è una distanza. Se ne deduca il nome.

iii. Sia $x \in \mathbb{Q}$, e sia $x = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, con i p_i in ordine crescente e gli $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, il rapporto tra le fattorizzazioni di numeratore e denominatore di x. Diciamo *valore assoluto p-adico* di x la funzione

$$|x|_p = \{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{se } x = 0 \\ p^{-m} \ \text{se } p^m \text{ è il fattore nella scomposizione} \end{array}$$

Si verifica allora facilmente che $|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$, $\forall x, y \in \mathbb{Q}$. Perciò, in particolare, $d_p(x, y) \equiv |x - y|_p$ è una distanza su $\mathbb{Q}$, detta appunto *distanza p-adica*.

iv. Sia $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ la retta reale estesa. Allora, la funzione definita, $\forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}$, da

$$\delta(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$$

è una distanza.

v. Sulla sfera $S_1(0)$ di $\mathbb{R}^n$ possiamo definire la distanza $\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \theta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ con $\theta \in [0, \pi]$ l'angolo tra i vettori $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$: essa si dice *distanza geodetica*.

vi. Sia Σ un alfabeto, $\Sigma^n = \{w \in \Sigma^* : |w| = n\}$ l'insieme delle stringhe di lunghezza n su di esso. Allora, prese due stringhe $w = w_1 w_2 ... w_n, x = x_1 x_2 ... x_n$, la funzione

$$d_H(w, x) = |\{w_j : w_j \neq x_j, j = 1, ..., n\}|$$

è la *distanza di Hamming* su Σ^n. Volendo dimenticarsi di aver seguito *FdP*, si dimostri il seguente fatto: se, dato un modo di mappare i simboli di Σ con numeri, w e x si considerano come vettori di $\mathbb{R}^n$, in modo che formino i vertici di un ipercubo di $\mathbb{R}^n$, si ha

$$d_H(w, x) = d_1(w, x)$$

◊ **2** È interessante notare che $\mathbb{R}$ è il completamento metrico di $\mathbb{Q}$. Infatti, $\mathbb{Q}^*$ è isometrico a $\mathbb{R}$ con la distanza euclidea: essendo $\mathbb{R}$ completo e ordinato e $\mathbb{Q}$ denso in $\mathbb{R}$, lo è anche come spazio metrico. Quindi, l'isometria $j : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x$ garantisce proprio che $\mathbb{R}$ completi $\mathbb{Q}$ metricamente; il teorema di completamento, poi, fornisce l'unicità. **T 2.3.11**

3 Struttura di $\mathbb{R}^n$

3.1 Struttura euclidea di $\mathbb{R}^n$

In quest'ultima sezione, vogliamo guardare più da vicino agli spazi $\mathbb{R}^n$: riprenderemo quindi i risultati generali finora visti, derivando da essi la caratteristica struttura topologica di $\mathbb{R}^n$. Prima, però, ribadiamo un istante alcuni concetti che seguono dal fatto che $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale reale.

Definizione 3.1.1. *Presi* $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ *e* $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *si definisce*

1. *il* prodotto scalare canonico *in modo che sia*

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \equiv x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

2. *il* modulo *di* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ *come*

$$|\boldsymbol{x}| \equiv \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

Proposizione 3.1.2. *Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà:*

i. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$

ii. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} \geq 0$ *con uguaglianza se e solo se* $\boldsymbol{x} = 0$

iii. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ $(\boldsymbol{x} \cdot \lambda \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} + \lambda \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z}$

Proposizione 3.1.3. *Le proprietà del modulo sono:*

i. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ $|\boldsymbol{x}| \geq 0$ *con uguaglianza se e solo se* $\boldsymbol{x} = 0$

ii. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ $|\lambda \boldsymbol{x}| = |\lambda||\boldsymbol{x}|$

iii. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$

Dimostrazione. Dimostriamo solo la *iii.*, osservando che

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|^2 = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) &\leq |\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{y}|^2 + 2|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \\ &\leq |\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{y}|^2 + 2|\boldsymbol{x}|| \cdot \boldsymbol{y}| = (|\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|)^2\end{aligned}$$

□

Ricordiamo anche la seguente disuguaglianza, date le sue molteplici applicazioni.

Teorema 3.1.4. (Cauchy-Schwarz) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, *vale*

$$|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq | \boldsymbol{x} || \boldsymbol{y} |$$

con uguaglianza se e solo se $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{y}$ *sono linearmente dipendenti.*

Dimostrazione. Se $\boldsymbol{x} = 0$ seguono immediatamente l'uguaglianza e la dipendenza lineare. Se, invece, x, $y \neq 0$ consideriamo il prodotto scalare

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{y}) + \lambda(\boldsymbol{y} \cdot (\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{y})) \\ &= (\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{x} + \lambda((\boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}|^2 + 2\lambda \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + \lambda^2 |\boldsymbol{y}|^2 \end{aligned}$$

che è un polinomio in λ di secondo grado, sempre positivo; allora, il suo discriminante $\Delta = 4((\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})^2 - (\mathbf{x}\boldsymbol{y})^2)$ deve essere ≤ 0.
Quindi, estraendo da entrambi i lati le radici positive, otteniamo

$$|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq | \boldsymbol{x} || \boldsymbol{y} |$$

con uguaglianza se e solo se $\Delta = 0$, cioè nel caso in cui x, y sono dipendenti. □

Passiamo ora, finalmente, a strutturare $\mathbb{R}^n$ come spazio metrico:

Definizione 3.1.5. *Su $\mathbb{R}^n$, la funzione $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$, definita da*

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |(x_i - y_i)|^2}$$

è una distanza, detta distanza euclidea*. Oltre alle proprietà della distanza, essa gode delle seguenti proprietà:*

i. $d(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{v}) = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$

ii. $d(\lambda \boldsymbol{x}, \lambda \boldsymbol{y}) = |\lambda| d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ $\lambda \in \mathbb{R}$

Osservazione 3.1.6. Anche qui, si tratta di verifiche elementari; quello che, invece, è importante osservare è che, come si può immaginare, tale distanza, ristretta a $\mathbb{R}$, induce esattamente la topologia euclidea τ_{eu} già considerata. Non sorprenderà, quindi che, in generale, si chiama *topologia euclidea* su $\mathbb{R}^n$ quella indotta dalla distanza euclidea: da qui in poi, sarà di questa collezione di aperti che considereremo $\mathbb{R}^n$ munito.

3.2 Topologia e metrica di $\mathbb{R}^n$

Veniamo, adesso, a caratterizzare nello specifico le proprietà dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$: i risultati che seguono forniscono una caratterizzazione specifica dei suoi connessi, compatti, aperti, chiusi, spesso costituendo semplici corollari a teoremi o proposizioni più generali, che abbiamo già visto.

Proposizione 3.2.1. *Sia $T \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, allora T è connesso se e solo se è connesso per archi.*

Dimostrazione. Evidentemente un insieme connesso per archi è anche connesso, come abbiamo già dimostrato per gli spazi topologici, quindi vogliamo vedere l'altra implicazione. Vogliamo fare vedere che presi due punti, essi sono congiungibili con una poligonale.

Prendiamo quindi $x \in T$ e l'insieme $\mathcal{A} = \{y \in T : \exists$ una poligonale che congiunge x e y. Vogliamo dimostrare che $\mathcal{A}$ è aperto. Prendiamo un qualunque $y \in \mathcal{A}$, sappiamo allora che esiste una poligonale $X_0, X_1, \cdots, X_m$ che collega $x = X_0$ e $y = X_m$. Essendo T aperto inoltre $\exists B_\epsilon(y) \subseteq T$, possiamo quindi prendere $z \in B_\epsilon(y)$ e la poligonale che li collega sarà sicuramente contenuta nella palla, e quindi in T. Allora abbiamo che la poligonale che collega x e z è sempre contenuta in T, quale, in particolare, tutta la palla di centro y è collegabile con una poligonale a partire da x e quindi $B_\epsilon(y) \subseteq \mathcal{A}$ e quindi è aperto in $\mathbb{R}^n$ e nella topologia indotta su T.
Consideriamo ora la relazione $\sim_T$. Si può facilmente vedere che è di equivalenza e in particolare esiste un'unica classe di equivalenza in $T/\sim_T$ perché per ipotesi T è connesso. Quindi essendo unica la classe in particolare abbiamo visto che esiste una funzione poligonale continua che congiunge due qualsiasi punti di T, ovvero T è connesso per archi. □

Teorema 3.2.2. *Sia $T \subseteq \mathbb{R}$, allora T è convesso*[14] *se e solo se è connesso. In particolare, i connessi di $\mathbb{R}$ sono i suoi intervalli.*

Dimostrazione.

- $\Rightarrow$) Se per assurdo T fosse convesso ma non connesso, $\exists A, B \subseteq T$ disgiunti, aperti non vuoti tali che $A \cup B = T$. Sia $x_1 \in A$, $x_2 \in B$ e supponiamo, senza perdita di generalità, $x_1 < x_2$, ma T è convesso, allora $[x_1, x_2] \subseteq T$. Consideriamo $\xi = \sup([x_1, x_2] \cap A)$, quindi abbiamo che $x_1 \le \xi \le x_2$, ma essendo ξ l'estremo superiore di un insieme, è inoltre un punto aderente per A. Inoltre ξ è un punto aderente per B, perché o $\xi \in B$ oppure esso è un punto di accumulazione dell'intervallo $U = (\xi, x_2] \subseteq B$. Quindi $\xi \notin A$ perché $A \cap \overline{T} = \emptyset$, $\xi \notin B$ perché $\overline{A} = \emptyset$, ma ciò è assurdo perché $\xi \in T$, essendo T è convesso.
- $\Leftarrow$) Se T non fosse convesso, allora $\exists x_1, x_2, \xi$ tali che $x_1 < \xi < x_2$. Allora avremmo che $x_1, x_2 \in T$ e $\xi \notin T$: poniamo quindi $A = \{x < \xi : x \in T\}$ e $B = \{x > \xi : x \in T\}$: è facile vedere che A, B verificano la sconnessione.

□

Teorema 3.2.3. (Heine-Borel) *Sia $T \subseteq \mathbb{R}^n$, allora T è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Dimostrazione.

- $\Rightarrow$) Per definizione di compatto, ogni successione convergente, converge ad un limite in T, quindi contiene tutti i suoi punti aderenti, quindi è chiuso. Se per assurdo fosse illimitato, esisterebbe una successione $(\mathbf{x}_n) \subseteq T$ per cui $\lim |\mathbf{x}_n| = +\infty$ e quindi anche tutte le successioni estratte divergerebbero.

[14] Si ricordi che un insieme X si dice convesso se, presi due suoi punti qualsiasi, diciamo x, y, è contenuto in X anche il segmento che li congiunge

$\Leftarrow$) Essendo T chiuso e limitato, se prendiamo una successione di elementi di T, può accadere che non sia convergente, ma allora possiamo estrarre sottosuccessioni convergenti per l'ipotesi di limitatezza e in particolare i limiti delle sottosuccessioni sono sicuramente in T perchè è chiuso.

$\square$

Questo risultato, unito al *teorema 1.9.5*, fornisce il

Corollario 3.2.4. (Weierstrass) *Detto* (X, τ) *uno spazio topologico compatto non vuoto, sia* $f : X \to \mathbb{R}$ *una funzione continua rispetto alla topologia euclidea su* $\mathbb{R}$*. Allora,* f *ammette massimo e minimo.*

Inoltre, grazie ad esso, la *prop. 2.4.5* si specializza nella seguente forma:

Teorema 3.2.5. (Cantor) *Sia* I_n *una successione di intervalli chiusi e limitati decrescente rispetto all'inclusione; valga cioè*

$$I_0 = [a_0, b_0] \supseteq I_1 = [a_1, b_1] \supseteq \cdots \supseteq I_k = [a_k, b_k] \supseteq \cdots$$

Allora, se $\forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}$ *tale che*

$$b_n - a_n < \frac{1}{10^N}$$

esiste un unico numero $x^* \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$x^* \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$$

È inoltre vero che $x^* = \sup_n a_n = \inf_n b_n$*.*

Tale risultato, in effetti, è storicamente importante: esso, infatti, costituisce un modo alternativo di dire che $\mathbb{R}$ è uno spazio completo.

3.3 Punti limite

Ci resta da provare che, in $\mathbb{R}^n$, le successioni non solo caratterizzano i suoi chiusi, come in ogni spazio primo numerabile, ma li *determinano*. Introduciamo, a tal fine, un nuovo concetto:

Definizione 3.3.1. *Data una successione* $(\boldsymbol{x}_n)$ *a valori in* $\mathbb{R}^n$*, diciamo che* $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ *è un suo* punto limite *se esiste una sua sottosuccessione* $(\boldsymbol{x}_{n_p})$ *convergente a* $\boldsymbol{x}_0$*. Chiamiamo* insieme limite $\omega(\boldsymbol{x}_n)$ *di* $(\boldsymbol{x}_n)$ *l'insieme dei suoi punti limite.*

È immediato notare che

Proposizione 3.3.2. *Sia* $(\boldsymbol{x}_n)$ *una successione a valori in* $\mathbb{R}^n$*. Allora*

i. essa è priva di punti limite se e solo se $\lim_n |\boldsymbol{x}| = +\infty$*;*

ii. se $(\boldsymbol{x}_n)$ è limitata, ha un unico punto limite, diciamo ℓ, se e solo se $\lim_n \boldsymbol{x}_n = \ell$.

Dimostrazione. Il punto *i.* é un facile corollario del Teorema di Bolzano-Weierstrass; per il punto *ii.*, basta considerare che, se $\lim_n \boldsymbol{x}_n = x$, ogni sottosuccessione converge ad ℓ; viceversa, se $(\boldsymbol{x}_n)$ non ha converge a ℓ, esiste un $\epsilon > 0$ per cui $|\boldsymbol{x}_n - \ell| > \epsilon$ frequentemente: allora, la successione $(\boldsymbol{x}_{n_p})$ dei punti distanti da ℓ almeno ϵ ammette, per la limitatezza di $(\boldsymbol{x}_n)$, una sottosuccessione che converge, necessariamente, a $\ell' \neq \ell$. □

Proposizione 3.3.3. *Sia $(\boldsymbol{x}_n)$ una successione a valori in $\mathbb{R}^n$. Allora*

$$\omega(\boldsymbol{x}_n) = \bigcap_{m=0}^{\infty} \overline{\{\boldsymbol{x}_n \mid n > m\}}$$

Dimostrazione. Diciamo $\overline{C_m} = \overline{\{\boldsymbol{x}_n \mid n > m\}}$. Che $\omega(\boldsymbol{x}_n)$ stia nell'intersezione è ovvio: se infatti $x \in \omega(\boldsymbol{x}_n)$, esiste una sottosuccessione $(\boldsymbol{x}_{n_p})$ di cui esso è limite; ma, definitivamente, $n_p > m$ per ogni m, per cui dev'essere, per ogni m, $x \in \overline{C_m}$.
Per l'inclusione inversa, prendiamo un punto $x \in \bigcap_{m=0}^{\infty} \overline{C_m}$: ci serve trovare una sottosuccessione che converga a x. Per costruirla consideriamo la successione delle palle $B_{\frac{1}{m+1}}(x)$ al variare di $m \in \mathbb{N}$: per ipotesi, troveremo sempre un $n_m > m$ tale che $\boldsymbol{x}_{n_m} \in B_{\frac{1}{m+1}}(x)$. Se abbiamo l'accortezza di prendere, induttivamente, $n_{m+1} > n_m$, la successione $(\boldsymbol{x}_{n_m})$ è quella cercata. □

Concludiamo con la proprietà cercata:

Teorema 3.3.4. *Un sottoinsieme C non vuoto di $\mathbb{R}^n$ è chiuso se e solo se esiste una successione $(\boldsymbol{x}_n)$ a valori in C tale che $\omega(\boldsymbol{x}_n) = C$.*

Dimostrazione.

$\Leftarrow$) Segue subito dalla proposizione precedente, essendo $\omega(\boldsymbol{x}_n)$ intersezione di chiusi.

$\Rightarrow$) È noto che $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}^n|$: pertanto, esiste una successione $(\boldsymbol{q}_n)$ che numera i punti di $\mathbb{Q}^n$. Inoltre, $\mathbb{Q}^n$ è denso in $\mathbb{R}^n$, ragion per cui ogni punto $\boldsymbol{x} \in C$ è limite di una successione $(\boldsymbol{q}_{n_p})$ di punti a coordinate razionali. Se ad essa associamo la successione $(\boldsymbol{x}_{n_p})$ tale che $\boldsymbol{x}_{n_p}$ sia il punto di C meno distante da $(\boldsymbol{q}_{n_p})$, è chiaro che anche $(\boldsymbol{x}_{n_p})$ convergerà a $\boldsymbol{x}$. Facciamolo, definendo $(\boldsymbol{x}_n)$ come la successione dei punti in C tali che

$$|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{q}_n| < d(C, \boldsymbol{q}_k) + \frac{1}{k}$$

dove aggiungere $\frac{1}{k}$ è utile a evitarci di controllare (anche se è vero) che $d(C, \boldsymbol{q}_k) = \inf_{c \in C} |c - \boldsymbol{q}_k|$ sia effettivamente in C. Allora vale, tornando alla sottosuccessione $(\boldsymbol{x}_{n_p})$,

$$|\boldsymbol{x}_{n_p} - q_{n_p}| < |n - q_{n_p}| + \frac{1}{n_p}$$

che mostra proprio che $(\boldsymbol{x}_{n_p})$ converge a $\boldsymbol{x}$.

□

3.4 Funzioni reali

Passiamo velocemente in rassegna alcuni risultati notevoli sulle funzioni a valori in $\mathbb{R}$.

Teorema 3.4.1. *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione continua in $\boldsymbol{x}_0$, per cui $f(\boldsymbol{x}_0) > 0$. Allora $\exists U(\boldsymbol{x}_0)$ per cui, $\forall \boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{x}_0)$, $f(\boldsymbol{x}) > 0$.*[15]

Dimostrazione. Per la definizione di continuità prendiamo $V(f(\boldsymbol{x}_0)) = (\frac{1}{2}f(\boldsymbol{x}_0), \frac{3}{2}f(\boldsymbol{x}_0))$: sappiamo allora che esiste un intorno $U(\boldsymbol{x}_0)$ per cui $f(U(\boldsymbol{x}_0)) \subseteq V(f(\boldsymbol{x}_0))$, da cui la tesi. □

Corollario 3.4.2. (Bolzano) *Sia f continua in $\boldsymbol{x}_0$, e per ogni intorno di $\boldsymbol{x}_0$ vi siano punti per cui $f(\boldsymbol{x}) > 0$ e $f(\boldsymbol{x}) < 0$, allora: $f(\boldsymbol{x}_0) = 0$*

Dimostrazione. Possiamo considerare il lim sup e il lim inf per $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0$, e per la continuità devono coincidere, da cui la tesi. □

Teorema 3.4.3. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione crescente*[16]*, allora si ha che:*

i. *$f((a,b)) = (f(a), f(b))$, e l'estremo $f(a) = c$ (risp. $f(b) = d$) è incluso se e solo se a (risp. b) è incluso in (a,b);*

ii. *se $f((a,b)) = (c,d)$ è biettiva, f^{-1} è continua e crescente.*

Dimostrazione. i. Che l'immagine sia l'intervallo (c,d) non ha bisogno di essere dimostrato, perché segue dal fatto che una funzione continua manda connessi in connessi. Per monotonia sappiamo che se $a \in U$ allora $\forall x \in (a,b)$, $f(a) < f(x)$, ovvero $f(a)$ è il $\min(Imgf)$. Quindi, in particolare, se $a \notin U$, abbiamo che $c = f(a)$, è l'estremo inferiore dell'immagine di f
ii. Essendo in particolare f iniettiva, $\exists f^{-1} : (c,d) \to (a,b)$ e presi $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2 \in (c,d)$ tale che $y_1 < y_2$ abbiamo per la monotonia che $x_1 < x_2$ ed essendo f definita su (c,d) ammette tutti i valori tra l'estremo superiore e l'estremo inferiore e quindi è continua. □

Proposizione 3.4.4. *Sia $f : \mathbb{R} \in \mathbb{R}$ iniettiva tale che, $\forall X \subseteq \mathbb{R}$ compatto, $f(X)$ è compatto. Allora f è continua.*

In particolare, i due risultati che seguono forniscono caratterizzazioni ulteriori per la continuità delle funzioni reali.

Dimostrazione. (Novaga) In $\mathbb{R}$, un insieme è compatto se e solo se è chiuso è limitato: cioè, per ogni punto $x \in X$, esiste una successione (x_n) convergente a x. Ma l'insieme

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} x_n \cup x$$

[15] Risultato analogo, vale ovviamente con il $<$.
[16] Risultato analogo vale per le funzioni decrescenti.

è, banalmente, compatto: per ipotesi, è compatto anche

$$f(Y) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) \cup f(x)$$

Supponiamo perciò che f non sia continua: allora, dovrebbe esistere un $x \in \mathbb{R}$ tale che sia

$$\lim_n f(x_n) = y \neq f(x)$$

Sia $y = f(x_{\overline{n}})$; ma l'insieme $Y \setminus \{x_{\overline{n}}\}$ è ancora compatto: peccato non lo sia la sua immagine in quanto, per l'iniettività di f, non esiste alcun altro $x' \in Y$ tale che valga $f(x') = f(x_{\overline{n}})$, cosicché la successione $(f(x_n))$ non converge in $f(Y \setminus \{x_{\overline{n}}\})$. □

Ma c'è di più, come mostra il seguente

Teorema 3.4.5. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sono equivalenti:*

i. f è continua;

ii. f manda connessi in connessi e compatti in compatti.

Dimostrazione. L'unica implicazione che dobbiamo provare è *ii.* $\Rightarrow$ *i.*. Cioè, fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, vogliamo mostrare che f è continua in x_0. Per farlo, costruiamo la successione (I_n) (con $n > 0$) di intervalli della forma

$$\left[x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right]$$

che sappiamo essere connessi e compatti. Pertanto, l'ipotesi ci garantisce che sia formata di connessi e compatti anche la successione degli $(f(I_n))$: varrà quindi $f(I_n) = [a_n, b_n]\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Inoltre, per come sono inscatolati gli I_n (e quindi le loro immagini), le successioni $(a_n), (b_n)$ devono convergere, diciamo ad a, b: di qui, segue

$$f(I_n) \xrightarrow{n} [a, b] \subseteq f(I_n)\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Sarebbe bello che tale intervallo fosse in realtà ridotto a un punto, cioè valesse $a = b$; supponiamo non lo sia: allora $\exists y \in [a, b]$ con $y \neq f(x_0)$ che, per la connessione e compattezza di $[a, b]$, si accumula in esso. Vale a dire, esiste una successione (y_n) a valori in $[a, b]$ tendente a y, con $y_n \neq y\ \forall n \in \mathbb{N}$: ma allora, in particolare, ricordando che

$$[a, b] \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} f(I_k)$$

è ogni $y_k = f(x_k)$ per qualche $x_k \in I_k$: cioè, alla successione degli y_n se ne trova associata una (x_n) che, per costruzione, tende a x_0. Tuttavia, $(x_n) \cup \{x_0\}$ è compatto, e per ipotesi dev'esserlo anche la sua immagine $C = (f(x_n) = y_n) \cup \{f(x_0) \neq y\}$; ma sicuramente non

lo è, considerando che $y_n \xrightarrow{n} y \notin C$, e questo è assurdo.
Allora si ha necessariamente $a = b$, e non può che essere $a = f(x_0)$, valendo

$$f(x_0) \in \bigcap_n f(I_n)$$

Pertanto, è chiaro che a_n e b_n tendono entrambe a $f(x_0)$ e, definitivamente, distano da $f(x)$ meno di ϵ, $\forall \epsilon > 0$. Ciò dimostra la continuità di f in x_0: dall'arbitrarietà della sua scelta si ottiene la tesi. □

Proposizione 3.4.6. *Ogni applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è continua.*

Dimostrazione. Sia $(\mathbf{x}_n)$ una successione che converge a $\ell \in \mathbb{R}^n$. Vogliamo dimostrare che, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ per cui, se $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\ell}| < \delta$, allora $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{\ell})| < \epsilon$. Essendo f un'applicazione lineare, consideriamo la matrice associata A e, su di essa, definiamo

$$\|A\| \equiv \sup_{|\boldsymbol{x}|=1} |A\boldsymbol{x}| = \sup_{\boldsymbol{x} \neq 0} \frac{|A\boldsymbol{x}|}{|\boldsymbol{x}|}$$

Otteniamo allora

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{\ell})| = |A\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{\ell}| = |A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\ell})| \leq \|A\| \cdot |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\ell}|$$

e, a patto di prendere $\delta = \frac{\epsilon}{\|A\|}$, abbiamo la tesi. □

3.5 Struttura algebrica di $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}^n)$

Sappiamo già, dallo studio degli spazi metrici, che l'insieme $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}^n)$ delle funzioni continue da un intervallo chiuso e limitato della retta reale a valori in $\mathbb{R}^n$ è uno spazio metrico completo con la distanza uniforme. In questo paragrafo, tuttavia, vogliamo indagarne le proprietà algebriche: per farlo, ci basterà notare esplicitamente la continuità di alcune funzioni.

Proposizione 3.5.1. *Sono continue le seguenti endofunzioni di $\mathbb{R}^n$:*

i. *la somma* $+ : (x, y) \mapsto x + y$;

ii. *il prodotto* $\cdot : (x, y) \mapsto xy$.

iii. *l'inf* $\cap : (x, y) \mapsto \min\{x, y\}$

iv. *il sup* $\cup : (x, y) \mapsto \max\{x, y\}$

Dimostrazione. Le dimostrazioni sono immediate: le verifiche della *i.* e della *ii.*, analoghe, sono lasciate per esercizio. Per le due rimanenti, è sufficiente riscrivere

$$\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$$

$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$$

per ottenere immediatamente la continuità dalla *i.* e dal teorema di composizione. □

Il teorema di composizione, in particolare, rende facile la verifica del

Lemma 3.5.2. *Siano f, g funzioni continue a valori in $\mathbb{R}^n$. Sono allora continue:*

i. *la somma $f + g$, tale che $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;*

ii. *il prodotto $f \cdot g$, tale che $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$;*

iii. *l'inf $f \cap g$ e il sup $f \cup g$, con analoghe definizioni.*

Esso, perciò, ci garantisce che, rispetto a tali operazioni, lo spazio delle funzioni continue è chiuso. Pertanto, a patto di dare per buone ulteriori verifiche davvero immediate, possiamo affermare senza problemi che

Teorema 3.5.3. *Lo spazio $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^n)$ è*

- *uno spazio vettoriale, con la somma e il prodotto per valori di $\mathbb{R}^n$;*
- *un anello, con la somma e il prodotto;*
- *un reticolo, con l'inf e il sup.*

*In particolare, la coerenza delle strutture di spazio vettoriale e anello lo rende un'*algebra. *Per il fatto, poi, che è uno spazio vettoriale (in particolare, un'algebra) e anche, senza conflitto, uno spazio metrico completo, lo diciamo uno* spazio (*risp., un'*algebra) di Banach.[17]

3.6 Il teorema di Picard-Lindelöf

Chiudiamo queste dispense con il teorema di esistenza e unicità per le equazioni differenziali ordinarie: esso, lo si noterà leggendo la dimostrazione, è il perfetto esempio di come l'uso degli oggetti topologici qui introdotti renda raggiungibili, in maniera elegante, fondamentali risultati analitici.

Teorema 3.6.1. (Picard-Lindelöf) *Sia f una funzione definita in un intorno del punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ della forma $\overline{I(x_0)} \times \overline{B(y_0)}$, con $[x_0 - a, x_0 + a] = \overline{I(x_0)} \in \mathbb{R}$, $\overline{(y_0 - b, y_0 + b) = I(y_0)} \in \mathbb{R}^n$, tale che*

i. *f è continua in x;*

ii. *f è lipschitziana rispetto a y, con costante di Lipschitz C[18].*

Allora, esiste una e una sola soluzione al problema di Cauchy

$$\Theta = \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

[17] Si prenda quest'ultima affermazione, su cui, per ora, non abbiamo intenzione di approfondire, col beneficio di inventario.

[18] Vale a dire, in questo caso, $\|f(x, y) - f(x, y')\| \leq C \cdot \|y - y'\| \ \forall x \in I, y \in B$.

Dimostrazione. Vorremmo sfruttare il teorema di Banach-Caccioppoli: l'idea, in particolare, è quella di costruire una contrazione F il cui unico punto fisso sia proprio la soluzione y di Θ.
Per farlo, diciamo $M = \sup\{|f(x,y)| : (x,y) \in I \times B\}$ che é, in effetti, il $\max\{|f(x,y)| : (x,y) \in I \times B\}$ per il teorema di Weierstrass, essendo $I \times B$ compatto; prendiamo inoltre, per motivi che capiremo a breve, $\delta = \min\{\frac{b}{M}, a, \frac{1}{C}\}$, e $I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.
Consideriamo lo spazio

$$(\mathcal{C}(I_\delta, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$$

delle funzioni $f : I_\delta \to \mathbb{R}^n$ continue con la distanza del sup, che abbiamo già mostrato essere uno spazio completo: per il fatto che un sottoinsieme chiuso di uno spazio completo è anch'esso completo, possiamo restringerci alla sua palla chiusa

$$\overline{B_b(y_0)} = \{y \in (\mathcal{C}(I_\delta, \mathbb{R}^n) \mid \|y - y_0\|_\infty \leq b\}$$

contenente tutte le funzioni y distanti da y_0 al massimo b. Definiamo, adesso, la funzione $\Gamma : B_b(y_0) \to B_b(y_0)$ descritta, $\forall y \in B_b(y_0)$, da

$$\Gamma(y(x)) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(t))dt$$

Verifichiamo allora che

Γ *è ben definita.* Cioè, in particolare, ci interessa che $\Gamma(y)$ stia effettivamente in $B_b(y_0)$ $\forall y \in B_b(y_0)$. Ciò equivale a vedere che sia, per ogni y,

$$\|\Gamma(y) - y\|_\infty \leq b$$

Ma notiamo che vale, $\forall x \in I_\delta$,

$$|\Gamma(y(x)) - y| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x, y(t))dt\right| \leq \int_{x_0}^{x} |f(x, y(t))|dt$$

da cui, essendo $|f(x, y(t))| \leq M$ per come M è definito,

$$\int_{x_0}^{x} |f(x, y(t))|dt \leq M \cdot |x - x_0| \leq M\delta$$

e, avendo noi argutamente definito δ perché fosse minore di $\frac{M}{b}$, otteniamo $M\delta \leq b$: di qui, passando al sup, si ha la tesi.

Γ *è una contrazione.* Ci serve, cioè, che Γ sia continua secondo Lipschitz di costante $L < 1$; deve perciò valere, $\forall y_1, y_2 \in B_b(y_0)$,

$$\|\Gamma(y_1) - \Gamma(y_2)\|_\infty \leq L \cdot \|y_1 - y_2\|_\infty$$

Analogamente, guardiamo la situazione al variare di x in I_δ, e serviamoci della lipschitzianità di $f(x, y)$:

$$\begin{aligned} |\Gamma(y_1(x)) - \Gamma(y_2(x))| &= \left| \int_{x_0}^{x} \Big(f(x, y_1(t)) - f(x, y_2(t)) \Big) dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^{x} |f(x, y_1(t)) - f(x, y_2(t))| dt \\ &\leq \int_{x_0}^{x} C \cdot |y_1(t) - y_2(t)| dt \end{aligned}$$

Possiamo allora maggiorare $|y_1(t) - y_2(t)|$ con $\|y_1 - y_2\|_\infty$, ottenendo

$$\int_{x_0}^{x} C \cdot |y_1(t) - y_2(t)| dt \leq C \cdot (x - x_0) \|y_1 - y_2\|_\infty \leq C\delta \cdot \|y_1 - y_2\|_\infty$$

Di qui, passando al sup della distanza iniziale,

$$\|\Gamma(y_1(x)) - \Gamma(y_2(x))\|_\infty \leq C \cdot \delta \cdot \|y_1 - y_2\|_\infty$$

che, poiché abbiamo scelto δ *anche* più piccolo di $\frac{1}{C}$, ci dà proprio $C\delta \leq 1$: porre $C\delta = L$ esplicita la tesi.

Pertanto, applicando il teorema del punto fisso, otteniamo che $\exists! \theta \in B_b(y_0)$ con la proprietà che $\Gamma(\theta) = \theta$, cioè tale che valga

$$\theta(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \theta(t)) dt$$

Il che vuol dire, esattamente, che θ risolve il problema di Cauchy Θ. $\square$

[18] Un'ultima nota: questo risultato si può, in effetti, estendere a un caso più generale, a patto di sacrificare l'unicità delle soluzioni, tramite il *Teorema di Peano*. Per una diffusa trattazione del teorema, si rimanda alle dispense indicate in *http://poisson.phc.dm.unipi.it/~cvillani/appunti.html*.