



# UNIVERSITÀ DI PISA

## Dualità di Poincaré-Alexander-Lefschetz

Relatore: Prof. Roberto Frigerio  
Candidato: Samuele Saviozzi

Corso di Laurea Triennale in Matematica  
Università di Pisa

---

Anno accademico: 2019/2020

## Sommario

L'obiettivo della tesi è dimostrare la dualità di Poincaré-Alexander-Lefschetz per l'omologia singolare per varietà compatte orientabili e usarla per provare alcuni risultati relativi agli spazi proiettivi. La dualità di Poincaré-Alexander-Lefschetz è una generalizzazione del teorema più classico conosciuto come *dualità di Poincaré*, che afferma l'esistenza di un isomorfismo

$$H^p(M) \xrightarrow{\cong} H_{n-p}(M),$$

dove  $M$  è una  $n$ -varietà senza bordo compatta e orientabile.

L'introduzione contiene alcuni richiami agli oggetti che verranno usati nella tesi, a partire dalle varietà topologiche, delle quali vengono calcolati alcuni gruppi di omologia. Vengono inoltre introdotti i limiti diretti, oggetti algebrici necessari per enunciare il teorema di dualità.

Il secondo capitolo è dedicato a costruire dei prodotti tra i gruppi di omologia e coomologia di una varietà. Si inizia costruendo il prodotto vettoriale in omologia e coomologia, arrivando a dimostrare il Teorema di Eilenberg-Zilber, che afferma l'equivalenza omotopica tra i due complessi di catene  $\Delta_\bullet(X \times Y)$  e  $\Delta_\bullet(X) \otimes \Delta_\bullet(Y)$  per due spazi topologici  $X$  e  $Y$ . Usando il prodotto vettoriale si costruisce il prodotto *cup* tra gruppi di coomologia, e si dimostra che con tale prodotto il modulo graduato di coomologia diventa un anello graduato. Si conclude il capitolo costruendo il prodotto *cap* tra coomologia e omologia, il quale sarà fondamentale per enunciare il teorema di dualità.

Il terzo capitolo introduce il concetto di orientazione per le varietà. Verrà data una definizione di orientazione in termini di gruppi locali di omologia, inquadrando l'orientazione di una varietà come una mappa che ad ogni punto della varietà associa un generatore di un tale gruppo locale. Verrà poi introdotta, usando il limite diretto, una particolare coomologia per le varietà. Seguono poi l'enunciato e la dimostrazione della dualità di Poincaré-Alexander-Lefschetz e di alcuni corollari immediati. Il capitolo si conclude con la trattazione della dualità nel caso di varietà con bordo.

Nel quarto ed ultimo capitolo la dualità dimostrata nel capitolo precedente viene applicata per dimostrare alcuni risultati relativi alla topologia di alcune varietà. Una prima parte si dedica alla trattazione degli spazi proiettivi, dove viene dimostrato ad esempio che gli spazi proiettivi reali di dimensione pari non possono essere il bordo di una varietà compatta. L'ultima parte è dedicata alla costruzione della *sfera di Poincaré*, una 3-varietà compatta non semplicemente connessa con la stessa omologia della 3-sfera.

---

# INDICE

<b>Sommario</b>	<b>1</b>
<b>1 Introduzione</b>	<b>3</b>
1.1 Varietà topologiche . . . . .	3
1.2 Omologia di una varietà topologica . . . . .	4
1.3 Limite diretto . . . . .	7
<b>2 Prodotti vettoriale, cup e cap</b>	<b>9</b>
2.1 Prodotto vettoriale . . . . .	10
2.1.1 Prodotto vettoriale in omologia . . . . .	10
2.1.2 Prodotto vettoriale in coomologia . . . . .	13
2.2 Prodotto cup . . . . .	14
2.3 Prodotto cap . . . . .	18
2.3.1 Relazione tra prodotto cap e prodotto cup . . . . .	21
<b>3 Dualità di Poincaré-Alexander-Lefschetz</b>	<b>22</b>
3.1 Orientazione . . . . .	22
3.2 Lemmi di commutatività . . . . .	26
3.3 Dualità di Poincaré-Alexander-Lefschetz . . . . .	30
3.4 Dualità su varietà compatte con bordo . . . . .	32
<b>4 Applicazioni della dualità di Poincaré</b>	<b>35</b>
4.1 Spazi proiettivi . . . . .	35
4.2 Sfera di Poincaré . . . . .	37

---

---

# CAPITOLO 1

---

## INTRODUZIONE

In questo capitolo introduttivo presenteremo le varietà topologiche, dandone una definizione e andando ad analizzarne alcune proprietà che ci serviranno poi per enunciare e dimostrare il teorema al centro di questa discussione.

### 1.1 Varietà topologiche

Presentiamo le varietà topologiche, dandone la seguente:

**Definizione 1.1.** Una *n*-varietà topologica è uno spazio di Hausdorff per il quale ogni punto ha un intorno omeomorfo ad un *n*-spazio euclideo (equivalentemente ad un aperto di un *n*-spazio euclideo).

Per ogni punto  $x$  della varietà è possibile introdurre un sistema di coordinate locali sfruttando l'omeomorfismo  $x \in U \simeq \mathbb{R}^n$ , dove  $U$  è un intorno di  $x$ . Muovendosi nella varietà sarà quindi necessario passare da un sistema di coordinate locali all'altro. In genere il cambio di coordinate è una funzione continua, spesso però viene richiesto che sia differenziabile.

**Definizione 1.2.** Una *n*-varietà topologica si dice *liscia* o *differenziabile* se è uno spazio di Hausdorff secondo numerabile  $M^n$  insieme con una collezione di mappe, dette "carte", tali che

1. Una carta è un omeomorfismo  $\phi : U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^n$  dove  $U$  è aperto in  $M^n$  e  $U'$  è aperto in  $\mathbb{R}^n$ .

2. Ogni punto  $x \in M^n$  è nel dominio di una carta.
3. Per due carte  $\phi : U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\psi : V \rightarrow V' \subset \mathbb{R}^n$  si ha che il “cambio di coordinate”

$$\phi\psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$$

è  $C^\infty$ .

4. La collezione di carte con proprietà da 1 a 3 è massimale.

Una collezione di carte con le proprietà (1), (2) e (3) è detta **atlante**.

Diamo adesso una definizione classica di varietà orientata.

**Definizione 1.3.** Una  $n$ -varietà, insieme con un atlante tale che per ogni coppia di carte  $\phi$  e  $\psi$  il cambio di coordinate  $\phi\psi^{-1}$  ha Jacobiano con determinante positivo in ogni punto del dominio, è detta **orientata**. Un atlante massimale con tale proprietà è detto **orientazione della varietà**. Inoltre, una varietà che ammette un'orientazione si dice **orientabile**.

In seguito daremo una seconda definizione di varietà orientata valida anche per varietà non lisce.

Concludiamo la sezione con la seguente:

**Definizione 1.4.** Una  $n$ -varietà topologica con bordo è definita come nella Definizione 1.2 con la differenza che il codominio delle carte è il semispazio  $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq 0\}$ . Il suo **bordo** è la  $(n-1)$ -varietà che consiste in quei punti mappati in  $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$  da una carta.

## 1.2 Omologia di una varietà topologica

Vediamo come l'omologia può essere usata per ottenere utili informazioni sulla dimensione di una varietà topologica qualunque. Siano  $M$  una varietà topologica di dimensione  $n$ ,  $x \in M$ ,  $U \subset M$  aperto tale che  $x \in U$ ,  $U \simeq \mathbb{R}^n$ . Sia  $G$  un qualsiasi gruppo abeliano e consideriamo il gruppo di omologia locale  $H_i(M, M - \{x\}; G)$ : abbiamo la seguente successione di uguaglianze

$$\begin{aligned} H_i(M, M - \{x\}; G) &\simeq H_i(U, U - \{x\}; G) && \text{(escissione)} \\ &\simeq H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}; G) \\ &= H_{i-1}(\mathbb{R}^n - \{0\}; G) && (\mathbb{R}^n \text{ è contraibile}) \\ &\simeq H_{i-1}(S^{n-1}; G) && (\mathbb{R}^n - \{0\} \simeq S^{n-1}). \end{aligned}$$

La dimensione di una varietà topologica è quindi intrinsecamente caratterizzata da essere l'unico intero  $n$  tale che l' $n$ -esimo gruppo di omologia locale  $H_n(M, M - \{x\}) = G$  (se  $n = 1$  usiamo l'omologia ridotta  $\widetilde{H}_*(M, M - \{x\})$ ).

Questo vale anche se invece di  $\{x\}$  consideriamo un qualunque sottospazio compatto e convesso  $A \subset M$ , dove con *convesso* si intende che  $\exists U \subset M$  aperto e

$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  omeomorfismo tali che  $A \subset U$  e  $\varphi(A)$  è convesso in  $\mathbb{R}^n$ . Sia  $x \in A$ , per la compattezza di  $A$  esiste un  $n$ -disco  $D$  tale che  $A \subset D^0 \subset D \subset U \simeq \mathbb{R}^n$  e per convessità di  $A$  si ha che  $\forall x \in A$  l'insieme  $\mathbb{R}^n \setminus A$  si retrae per deformazione su  $\mathbb{R}^n - \{x\}$ . Consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(M, M \setminus A; G) & \xrightarrow{j_*} & H_n(M, M - \{x\}) \\ \simeq \uparrow & & \simeq \uparrow \\ H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A) & \longrightarrow & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{x\}) \\ \simeq \uparrow & & \simeq \uparrow \\ H_n(D, \partial D) & \xrightarrow{\simeq} & H_n(D, \partial D) \end{array}$$

dove  $j_*$  è l'omomorfismo indotto dall'inclusione e  $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{x\}) \simeq H_n(D, \partial D)$  per omotopia, e quindi poiché  $A$  è convesso vale anche  $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A) \simeq H_n(D, \partial D)$ . I gruppi nell'ultima riga sono  $G$ , di conseguenza anche  $H_n(M, M \setminus A) \simeq G$ . In particolare la mappa

$$i_* : H_i(M, M \setminus A; G) \rightarrow H_i(M, M - \{x\}; G)$$

è un isomorfismo.

Vogliamo adesso dimostrare il seguente:

**Teorema 1.5.** *Se  $M$  è una varietà topologica di dimensione  $n$ , allora  $H_i(M) = 0$ ,  $i > n$ .*

Questo segue facilmente dal fatto che  $M$  ha una struttura di complesso CW, cosa nota ma difficile da mostrare. Forniamo quindi una dimostrazione più diretta del teorema. Per alleggerire la notazione da qui in avanti scriveremo  $H_i(X; G) = H_i(X)$ .

**Lemma 1.6.** *Se  $U \subset \mathbb{R}^n$  è aperto, allora  $H_i(U) = 0$ ,  $\forall i \geq n$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo  $i > n$ ,  $\alpha \in H_i(U)$ . Se  $\alpha = [z]$ ,  $z = \sum a_i z_i$ , esiste  $K \subset U$  compatto tale che  $Im(z) = \cup Im(z_i) \subset K$ . Si ha quindi che  $\alpha$  appartiene all'immagine tramite la mappa indotta dall'inclusione di  $H_i(K)$  in  $H_i(U)$  per qualche  $K \subset U$  compatto. Si scelga adesso una griglia cubica in  $\mathbb{R}^n$  tale che l'unione  $L$  di un numero finito di cubi chiusi soddisfi la relazione  $K \subset L \subset U$ . La griglia fornisce una decomposizione CW di  $\mathbb{R}^n$  e  $L$  è unione finita di  $n$ -celle, pertanto  $H_i(\mathbb{R}^n, L) = 0$ ,  $i > n$ . Considerando la sequenza di omologia relativa per uno spazio topologico  $X$  ed un suo sottospazio  $A \subset X$

$$\cdots \rightarrow H_i(A) \rightarrow H_i(X) \rightarrow H_i(X, A) \rightarrow H_{i-1}(A) \rightarrow \cdots$$

ponendo  $X = \mathbb{R}^n$  e considerando  $L, U \subset \mathbb{R}^n$ , dato che  $H_i(\mathbb{R}^n) = 0$ , otteniamo

$$H_{i+1}(\mathbb{R}^n, L) \simeq H_i(L)$$

$$H_{i+1}(\mathbb{R}^n, U) \simeq H_i(U), \quad i > 0.$$

Consideriamo ora il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} H_{i+1}(\mathbb{R}^n, L) & \longrightarrow & H_{i+1}(\mathbb{R}^n, U) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ H_i(L) & \longrightarrow & H_i(U) \end{array}$$

dove le frecce verticali sono isomorfismi, per cui  $H_i(L) \simeq H_{i+1}(\mathbb{R}^n, L) = 0, i \geq n$ . Dato che  $K \subset L$ ,  $\alpha$  sta nell'immagine di  $H_i(L)$  in  $H_i(U)$  e il lemma è dimostrato.  $\square$

**Corollario 1.7.** *Siano  $M$  una varietà topologica di dimensione  $n$ ,  $U_1, \dots, U_r \subset M$  aperti tali che  $U_j \simeq \mathbb{R}^n \quad \forall j$ , allora  $H_i(U_1 \cup \dots \cup U_r) = 0 \quad \forall i > n$ .*

*Dimostrazione.* Procediamo per induzione su  $r$ . Il caso base  $r = 1$  è ovvio. Per il passo induttivo  $r - 1 \Rightarrow r$  considero la sequenza di Mayer-Vietoris

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_i(U_1 \cup \dots \cup U_{r-1}) \oplus H_i(U_r) &\rightarrow H_i(U_1 \cup \dots \cup U_r) \rightarrow \\ &\rightarrow H_{i-1}((U_1 \cup \dots \cup U_{r-1}) \cap U_r) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Il primo gruppo è uguale a 0 per ipotesi induttiva, l'ultimo gruppo è uguale a 0 per il lemma precedente ( $i > n$ ), pertanto è 0 anche il gruppo al centro.  $\square$

Possiamo adesso dimostrare il teorema enunciato all'inizio della sezione.

*Dimostrazione Teorema 1.* Sia  $\alpha \in H_i(M), i > n$ . Per compattezza  $\alpha$  ha immagine in un certo  $K \subset M$  compatto, quindi  $\alpha$  appartiene all'immagine tramite la mappa indotta dall'inclusione di  $H_i(K)$  in  $H_i(M)$ . Ricopro  $K$  con finiti aperti  $U_1, \dots, U_r$ , tutti omeomorfi a  $\mathbb{R}^n$ , dunque  $\alpha$  appartiene all'immagine in  $H_i(M)$  di  $H_i(U_1 \cup \dots \cup U_r)$ , che per il corollario è uguale a 0.  $\square$

**Corollario 1.8.** *Sia  $K \subset M$  compatto, allora  $H_i(M, M \setminus K) = 0, i > n$ .*

*Dimostrazione.* Se  $K$  è abbastanza piccolo da essere contenuto in un aperto  $U \simeq \mathbb{R}^n$ , allora

$$\begin{aligned} H_i(M, M \setminus K) &\simeq H_i(U, U \setminus K) && \text{escissione} \\ &\simeq H_{i-1}(U \setminus K) && \text{sequenza di omologia relativa } (i > 1) \end{aligned}$$

e quindi è 0 se  $i > n$  per il Lemma 1.6, in quanto  $U \setminus K$  è omeomorfo ad un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . In generale possiamo ricoprire  $K$  con un numero finito di sottoinsiemi

compatti  $K = K_1 \cup \dots \cup K_r$  tali che ogni  $K_i$  è contenuto in un aperto  $U_i \simeq \mathbb{R}^n$ . Usiamo la sequenza di Mayer-Vietoris per l'omologia relativa

$$\dots \rightarrow H_i(X, U \cap V) \rightarrow H_i(X, U) \oplus H_i(X, V) \rightarrow H_i(X, U \cup V) \rightarrow \dots$$

con  $X = M$ ,  $U = M \setminus (K_1 \cup \dots \cup K_{r-1})$ ,  $V = M \setminus K_r$  e usando un argomento induttivo su  $r$  il corollario è dimostrato.  $\square$

### 1.3 Limite diretto

Introduciamo il concetto algebrico di limite diretto. Sia  $D$  un insieme diretto e sia  $G_\alpha$  un gruppo abeliano per ogni  $\alpha \in D$ . Per ogni  $\beta > \alpha$  in  $D$  supponiamo siano dati omomorfismi  $f_{\beta,\alpha} : G_\alpha \rightarrow G_\beta$  con la proprietà che per ogni  $\gamma > \beta > \alpha$  si ha  $f_{\gamma,\beta} \circ f_{\beta,\alpha} = f_{\gamma,\alpha}$ . Un tale sistema viene detto **sistema diretto** di gruppi abeliani.

**Definizione 1.9.** Sia  $\{G_\alpha, f_{\beta,\alpha}\}$  un sistema diretto. Il **limite diretto**  $G = \varinjlim G_\alpha$  è definito come il quoziente della somma diretta  $\bigoplus G_\alpha$  modulo le relazioni  $f_{\beta,\alpha}(g) \sim g$  per ogni  $g \in G_\alpha$  e per ogni  $\beta > \alpha$ .

Notiamo anche che l'inclusione  $G_\alpha \hookrightarrow \bigoplus G_\alpha$  induce omomorfismi  $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow \varinjlim G_\alpha$  tali che  $i_\beta \circ f_{\beta,\alpha} = i_\alpha$ . Il limite diretto è anche caratterizzato da una proprietà universale, come enunciato dalla seguente:

**Proposizione 1.10.** Supponiamo sia dato un sistema diretto di gruppi abeliani  $\{G_\alpha, f_{\beta,\alpha}\}$ . Siano  $A$  un gruppo abeliano e  $h_\alpha : G_\alpha \rightarrow A$  omomorfismi tali che  $\beta > \alpha \implies h_\beta \circ f_{\beta,\alpha} = h_\alpha$ . Allora esiste un unico omomorfismo  $h : \varinjlim G_\alpha \rightarrow A$  tale che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} G_\alpha & \xrightarrow{h_\alpha} & A \\ \downarrow i_\alpha & \searrow \exists! h & \uparrow \\ \varinjlim G_\alpha & & \end{array}$$

commuta per ogni  $\alpha$ . Inoltre:

1.  $Im(h) = \{a \in A \mid a = h_\alpha(g) \text{ per qualche } g \text{ e } \alpha\} = \cup Im(h_\alpha)$ ;
2.  $Ker(h) = \{g \in \varinjlim G_\alpha \mid \exists \alpha \text{ e } g_\alpha \in G_\alpha, g = i_\alpha(g_\alpha) \text{ e } h_\alpha(g_\alpha) = 0\} = \cup i_\alpha(Ker(h_\alpha))$ .

*Dimostrazione.* Definiamo  $h(g_\alpha) = h_\alpha(g_\alpha)$ . Questo definisce un omomorfismo su  $\bigoplus G_\alpha$  e rispetta la relazione d'equivalenza che definisce il limite diretto, quindi è ben definito. L'unicità è ovvia, così come la proprietà (1). La classe d'equivalenza  $g$  di  $g_\alpha \in G_\alpha$  è mandata in 0 da  $h$  se e solo se  $h_\alpha(g_\alpha) = 0$  in  $A$ , che è un altro modo di scrivere la proprietà (2).  $\square$

Un utile corollario è il seguente:



**Corollario 1.11.**  $h : \varinjlim G_\alpha \rightarrow A$  è un isomorfismo se e solo se le due seguenti ipotesi si verificano:

1. (surgettività)  $\forall a \in A, \exists \alpha \in D$  e  $g_\alpha \in G_\alpha$  tali che  $h_\alpha(g_\alpha) = a$ ;
2. (iniettività) se  $h_\alpha(g_\alpha) = 0$  allora esiste  $\beta > \alpha$  tale che  $f_{\beta,\alpha}(g_\alpha) = 0$ .

Arriviamo ora alla caratteristica più importante dei limiti diretti.

**Teorema 1.12.** Il limite diretto è un funtore esatto. In altre parole, se abbiamo dei sistemi diretti  $\{A_\alpha, f_{\beta,\alpha}\}, \{B_\alpha, g_{\beta,\alpha}\}$ , e  $\{C_\alpha, h_{\beta,\alpha}\}$  basati sullo stesso insieme diretto, e se per ogni  $\alpha$  si ha una sequenza esatta  $0 \rightarrow A_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} B_\alpha \xrightarrow{\psi_\alpha} C_\alpha \rightarrow 0$  tale che le mappe commutano con le mappe che definiscono i sistemi diretti, allora la sequenza indotta

$$0 \longrightarrow \varinjlim A_\alpha \xrightarrow{\varphi} \varinjlim B_\alpha \xrightarrow{\psi} \varinjlim C_\alpha \longrightarrow 0$$

è esatta, dove  $\varphi$  e  $\psi$  sono definite dalla proprietà universale del limite diretto con le inclusioni naturali  $i_\alpha : A_\alpha \rightarrow \varinjlim A_\alpha, j_\alpha : B_\alpha \rightarrow \varinjlim B_\alpha$ , e  $k_\alpha : C_\alpha \rightarrow \varinjlim C_\alpha$ .

*Dimostrazione.* Nella dimostrazione useremo ripetutamente il Corollario 1.11.

- *Iniettività di  $\varphi$ :* Sia  $a \in \varinjlim A_\alpha$ ,  $a = \left[ \sum_{j=1}^n a_{\alpha_j} \right]$  con  $\varphi(a) = 0$ ,  $a_{\alpha_j} \in A_{\alpha_j}$ . Poiché abbiamo un sistema diretto possiamo trovare  $\beta \geq \alpha_1, \dots, \alpha_n$  tale che  $a = [a_\beta]$  con  $a_\beta \in A_\beta$ . Per commutatività abbiamo che  $\varphi(a) = [\varphi_\beta(a_\beta)] = 0$ , ovvero esiste  $\gamma \geq \beta$  tale che  $g_{\gamma,\beta}(\varphi_\beta(a_\beta)) = 0$ . Poiché per ipotesi  $\varphi_\gamma$  è iniettiva e per commutatività  $0 = g_{\gamma,\beta}(\varphi_\beta(a_\beta)) = \varphi_\gamma(f_{\gamma,\beta}(a_\beta))$ , si ottiene che  $f_{\gamma,\beta}(a_\beta) = 0$ , e quindi  $a = [a_\beta] = [f_{\gamma,\beta}(a_\beta)] = 0$ .
- *$Im(\varphi) = Ker(\psi)$ :* osserviamo che  $\psi_\alpha \circ \varphi_\alpha = 0 \forall \alpha$  implica  $\psi \circ \varphi = 0$ , quindi  $Im(\varphi) \subset Ker(\psi)$ . Per l'altro contenimento sia  $b \in Ker(\psi)$ . Di nuovo esiste  $\beta$  tale che  $b = j_\beta(b_\beta)$  e per commutatività si ha  $0 = \psi(b) = \psi \circ j_\beta(b_\beta) = k_\beta \circ \psi_\beta(b_\beta)$ . Pertanto esiste  $\gamma \geq \beta$  tale che  $h_{\gamma,\beta} \circ \psi_\beta(b_\beta) = 0 \implies \psi_\gamma \circ g_{\gamma,\beta}(b_\beta) = 0$ . Per esattezza deduciamo che  $g_{\gamma,\beta}(b_\beta) \in Im(\varphi_\gamma)$ ,  $g_{\gamma,\beta}(b_\beta) = \varphi_\gamma(a_\gamma)$ . Applicando a entrambi i membri  $j_\gamma$  si ottiene  $j_\gamma \circ g_{\gamma,\beta}(b_\beta) = j_\gamma \circ \varphi_\gamma(a_\gamma) = \varphi \circ i_\gamma(a_\gamma)$ , quindi  $j_\gamma \circ g_{\gamma,\beta}(b_\beta) \in Im(\varphi)$ , ma  $j_\gamma \circ g_{\gamma,\beta}(b_\beta) = b \implies Ker(\psi) \subset Im(\varphi)$ .
- *Surgettività di  $\psi$ :* Sia  $c \in \varinjlim C_\alpha$ , di nuovo esiste  $\gamma$  tale che  $c = k_\gamma(c_\gamma)$ . Per esattezza si ha che esiste  $b_\gamma \in B_\gamma$  tale che  $\psi_\gamma(b_\gamma) = c_\gamma$ , e quindi per commutatività si ha  $c = k_\gamma \circ \psi_\gamma(b_\gamma) = \psi \circ j_\gamma(b_\gamma) \implies c \in Im(\psi)$ .

□

---

---

# CAPITOLO 2

---

## *PRODOTTI VETTORIALE, CUP E CAP*

Questo capitolo sarà dedicato allo studio di prodotti, o applicazioni bilineari, in omologia e coomologia. Il prodotto vettoriale verrà introdotto per definire i più importanti prodotti cup e cap, sebbene porti di per sé alcune importanti conseguenze che esulano da questa trattazione.

Siano  $A_\bullet, B_\bullet, C_\bullet$  e  $D_\bullet$  gruppi graduati, diciamo che  $f : A_\bullet \rightarrow B_\bullet$  ha **grado**  $d = \text{deg}(f)$  se  $\forall i f(A_i) \subset B_{i+d}$ . Similmente sia  $a \in A_k(X)$  un elemento omogeneo di  $A_\bullet(X)$ , indichiamo con  $\text{deg}(a)$  il **grado** (o **dimensione**) di  $a$ , i.e.  $\text{deg}(a) = k$  se e solo se  $a \in A_k(X)$ . Diamo la seguente

**Definizione 2.1.** Il *prodotto tensoriale* tra due gruppi graduati  $A_\bullet$  e  $B_\bullet$  è  $A_\bullet \otimes B_\bullet$  definito da

$$(A_\bullet \otimes B_\bullet)_n = \bigoplus_{i+j=n} A_i \otimes B_j.$$

Siano  $a \in A_k$  e  $b \in B_h$  due elementi omogenei e siano  $f : A_\bullet \rightarrow C_\bullet$  e  $g : B_\bullet \rightarrow D_\bullet$  due mappe graduate, definiamo  $f \otimes g : A_k \otimes B_h \rightarrow C_\bullet \otimes D_\bullet$  come

$$(f \otimes g)(a \otimes b) = (-1)^{\text{deg}(a)\text{deg}(g)} f(a) \otimes g(b).$$

Estendendo poi  $f \otimes g$  per linearità possiamo definire  $f \otimes g : A_\bullet \otimes B_\bullet \rightarrow C_\bullet \otimes D_\bullet$ . Siano  $X$  e  $Y$  due spazi, abbiamo quindi il complesso di catene  $\Delta_\bullet(X) \otimes \Delta_\bullet(Y)$  con l'operatore di bordo  $\partial_\otimes = \partial \otimes 1 + 1 \otimes \partial$ , il quale per gli elementi omogenei rispetta

la convenzione

$$\partial_{\otimes}(a \otimes b) = \partial a \otimes b + (-1)^{\deg(a)} a \otimes \partial b.$$

## 2.1 Prodotto vettoriale

### 2.1.1 Prodotto vettoriale in omologia

Vogliamo definire una mappa bilineare

$$\times : \Delta_p(X) \times \Delta_q(Y) \rightarrow \Delta_{p+q}(X \times Y),$$

per mezzo della quale andremo a definire il prodotto vettoriale in omologia. Sia  $x \in X$ , denotiamo con  $x$  lo 0-simplesso che manda  $e_0$  in  $x$ . Sia  $\sigma : \Delta_q \rightarrow Y$ , imponiamo che  $x \times \sigma \in \Delta_q(X \times Y)$  mandi  $w \rightarrow (x, \sigma(w))$ . Similmente per  $y \in Y$  e  $\tau : \Delta_p \rightarrow X$  imponiamo che  $\tau \times y \in \Delta_p(X \times Y)$  mandi  $w \rightarrow (\tau(w), y)$ . Abbiamo così definito  $\times$  su  $\Delta_0(X) \times \Delta_q(Y)$  e  $\Delta_p(X) \times \Delta_0(Y)$ . Per estenderlo ad indici qualsiasi usiamo il metodo dei *modelli aciclici* e dimostriamo il seguente

**Teorema 2.2.** *Esistono applicazioni bilineari  $\times : \Delta_p(X) \times \Delta_q(Y) \rightarrow \Delta_{p+q}(X \times Y)$  tali che:*

1. *Per  $x \in X, y \in Y, \sigma : \Delta_q \rightarrow Y, \tau : \Delta_p \rightarrow X, x \times \sigma$  e  $\tau \times y$  sono come sopra;*
2. *Siano  $f : X \rightarrow X', g : Y \rightarrow Y'$  e sia  $(f, g) : X \times Y \rightarrow X' \times Y'$  la mappa prodotto, allora  $(f, g)_{\Delta}(a \times b) = f_{\Delta}(a) \times g_{\Delta}(b)$ , ovvero  $\times$  è naturale (dove il  $\Delta$  a pedice indica la mappa di catene indotta);*
3. *Vale la formula per il bordo  $\partial(a \times b) = \partial a \times b + (-1)^{\deg(a)} a \times \partial b$ .*

*Dimostrazione.* Anzitutto notiamo che se uno fra  $p$  o  $q$  è zero, le richieste del teorema sono rispettate. Consideriamo l'identità  $\iota_p : \Delta_p \rightarrow \Delta_p$  come un elemento di  $\Delta_p(\Delta_p)$ . Siano  $p, q > 0$  e supponiamo di aver definito  $\times$  per  $p + q$  più piccoli. Prendiamo  $\iota_p \times \iota_q$  e calcoliamo come sarebbe il suo bordo secondo la formula in (3):

$$\partial(\iota_p \times \iota_q) = \partial \iota_p \times \iota_q + (-1)^p \iota_p \times \partial \iota_q.$$

Calcolando il bordo del membro destro di questa uguaglianza, già definito per ipotesi induttiva, vediamo che è un ciclo:

$$\begin{aligned} \partial(\partial \iota_p \times \iota_q + (-1)^p \iota_p \times \partial \iota_q) &= \\ &= \partial \partial \iota_p \times \iota_q + (-1)^{p-1} \partial \iota_p \times \partial \iota_q + (-1)^p \partial \iota_p \times \partial \iota_q + \iota_p \times \partial \partial \iota_q = 0. \end{aligned}$$

Adesso usiamo il fatto che i  $\Delta_p$  sono aciclici, quindi se  $\partial \iota_p \times \iota_q + (-1)^p \iota_p \times \partial \iota_q$  è un ciclo deve essere il bordo di una qualche catena. Definiamo  $\iota_p \times \iota_q$  come una qualunque di queste catene. Adesso per estendere la definizione a  $\sigma \times \tau$  generico,

con  $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$  e  $\tau : \Delta_q \rightarrow Y$ , notiamo che  $\sigma = \sigma_\Delta(\iota_p)$  e  $\tau = \tau_\Delta(\iota_q)$ , quindi perché la condizione (2) sia rispettata dobbiamo definire  $\sigma \times \tau = \sigma_\Delta(\iota_p) \times \tau_\Delta(\iota_q) = (\sigma, \tau)_\Delta(\iota_p \times \iota_q)$ , e notiamo che così la condizione di naturalità è rispettata in generale. In ultimo verifichiamo che con questa definizione la condizione (3) sia rispettata:

$$\begin{aligned}
\partial(\sigma \times \tau) &= \partial((\sigma, \tau)_\Delta(\iota_p \times \iota_q)) \\
&= (\sigma, \tau)_\Delta \partial(\iota_p \times \iota_q) \\
&= (\sigma, \tau)_\Delta (\partial \iota_p \times \iota_q + (-1)^p \iota_p \times \partial \iota_q) \\
&= \sigma_\Delta(\partial \iota_p) \times \tau_\Delta(\iota_q) + (-1)^p \sigma_\Delta(\iota_p) \times \tau_\Delta(\partial \iota_q) \\
&= \partial \sigma_\Delta(\iota_p) \times \tau_\Delta(\iota_q) + (-1)^p \sigma_\Delta(\iota_p) \times \partial \tau_\Delta(\iota_q) \\
&= \partial \sigma \times \tau + (-1)^p \sigma \times \partial \tau.
\end{aligned}$$

□

Abbiamo così una definizione per  $\times : \Delta_p(X) \times \Delta_q(Y) \rightarrow \Delta_{p+q}(X \times Y)$ . Possiamo adesso estendere  $\times$  per bilinearità ottenendo un omomorfismo bilineare

$$\times : \Delta_\bullet(X) \times \Delta_\bullet(Y) \rightarrow \Delta_\bullet(X \times Y),$$

il quale a sua volta induce un omomorfismo

$$\times : \Delta_\bullet(X) \otimes \Delta_\bullet(Y) \rightarrow \Delta_\bullet(X \times Y),$$

che indichiamo ancora con  $\times$  e chiamiamo **prodotto vettoriale** in omologia. Siano  $a \in \Delta_p(X)$  e  $b \in \Delta_q(Y)$  due elementi omogenei, allora il prodotto vettoriale manda per definizione  $a \otimes b$  in  $a \times b$ . Usando la formula per il bordo di  $a \times b$  e la definizione di  $\partial_\otimes$  notiamo che

$$\begin{aligned}
\partial(\times(a \otimes b)) &= \partial(a \times b) = \partial a \times b + (-1)^{\deg(a)} a \times \partial b \\
&= \times(\partial a \otimes b + (-1)^{\deg(a)} a \otimes \partial b) \\
&= \times(\partial_\otimes(a \otimes b)),
\end{aligned}$$

quindi  $\times$  è una mappa di catene.

**Teorema 2.3.** *Esiste una mappa di catene naturale*

$$\theta : \Delta_\bullet(X \times Y) \rightarrow \Delta_\bullet(X) \otimes \Delta_\bullet(Y)$$

che in grado 0 è la mappa canonica  $(x, y) \rightarrow x \otimes y$ .

*Dimostrazione.* Ricordiamo che la naturalità significa che per funzioni  $f : X \rightarrow X'$  e  $g : Y \rightarrow Y'$  si ha  $\theta \circ (f \times g)_\Delta = (f_\Delta \otimes g_\Delta) \circ \theta$ . Usiamo nuovamente il metodo dei *modelli aciclici*. Supponiamo di aver definito  $\theta$  per gradi minori di  $k$ , in modo tale che  $\partial\theta = \theta\partial$ . In grado  $k = 0$  è definito per ipotesi. Consideriamo il caso  $X = Y = \Delta_k$  e sia  $d_k : \Delta_k \rightarrow \Delta_k \times \Delta_k$  la mappa diagonale, che possiamo vedere come catena in  $\Delta_k(\Delta_k \times \Delta_k)$ . La catena  $\theta(\partial d_k) \in (\Delta_\bullet(\Delta_k) \otimes \Delta_\bullet(\Delta_k))_{k-1}$  è definita

e  $\partial\theta(\partial d_k) = \partial\partial(\theta d_k) = 0$ , pertanto  $\theta(\partial d_k)$  è un ciclo in  $\Delta_\bullet(\Delta_k) \otimes \Delta_\bullet(\Delta_k)$ , e quindi un bordo per aciclicità. Definiamo  $\theta(d_k)$  come una catena il cui bordo è proprio  $\theta(\partial d_k)$ . Ora per generici spazi  $X$  e  $Y$  sia  $\sigma : \Delta_k \rightarrow X \times Y$  e consideriamo le proiezioni  $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$  e  $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$ . Abbiamo la funzione prodotto  $\pi_X \sigma \times \pi_Y \sigma : \Delta_k \times \Delta_k \rightarrow X \times Y$  e possiamo vedere  $\sigma$  come  $\sigma = (\pi_X \sigma \times \pi_Y \sigma)_\Delta(d_k)$ . Perché  $\theta$  sia naturale dobbiamo definire

$$\theta(\sigma) = \theta((\pi_X \sigma \times \pi_Y \sigma)_\Delta(d_k)) = ((\pi_X \sigma)_\Delta \otimes (\pi_Y \sigma)_\Delta)(\theta(d_k)).$$

Non ci resta che verificare che  $\theta$  sia una mappa di catene:

$$\begin{aligned} \partial_\otimes \theta \sigma &= \partial_\otimes((\pi_X \sigma)_\Delta \otimes (\pi_Y \sigma)_\Delta)(\theta(d_k)) \\ &= ((\pi_X \sigma)_\Delta \otimes (\pi_Y \sigma)_\Delta)(\partial_\otimes \theta d_k) \\ &= ((\pi_X \sigma)_\Delta \otimes (\pi_Y \sigma)_\Delta)(\theta \partial d_k) \\ &= \theta \partial(\pi_X \sigma \times \pi_Y \sigma)_\Delta(\partial d_k) \\ &= \theta \partial(\pi_X \sigma \times \pi_Y \sigma)_\Delta(d_k) \\ &= \theta \partial \sigma. \end{aligned}$$

□

Vogliamo adesso mostrare che  $\theta$  e  $\times$  sono l'una l'inversa omotopica dell'altra, risultato che va sotto il nome di *Teorema di Eilenberg-Zilber*. Per farlo dimostriamo un teorema più generale, che ci darà il Teorema di Eilenberg-Zilber come corollario. Ricordiamo che se  $X$  è contraibile l'augmentazione  $\epsilon : \Delta_p(X) \rightarrow \Delta_p(X)$ , ovvero la mappa che è zero per  $p > 0$  e per  $p = 0$ , scelto un punto base  $x_0 \in X$ , dà  $\epsilon(\sum n_x x) = \sum n_x x_0$ , è omotopa all'identità per mezzo di un'omotopia di catene  $D : \Delta_p(X) \rightarrow \Delta_{p+1}(X)$ , ovvero vale  $D\partial + \partial D = 1 - \epsilon$ .

**Teorema 2.4.** *Due qualsiasi mappe di catene  $\phi, \psi$  naturali da  $\Delta_\bullet(X \times Y)$  in se stesso, da  $\Delta_\bullet(X) \otimes \Delta_\bullet(Y)$  in se stesso o da uno di questi nell'altro, se sono isomorfismi canonici in grado 0, allora sono naturalmente omotope.*

*Dimostrazione.* Diamo solo un'idea della dimostrazione, che in tutti e quattro i casi usa il metodo dei modelli aciclici già incontrato nel corso di questa trattazione. L'idea è usare come modelli  $\iota_p \otimes \iota_q \in \Delta_\bullet(\Delta_p) \otimes \Delta_\bullet(\Delta_q)$  e  $d_p \in \Delta_\bullet(\Delta_p \times \Delta_p)$ , e poi costruire induttivamente un'omotopia di catene  $D$  tale che  $D\partial + \partial D = \phi - \psi$ . Per farlo calcoliamo induttivamente sui modelli il bordo di  $\phi - \psi - D\partial$ , mostrando che è zero, e usando una catena del modello il cui bordo è  $D$ . □

**Corollario 2.5** (Teorema di Eilenberg-Zilber). *Le mappe*

$$\theta : \Delta_\bullet(X \times Y) \rightarrow \Delta_\bullet(X) \otimes \Delta_\bullet(Y) \quad e \quad \times : \Delta_\bullet(X) \otimes \Delta_\bullet(Y) \rightarrow \Delta_\bullet(X \times Y)$$

*sono equivalenze omotopiche naturali e sono l'una l'inversa dell'altra.*

*Dimostrazione.* in grado zero si ha che  $\theta(\times(x \otimes y)) = x \otimes y$  e  $\times(\theta(x \times y)) = x \times y$ , ovvero l'isomorfismo canonico. La tesi segue dal Teorema 2.4.  $\square$

### 2.1.2 Prodotto vettoriale in coomologia

Vogliamo adesso introdurre un prodotto vettoriale in coomologia. Per farlo abbiamo bisogno anzitutto di fare un'ipotesi sul gruppo dei coefficienti: da qui in avanti, per il resto del capitolo, consideriamo (co)omologia a coefficienti in un anello  $\Lambda$  commutativo con unità fissato, che verrà ommesso dalla notazione in assenza di ambiguità.

Un'altra premessa da fare è quella di scegliere una convenzione per dare un segno all'operatore di cobordo  $\delta$ : sia  $f : \Delta_p(X) \rightarrow \Lambda$  una  $p$ -cocatena singolare, useremo la formula per il cobordo

$$\delta f = (-1)^{\deg(f)+1} f \circ \partial.$$

Osserviamo che usare questa convenzione invece della più semplice  $\delta f = f \circ \partial$  non cambia i gruppi di coomologia.

Diamo una definizione di **grado** per una  $p$ -cocatena  $f \in \Delta^p(X; G)$ . Sia  $G$  un gruppo, chiamiamo  $G_\bullet$  il complesso di catene con  $G_0 = G$  e  $G_n = 0$  se  $n \neq 0$ . Una  $p$ -cocatena  $f$  può quindi essere vista come una mappa di catene  $f : \Delta_\bullet(X) \rightarrow G_\bullet$ . Con questa interpretazione possiamo usare la stessa definizione di grado data per le mappe di catene all'inizio di questo capitolo per definire il grado di una  $p$ -cocatena  $f$ , che in particolare risulterà essere proprio  $-p$  in quanto  $f(a) \in G$  se  $a \in \Delta_p(X)$  e  $f(a) = 0$  altrimenti. Possiamo ora andare a definire un prodotto vettoriale in coomologia. Siano  $f : \Delta_p(X) \rightarrow \Lambda$  e  $g : \Delta_q(Y) \rightarrow \Lambda$ , usando la struttura di anello su  $\Lambda$  possiamo definire

$$f \otimes g : \Delta_p(X) \otimes \Delta_q(Y) \rightarrow \Lambda \otimes \Lambda \rightarrow \Lambda$$

come  $(v, w) \rightarrow (-1)^{\deg(v)\deg(g)} f(v) \otimes g(w) \rightarrow (-1)^{\deg(v)\deg(g)} f(v)g(w)$ .

**Definizione 2.6.** Siano  $f \in \Delta^p(X)$  e  $g \in \Delta^q(Y)$ . Il **prodotto vettoriale in coomologia**  $f \times g \in \Delta^{p+q}(X \times Y)$  è definito da

$$f \times g = (f \otimes g) \circ \theta,$$

con  $\theta$  come nel Teorema 2.3.

Ricordiamo che una  $p$ -cocatena  $f$  è zero su  $\Delta_i(\cdot)$  per  $i \neq p$ . Presa quindi una qualunque catena  $c \in \Delta_n(X \times Y)$ , possiamo scrivere  $\theta(c) = \sum_{p+q=n} (\sum_i a_i^p \otimes b_i^q)$  e avremo  $(f \times g)(c) = (f \otimes g)(\theta(c)) = \sum_i (-1)^{pq} f(a_i^p)g(b_i^q)$ . Calcolando il cobordo

di  $f \times g$  troviamo la formula per il cobordo

$$\delta(f \times g) = \delta f \times g + (-1)^{\deg(f)} \times \delta g.$$

Segue che  $\times$  induce un prodotto in coomologia

$$\times : H^p(X) \otimes H^q(Y) \rightarrow H^{p+q}(X \times Y).$$

Concludiamo la sezione con un'utile formula per calcolare  $(f \times g)(a \times b)$ :

**Proposizione 2.7.** *Per cocicli  $f, g$  e cicli  $a, b$  omogenei di  $X, Y$  rispettivamente, vale la formula*

$$(f \times g)(a \times b) = (-1)^{\deg(a)\deg(g)} f(a)g(b).$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione usa l'omotopia  $D$  tra  $\theta \circ \times$  e l'identità mostrata nel Teorema 2.4. Abbiamo che

$$\begin{aligned} (f \times g)(a \times b) &= (f \otimes g)\theta(a \times b) = (f \otimes g)\theta(\times(a \otimes b)) = \\ &= (f \otimes g)(a \otimes b) + (f \otimes g)(D\partial_{\otimes} + \partial D)(a \otimes b). \end{aligned}$$

Notiamo che se  $a$  e  $b$  sono cicli anche  $a \otimes b$  è un ciclo, e quindi  $\partial_{\otimes}(a \otimes b) = 0$ .

Inoltre poiché  $f \otimes g$  è una mappa di catene,  $(f \otimes g) \circ \partial = \delta \circ f \otimes g$ . Dunque

$$\begin{aligned} (f \times g)(a \times b) &= (f \otimes g)(a \otimes b) \pm \delta(f \otimes g)(D(a \otimes b)) = \\ &= (-1)^{\deg(g)\deg(a)} f(a)g(b), \end{aligned}$$

in quanto  $f \otimes g$  è un cociclo, e quindi  $\delta(f \otimes g) = 0$ .

□

## 2.2 Prodotto cup

Introduciamo in questa sezione uno dei due prodotti più importanti, il *prodotto cup*, con l'obiettivo di usarlo per aggiungere struttura al complesso di catene dei gruppi di coomologia. Introduciamo il *prodotto cup* al livello delle cocatene dando la seguente:

**Definizione 2.8.** *Siano  $d : X \rightarrow X \times X$  la mappa diagonale,  $\theta : \Delta_{\bullet}(X \times X) \rightarrow \Delta_{\bullet}(X) \otimes \Delta_{\bullet}(X)$  la mappa di Eilenberg-Zilber introdotta nel Teorema 2.3, definiamo il **prodotto cup**  $f \cup g \in \Delta^{p+q}(X)$  come*

$$(f \cup g)(\sigma) = d^{\Delta}(f \times g)(\sigma) = (f \otimes g)(\theta(d_{\Delta}(\sigma))),$$

dove  $\sigma \in \Delta_{p+q}(X)$ ,  $f \in \Delta^p(X)$ ,  $g \in \Delta^q(X)$ .

Con questa definizione possiamo dedurre una formula per il bordo di  $f \cup g$  usando quella per il bordo di  $f \times g$ , avremo quindi

$$\delta(f \cup g) = \delta f \cup g + (-1)^{\deg(f)} f \cup \delta g,$$

e quindi il prodotto cup indurrà un prodotto in coomologia, definito come segue:

**Definizione 2.9.** *Sia  $d : X \rightarrow X \times X$  la mappa diagonale, il **prodotto cup** in coomologia è l'omomorfismo*

$$\cup : H^p(X) \otimes H^q(X) \rightarrow H^{p+q}(X)$$

definito da  $\alpha \cup \beta = d^*(\alpha \times \beta)$ .

Cerchiamo però una definizione per il prodotto cup che ce lo renda più facile da calcolare.

**Definizione 2.10.** *Un' **approssimazione diagonale** è una mappa di catene naturale*

$$\Delta : \Delta_\bullet(X) \rightarrow \Delta_\bullet(X) \otimes \Delta_\bullet(X)$$

tale che  $\Delta(x) = x \otimes x$  per ogni 0-simplesso  $x$ .

Osserviamo che  $\theta \circ d_\Delta$  è un' approssimazione diagonale. Un'altra approssimazione diagonale che ci tornerà utile è la seguente:

**Definizione 2.11.** *L' **approssimazione diagonale di Alexander-Whitney** è la mappa di catene  $\Delta$  tale che, per ogni  $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ ,*

$$\Delta(\sigma) = \sum_{p+q=n} \sigma|_p \otimes q|\sigma,$$

dove abbiamo indicato con  $\sigma|_p : \Delta_p \rightarrow \Delta_n \rightarrow X$  la composizione di  $\sigma$  con l'inclusione  $e_i \rightarrow e_i$  di  $\Delta_p$  in  $\Delta_n$  e con  $q|\sigma : \Delta_q \rightarrow \Delta_n \rightarrow X$  la composizione con l'inclusione  $e_i \rightarrow e_{n-q+i}$  di  $\Delta_q$  in  $\Delta_n$ .

Definendo il prodotto cup con questa approssimazione diagonale al posto di  $\theta \circ d_\Delta$  abbiamo la formula

$$(f \cup g)(\sigma) = (f \otimes g)(\Delta(\sigma)) = (f \otimes g)\left(\sum_{p+q=n} \sigma|_p \otimes q|\sigma\right) = (-1)^{pq} f(\sigma|_p) g(q|\sigma).$$

Dimostriamo ora la seguente:

**Proposizione 2.12.** *Due approssimazioni diagonali sono naturalmente omotope.*

*Dimostrazione.* Siano  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$  due approssimazioni diagonali, la dimostrazione è una facile applicazione del metodo dei modelli aciclici. Osserviamo che due approssimazioni diagonali coincidono per definizione in grado 0. Supponiamo ora di aver costruito l'omotopia di catene  $D$  per gradi minori di  $p$ . Consideriamo  $X = \Delta_p$  e guardiamo l'identità  $i_p : \Delta_p \rightarrow \Delta_p$  come elemento di  $\Delta_p(X)$ . Calcoliamo



$$\begin{aligned}\partial(\Delta_1 - \Delta_2 - D\partial)(i_p) &= \partial\Delta_1(i_p) - \partial\Delta_2(i_p) - \partial D\partial(i_p) = \\ &= \Delta_1(\partial i_p) - \Delta_2(\partial i_p) - (\Delta_1 - \Delta_2 - D\partial)(\partial i_p) = 0.\end{aligned}$$

Dato che  $\Delta_p$  è aciclico possiamo definire  $D(i_p)$  come una catena con bordo  $(\Delta_1 - \Delta_2 - D\partial)(i_p)$ . Per estendere  $D$  a un qualsiasi  $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$  usiamo la naturalità di  $D$  e definiamo

$$D(\sigma) = D \circ \sigma_\Delta(i_p) = \sigma_\Delta(D(i_p)).$$

□

Abbiamo quindi provato che due approssimazioni diagonali diverse inducono lo stesso prodotto cup in coomologia. Usiamo quindi le due approssimazioni diagonali  $\theta \circ d_\Delta$  e  $\Delta$  per indagare alcune proprietà del cup product in coomologia. Guardando il prodotto indotto da  $\theta \circ d_\Delta$ , dalle proprietà del prodotto vettoriale notiamo subito che il prodotto cup è commutativo a meno del segno, vale infatti  $\alpha \cup \beta = (-1)^{pq} \beta \cup \alpha$ .

Guardando il prodotto indotto da Alexander-Whitney notiamo invece che il prodotto cup in coomologia è associativo, ovvero  $(\alpha \cup \beta) \cup \gamma = \alpha \cup (\beta \cup \gamma)$ .

Vogliamo cercare un elemento neutro destro e sinistro per il prodotto cup. Per ogni spazio  $X$  denotiamo con  $1 \in H^0(X)$  la classe del cociclo augmentatione  $\epsilon : \Delta_0(X) \rightarrow \Lambda$  che manda ogni 0-simplex in  $1 \in \Lambda$ . Come lascia intuire la notazione scelta, questo sarà il nostro candidato.

**Proposizione 2.13.** *Sia  $P = \{p_0\}$  uno spazio formato da un punto. La composizione*

$$\gamma : \Delta_\bullet(X \times P) \xrightarrow{\theta} \Delta_\bullet(X) \otimes \Delta_\bullet(P) \xrightarrow{1 \otimes \epsilon} \Delta_\bullet(X) \otimes \Lambda \xrightarrow{\cong} \Delta_\bullet(X)$$

è naturalmente omotopa alla mappa  $p_* : \Delta_\bullet(X \times P) \xrightarrow{\cong} \Delta_\bullet(X)$  indotta dalla proiezione  $p_X : X \times P \rightarrow X$ .

*Dimostrazione.* Osserviamo che in grado zero  $\gamma$  e  $p_*$  coincidono, in quanto  $p_*(\sigma \times p_0) = \gamma(\sigma \times p_0) = \sigma$ . Vogliamo trovare un'omotopia di catene  $D$  tale che  $D\partial + \partial D = p_* - \gamma$ . Usiamo il metodo dei modelli aciclici: poniamo  $X = \Delta_p$  e consideriamo l'identità  $\iota_p : \Delta_p \rightarrow \Delta_p$  come elemento di  $\Delta_p(\Delta_p)$ . Supponiamo di aver definito  $D$  per i gradi minori di  $k$  e sia  $\iota_k \times p_0 \in \Delta_k(\Delta_k \times P)$ . Calcoliamo

$$\begin{aligned}\partial(p_* - \gamma - D\partial)(\iota_k \times p_0) &= \partial p_*(\iota_k \times p_0) - \partial \gamma(\iota_k \times p_0) - \partial D\partial(\iota_k \times p_0) \\ &= p_*(\partial(\iota_k \times p_0)) - \gamma(\partial(\iota_k \times p_0)) - \\ &\quad - (p_* - \gamma - D\partial)(\partial(\iota_k \times p_0)) = 0.\end{aligned}$$

Essendo  $\Delta_k \times P$  aciclico,  $(p_* - \gamma - D\partial)(\iota_k \times p_0)$  è il bordo di una qualche catena. Definisco  $D(\iota_k \times p_0)$  come una di queste catene. Per estendere la definizione di  $D$  a  $\sigma \times p_0 : \Delta_p \rightarrow X \times P$  generico uso il fatto che  $\sigma \times p_0 = (\sigma \times id)_\Delta(\iota_p \times p_0)$  e la naturalità di  $D$  mi obbliga a definire

$$D(\sigma \times p_0) = D(\sigma \times id)_\Delta(\iota_p \times p_0) = (\sigma \times id)_\Delta(D(\iota_p \times p_0)).$$

□

Osserviamo che la mappa  $\gamma$  definita nella Proposizione 2.13 induce una mappa in coomologia  $\gamma^* : H^k(X) \rightarrow H^k(X \times P)$  tale che  $\gamma^*(\alpha) = \alpha \times 1$ . Sfruttando la naturalità del prodotto vettoriale e l'omotopia appena dimostrata nella Proposizione 2.13, segue che per ogni omomorfismo  $X \times Y \rightarrow X \times P$

$$\alpha \times 1 = p_X^*(\alpha) \in H^\bullet(X \times Y) \quad \forall \alpha \in H^\bullet(X),$$

e similmente

$$1 \times \beta = p_Y^*(\beta) \in H^\bullet(X \times Y) \quad \forall \beta \in H^\bullet(Y).$$

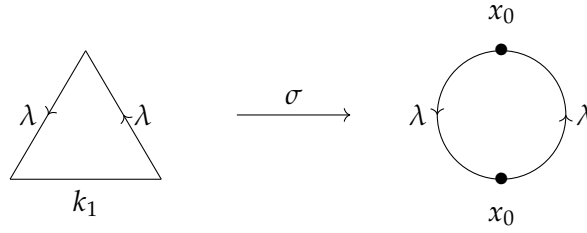
Tornando quindi al prodotto cup e considerando  $p_1 : X \times X \rightarrow X$  la proiezione al primo fattore, si ottiene che

$$\alpha \cup 1 = d^*(\alpha \times 1) = d^*p_1^*(\alpha) = (p_1d)^*(\alpha) = 1^*(\alpha) = \alpha,$$

e similmente  $1 \cup \alpha = \alpha$ , ovvero  $1 \in H^0(X)$  è l'unità che cercavamo.

Abbiamo quindi mostrato che il modulo graduato  $H^\bullet(X)$  con il prodotto cup diventa un anello graduato. Questa struttura algebrica sorge nel complesso di coomologia ma non in quello di omologia. Questa è una conseguenza della natura controvariante del primo, in quanto usando il prodotto vettoriale per provare a definire un prodotto in omologia abbiamo  $H_i(X) \times H_j(X) \rightarrow H_{i+j}(X \times X) \rightarrow H_{i+j}(X)$  con la seconda mappa indotta dalla proiezione  $X \times X \rightarrow X$ , ma tale composizione risulta poco utile, mentre nel caso del prodotto vettoriale in coomologia  $H^i(X) \times H^j(X) \rightarrow H^{i+j}(X \times X) \rightarrow H_{i+j}(X)$  la seconda mappa è indotta da una mappa diagonale  $X \rightarrow X \times X$  che come abbiamo visto dà luogo al prodotto cup.

**Esempio 2.14.** *Mostriamo come calcolare l'anello graduato di  $\mathbb{P}^2$  usando il prodotto cup. Come gruppo dei coefficienti usiamo  $\mathbb{Z}_2$ , così da non preoccuparci dei segni. Siano  $\alpha \in H^1(\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$  un generatore e  $f$  un 1-cociclo che rappresenta  $\alpha = [f]$ . Vogliamo mostrare che  $\alpha \cup \alpha$  genera  $H^2(\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}_2)$ . Consideriamo un cappio  $\lambda$ , con punto base  $x_0$ , che rappresenta un generatore di  $H_1(\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}_2)$ , allora considerando  $[f]$  come elemento di  $\text{Hom}(H_1(\mathbb{P}^2), \mathbb{Z}_2) \simeq H^1(\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}_2)$  abbiamo che  $f(\lambda) = 1$ . Chiamiamo  $k_1$  e  $k_2$  rispettivamente il 1-simplesso e il 2-simplesso costanti in  $x_0$ . Allora  $f(k_1) = f(\partial k_2) = (\delta f)(k_2) = 0$ . Guardiamo ora il 2-simplesso  $\sigma : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  in Figura 2.1, dove abbiamo rappresentato  $\mathbb{P}^2$  come un disco con l'identificazione sul bordo.*



**Figura 2.1:** Azione del 2-simpleso  $\sigma$ .

Allora  $\partial\sigma = 2\lambda - k_1 = k_1$ . Calcoliamo

$$(f \cup f)(\sigma) = -f(\sigma|_{(0,1)})f(\sigma|_{(1,2)}) = f(\lambda)f(\lambda) = 1$$

e

$$(f \cup f)(k_2) = f(k_1)f(k_1) = 0.$$

Supponiamo che  $f \cup f$  sia un cobordo,  $f \cup f = \delta g$ , allora

$$\begin{aligned} 1 &= (f \cup f)(\sigma) = (\delta g)(\sigma) = g(\partial\sigma) = g(k_1) = \\ &= g(\partial k_2) = (\delta g)(k_2) = (f \cup f)(k_2) = 0. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi mostrato che  $\alpha \cup \alpha \neq 0$ . Questo significa che  $H^\bullet(\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}_2)$  come anello è generato da  $1, \alpha, \alpha \cup \alpha = \alpha^2$ , e quindi  $H^\bullet(\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2[\alpha] / (\alpha^3)$ .

### 2.3 Prodotto cap

L'ultimo prodotto che analizziamo è il *prodotto cap*. Consideriamo sempre omologia e coomologia a coefficienti in un anello commutativo con unità  $\Lambda$ , che ometteremo dalla notazione. Diamo la seguente:

**Definizione 2.15.** Il **prodotto cap** a livello di catene e cocatene è

$$\cap : \Delta^p(X) \otimes \Delta_n(X) \rightarrow \Delta_{n-p}(X)$$

definito come

$$f \cap \sigma = (1 \otimes f)(\Delta(\sigma))$$

con  $\Delta$  una qualunque approssimazione diagonale.

Il prodotto cap così definito dipende dall'approssimazione diagonale scelta. Ad esempio, siano  $f \in \Delta^p(X)$ ,  $\sigma \in \Delta_{p+q}(X)$ , usando Alexander-Whitney il prodotto cap è calcolato come

$$f \cap \sigma = (-1)^{pq} f|_p \sigma|_q.$$

Usando invece l'approssimazione diagonale  $\theta \circ d_\Delta$  otteniamo

$$f \cap \sigma = (1 \otimes f)(\theta \circ d_\Delta(\sigma)) = (1 \times f)(d_\Delta(\sigma)),$$

per la quale non abbiamo una formula esplicita.

In generale usando la Proposizione 2.12 possiamo dire che se  $f \cap_1 \sigma = (1 \otimes f)(\Delta_1(\sigma))$ ,  $f \cap_2 \sigma = (1 \otimes f)(\Delta_2(\sigma))$ , allora esiste un'omotopia di catene  $D$  tale che  $D\partial + \partial D = \Delta_1 - \Delta_2$  e

$$\begin{aligned} f \cap_1 \sigma - f \cap_2 \sigma &= (1 \otimes f)((\Delta_1 - \Delta_2)(\sigma)) = (1 \otimes f)((D\partial + \partial D)(\sigma)) = \\ &= (1 \otimes f)(D(\partial\sigma)) - \delta(1 \otimes f)(D\sigma). \end{aligned}$$

Adesso vogliamo calcolare il bordo di  $f \cap \sigma$ , dimostriamo la seguente:

**Proposizione 2.16.** *Siano  $f \in \Delta^p(X)$ ,  $\sigma \in \Delta_n(X)$ , il bordo di  $f \cap \sigma$  è dato dalla formula*

$$\partial(f \cap \sigma) = \delta f \cap \sigma + (-1)^p f \cap \partial \sigma.$$

*Dimostrazione.* Consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \Delta_n(X) \otimes \Delta_p(X) & \xrightarrow{1 \otimes f} & \Delta_n(X) \otimes \Lambda \simeq \Delta_n(X) \\ \downarrow \partial \otimes 1 & & \downarrow \partial \\ \Delta_{n-1} \otimes \Delta_p(X) & \xrightarrow{1 \otimes f} & \Delta_{n-1}(X) \otimes \Lambda \simeq \Delta_{n-1} \end{array}$$

Partendo con  $\sigma_n \otimes \sigma_p \in \Delta_n(X) \otimes \Delta_p(X)$  seguendo il diagramma troviamo  $\partial(1 \otimes f(\sigma_n \otimes \sigma_p)) = (-1)^{pn} f(\sigma_p) \sigma_n$  e  $(1 \otimes f)(\partial \otimes 1(\sigma_n \otimes \sigma_p)) = (-1)^{pn-p} f(\sigma_p) \partial \sigma_n$ , quindi il diagramma commuta a meno del segno  $(-1)^p$ . Possiamo quindi calcolare:

$$\begin{aligned} \partial(f \cap \sigma) &= \partial((1 \otimes f)\Delta\sigma) \\ &= (-1)^p (1 \otimes f)(\partial \otimes 1)\Delta\sigma && \text{(commutatività)} \\ &= (-1)^p (1 \otimes f)(\partial_\otimes - 1 \otimes \partial)\Delta\sigma && \text{(definizione di } \partial_\otimes) \\ &= (-1)^p \{(1 \otimes f)(\partial_\otimes \Delta\sigma) - (1 \otimes f)(1 \otimes \partial)\Delta\sigma\} \\ &= (-1)^p \{(1 \otimes f)\Delta(\partial\sigma) + (-1)^p (1 \otimes \delta f)\Delta\sigma\} && \text{(naturalità di } \Delta) \\ &= \delta f \cap \sigma + (-1)^p f \cap \partial \sigma. \end{aligned}$$

Notiamo anche che nel passaggio dalla quarta alla quinta riga abbiamo usato la convenzione per il segno di  $\delta f$  stabilita all'inizio della Sezione 2.1.2 per scrivere  $(1 \otimes \delta f) = (-1)^{p+1} (1 \otimes f)(1 \otimes \partial)$ .  $\square$

Questa formula per il bordo ci mostra che il prodotto cap induce un prodotto in (co)omologia

$$\cap : H^p(X) \otimes H_n(X) \rightarrow H_{n-p}(X),$$

che chiamiamo sempre prodotto cap. Notiamo che il prodotto cap in (co)omologia non dipende dall'approssimazione diagonale scelta. Infatti se  $f \in \Delta^p(X)$  è un cociclo e  $\sigma \in \Delta_n(X)$  è un ciclo abbiamo che

$$f \cap_1 \sigma - f \cap_2 \sigma = (1 \otimes f)(D(\partial\sigma)) - \delta(1 \otimes f)(D\sigma) = 0,$$

dove abbiamo usato la stessa notazione usata sopra.

Discutiamo ora come si comporta il prodotto cap sulle classi di omologia e coomologia relativa. Se  $A \subset X$  e  $c$  è una catena in  $A$ , allora  $f \cap c$  è ancora una catena in  $A$ , quindi esistono prodotti cap indotti

$$\cap : \Delta^p(X) \otimes \Delta_n(X, A) \rightarrow \Delta_{n-p}(X, A)$$

e

$$\cap : H^n(X) \otimes H_n(X, A) \rightarrow H_{n-p}(X, A).$$

Inoltre se  $f \in \Delta^p(X, A)$ ,  $f \cap c$  è ancora una catena in  $X$  e non cambia se modifico  $c$  con una catena in  $A$ , ovvero esistono i prodotti cap indotti

$$\cap : \Delta^p(X, A) \otimes \Delta_n(X, A) \rightarrow \Delta_{n-p}(X)$$

e

$$\cap : H^p(X, A) \otimes H_n(X, A) \rightarrow H_{n-p}(X).$$

Più in generale proviamo il seguente:

**Teorema 2.17.** *Se  $A, B \subset X$  sono tali che l'inclusione  $i : \Delta_\bullet(A) + \Delta_\bullet(B) \rightarrow \Delta_\bullet(A \cup B)$  è un quasi-isomorfismo, allora esiste il prodotto cap indotto*

$$\cap : H^n(X, A) \otimes H_n(X, A \cup B) \rightarrow H_{n-p}(X, B).$$

*Dimostrazione.* Sia  $\phi : \frac{\Delta_\bullet(X)}{\Delta_\bullet(A) + \Delta_\bullet(B)} \rightarrow \frac{\Delta_\bullet(X)}{\Delta_\bullet(A \cup B)}$  mappa di catene e consideriamo  $\phi_*$  la mappa indotta in omologia. Consideriamo le sequenze lunghe esatte in omologia

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \rightarrow & H_n(\Delta_\bullet(A) + \Delta_\bullet(B)) & \rightarrow & H_n(X) & \rightarrow & H_n\left(\frac{\Delta_\bullet(X)}{\Delta_\bullet(A) + \Delta_\bullet(B)}\right) & \rightarrow & H_{n-1}(\Delta_\bullet(A) + \Delta_\bullet(B)) & \rightarrow & H_{n-1}(X) & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow i_* & & \downarrow id_* & & \downarrow \phi_* & & \downarrow i_* & & \downarrow id_* & & \\ \dots & \rightarrow & H_n(\Delta_\bullet(A \cup B)) & \rightarrow & H_n(X) & \rightarrow & H_n\left(\frac{\Delta_\bullet(X)}{\Delta_\bullet(A \cup B)}\right) & \rightarrow & H_{n-1}(\Delta_\bullet(A \cup B)) & \rightarrow & H_{n-1}(X) & \rightarrow & \dots \end{array}$$

dove  $i_*$  è un isomorfismo per ipotesi. Per il Lemma dei Cinque concludiamo che anche  $\phi_*$  è un isomorfismo. Consideriamo adesso un cociclo  $u \in \Delta^p(X, A)$  e una classe  $\zeta \in H_n(X, A \cup B)$ , rappresentiamo  $\phi_*^{-1}(\zeta)$  con una catena  $z \in \Delta_n(X)$  con bordo  $a + b \in \Delta_{n-1}(A) + \Delta_{n-1}(B)$ , allora avremo che

$$\begin{aligned}
 \partial(u \cap z) &= \partial u \cap z + (-1)^p u \cap \partial z = 0 + (-1)^p u \cap (a + b) \\
 &= (-1)^{p(n-1-p)} u({}_p|a)a|_{n-1-p} + (-1)^{p(n-1-p)} u({}_p|b)b|_{n-1-p} \\
 &= (-1)^{p(n-1-p)} u({}_p|b)b|_{n-1-p} \in \Delta^{n-1-p}(X).
 \end{aligned}$$

Siano ora  $a \in \Delta_{p+q}(A)$  e  $b \in \Delta_{p+q}(B)$ , avremo che a meno del segno

$$u \cap (z + a + b) = u({}_p|z)z|_q + 0 + u({}_p|b)b|_q,$$

quindi  $u \cap z$  è ben definito in  $\Delta_q(X, B)$ .  $\square$

In particolare le ipotesi del Teorema 2.17 sono soddisfatte se uno fra  $A$  e  $B$  è vuoto, o se sono entrambi aperti.

### 2.3.1 Relazione tra prodotto cap e prodotto cup

I prodotti cap e cup sono in relazione secondo la formula

$$\psi(\alpha \cap \varphi) = (\varphi \cup \psi)(\alpha)$$

per un ciclo  $\alpha \in \Delta_{p+q}(X; \Lambda)$  e cocicli  $\varphi \in \Delta^p(X; \Lambda)$ ,  $\psi \in \Delta^q(X; \Lambda)$ . La formula funziona in quanto per un  $(p+q)$ -simpleso  $\sigma : \Delta^{p+q} \rightarrow X$  si ha

$$\psi(\sigma \cap \varphi) = \psi(\varphi(\sigma|_p)_q|\sigma) = \varphi(\sigma|_p)\psi(\sigma|_q) = (\varphi \cup \psi)(\alpha).$$

Grazie a questa formula abbiamo che il diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 H^q(X; \Lambda) & \xrightarrow{h} & \text{Hom}_\Lambda(H_q(X; \Lambda), \Lambda) \\
 \downarrow \varphi \cup \cdot & & \downarrow (\cdot \cap \varphi)^* \\
 H^{p+q}(X; \Lambda) & \xrightarrow{h} & \text{Hom}_\Lambda(H_{p+q}(X; \Lambda), \Lambda)
 \end{array}$$

è commutativo. Inoltre nel caso in cui le mappe  $h$  siano isomorfismi abbiamo che la mappa  $\varphi \cup \cdot$  è proprio la mappa duale di  $\cdot \cap \varphi$ . In questo caso il prodotto cup determina il prodotto cap e viceversa.

---

---

# CAPITOLO 3

---

## *DUALITÀ DI POINCARÉ-ALEXANDER-LEFSCHETZ*

Questo capitolo sarà dedicato all'enunciare e dimostrare il teorema che va sotto il nome di *Dualità di Poincaré-Alexander-Lefschetz*, la forma più generale dei teoremi di dualità.

### 3.1 Orientazione

In questa sezione vogliamo dare una definizione di orientazione per varietà non necessariamente lisce. Consideriamo  $M$   $n$ -varietà topologica, senza ipotesi né di regolarità né di compattezza.

Sia  $\Theta_x \otimes G = H_n(M, M - \{x\}; G) \simeq G$ . Sia inoltre  $\Theta \otimes G = \bigsqcup \{\Theta_x \otimes G | x \in M\}$  e sia  $p : \Theta \otimes G \rightarrow M$  la funzione che manda  $\Theta_x \otimes G$  in  $x$  (se  $G = \mathbb{Z}$  ometteremo  $\otimes G$  dalla notazione).

Siano  $U \subset M$  aperto e  $\alpha \in H_n(M, M \setminus \bar{U}; G)$ . Per ogni  $A \subset M$  chiuso e  $x \in A$  definiamo la mappa

$$j_{x,A} : H_n(M, M \setminus A; G) \rightarrow H_n(M, M - \{x\}; G)$$

indotta dall'inclusione. Allora per  $x \in U$ ,  $j_{x,\bar{U}}(\alpha) \in \Theta_x \otimes G$  definiamo

$$U_\alpha = \{j_{x,\bar{U}}(\alpha) | x \in U\} \subset p^{-1}(U) \subset \Theta \otimes G.$$

**Proposizione 3.1.** 1. Gli  $U_\alpha$  costituiscono la base di una topologia su  $\Theta \otimes G$ .

2. Con questa topologia  $p : \Theta \otimes G \rightarrow M$ , ristretta ad una qualunque componente, è un rivestimento e la somma sulle fibre è continua.

*Dimostrazione.* 1. Per quanto detto all'inizio della Sezione 1.2, se  $\bar{U}$  è convesso, allora  $j_{x,\bar{U}}$  è un isomorfismo, pertanto  $\forall \tilde{x} \in \Theta_x \otimes G$  si ha  $\tilde{x} = j_{x,\bar{U}}(\alpha)$  per un certo  $\bar{U}$  convesso e per un certo  $\alpha$ . Poiché ogni  $x \in M$  appartiene ad un aperto con chiusura convessa, si ha che ogni punto è in uno degli  $U_\alpha$ . Se  $\tilde{x} \in U_\alpha \cap V_\beta$ , allora  $\tilde{x} = j_{x,\bar{U}}(\alpha) = j_{x,\bar{V}}(\beta)$ . Consideriamo  $x = p(\tilde{x}) \in W \subset U \cap V$ ,  $W$  sottoinsieme aperto convesso in un intorno euclideo di  $x$ . Allora  $j_{x,\bar{W}}$  è un isomorfismo. Sia  $\gamma \in H_n(M, M \setminus \bar{W}; G)$  tale che  $j_{x,\bar{W}}(\gamma) = \tilde{x}$ , allora necessariamente  $H_n(M, M \setminus \bar{U}; G) \rightarrow H_n(M, M \setminus \bar{W}; G)$  manda  $\alpha$  in  $\gamma$  e similmente  $\beta$  viene mandato in  $\gamma$ . Questo mostra che  $\tilde{x} \in W_\gamma \subset U_\alpha \cap V_\beta$  e che quindi gli insiemi considerati sono la base di una topologia.

2. Poiché sia la continuità che la proprietà di essere aperta possono essere testate sugli aperti di una base, la mappa  $p$  è continua e aperta per definizione, in quanto gli aperti con chiusura convessa formano una base di  $M$  e, se  $U$  è un tale aperto, allora  $p^{-1}(U) = \cup_{\alpha \in H_n(M, M \setminus \bar{U}; G)} U_\alpha$ . Consideriamo un aperto  $U$  con  $\bar{U}$  compatto e convesso in un sottoinsieme euclideo di  $M$  e il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} U \times H_n(M, M \setminus \bar{U}; G) & \xrightarrow{\phi} & p^{-1}(U) \\ & \searrow \text{proj} & \swarrow p \\ & & U \end{array}$$

dove  $\phi(x, \alpha) = j_{x,\bar{U}}(\alpha)$  e  $H_n(M, M \setminus \bar{U}; G)$  ha la topologia discreta.

- (a)  $\phi$  è aperta, in quanto per  $V \subset U$  aperto,  $\phi$  manda  $V \times \{\alpha\}$  in  $V_\alpha$ .
- (b) Se  $\phi(x, \alpha) = \phi(y, \beta)$  allora  $x = p(\phi(x, \alpha)) = p(\phi(y, \beta)) = y$ . Questo implica anche che  $j_{x,\bar{U}}(\alpha) = j_{x,\bar{U}}(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta$ , quindi  $\phi$  è iniettiva.
- (c)  $\forall y \in U$  la mappa  $j_{y,\bar{U}} : H_n(M, M \setminus \bar{U}; G) \rightarrow \Theta_y \otimes G$  è surgettiva  $\Rightarrow \phi$  è surgettiva.
- (d) Sia  $V \subset U$  aperto, allora  $\phi^{-1}(V_\alpha) = V \times \{\alpha\} \Rightarrow \phi$  aperta.

Segue che  $\phi$  è un omeomorfismo.

Su una fibra  $\phi$  è semplicemente  $j_{x,\bar{U}}$ , che è un isomorfismo. Segue che le operazioni di gruppo in una fibra corrispondono alle operazioni sul secondo fattore di  $U \times H_n(M, M \setminus \bar{U}; G)$ , e quindi sono continue.

□

Possiamo quindi dare due importanti definizioni:



**Definizione 3.2.** Sia  $A \subset M$  chiuso, il *gruppo delle sezioni di  $\Theta \otimes G$  su  $A$*  è il gruppo abeliano

$$\Gamma(A, \Theta \otimes G) = \{s : A \rightarrow \Theta \otimes G \text{ continua} \mid p \circ s = \text{id}\},$$

con operazione  $(s + s')(x) = s(x) + s'(x)$ . Indichiamo con  $\Gamma_c(A, \Theta \otimes G)$  il sottogruppo delle sezioni a supporto compatto.

Osserviamo che se  $A$  è compatto,  $\Gamma(A, \Theta \otimes G) \simeq \Gamma_c(A, \Theta \otimes G)$ .

Per  $K \subset M$  compatto definiamo l'omomorfismo

$$J_K : H_n(M, M \setminus K; G) \rightarrow \Gamma_c(K, \Theta \otimes G)$$

che manda  $\alpha \in H_n(M, M \setminus K; G)$  nella sezione definita da

$$J_K(\alpha)(x) = j_{x,K}(\alpha),$$

ben definito in quanto la sezione  $J_K(\alpha)$  è continua a supporto compatto. Vogliamo ora dimostrare il seguente:

**Teorema 3.3.** Sia  $M^n$  una varietà topologica e sia  $K \subset M$  compatto. Allora

$$J_K : H_n(M, M \setminus K; G) \rightarrow \Gamma_c(K, \Theta \otimes G)$$

è un isomorfismo.

La dimostrazione segue uno schema che ricorrerà in seguito. Lo schema è quello di dimostrare alcune implicazioni per particolari insiemi compatti  $K$  in modo da far seguire la tesi per  $K$  compatto qualsiasi, usando la caratterizzazione dei compatti di una varietà.

*Dimostrazione.* Iniziamo mostrando che la tesi è vera per  $K$  compatto e convesso. Ricordiamo che, come mostrato nella Sezione 1.2, per  $K$  compatto e convesso vale che  $j_{x,K}$  è un isomorfismo da cui segue che anche  $J_K$  è un isomorfismo.

Siano ora  $K, L$  due sottoinsiemi compatti e convessi contenuti in uno stesso aperto euclideo  $U$ , vogliamo mostrare che se la tesi vale per  $K, L, K \cap L$  allora vale per  $K \cup L$ .

Osserviamo che se  $K \supset L$  sono chiusi, allora il diagramma

$$\begin{array}{ccc} H_n(M, M \setminus K) & \longrightarrow & H_n(M, M \setminus L) \\ \downarrow J_K & & \downarrow J_L \\ \Gamma_c(K, \Theta \otimes G) & \longrightarrow & \Gamma_c(L, \Theta \otimes G). \end{array}$$

è commutativo. Inoltre per  $K, L \subset M$  chiusi abbiamo che la sequenza

$$0 \rightarrow \Gamma_c(K \cup L, \Theta \otimes G) \xrightarrow{h} \Gamma_c(K, \Theta \otimes G) \oplus \Gamma_c(L, \Theta \otimes G) \xrightarrow{k} \Gamma_c(K \cap L, \Theta \otimes G),$$

dove  $h$  è la somma delle restrizioni e  $k$  è la differenza, è esatta. Abbiamo quindi il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \rightarrow H_{n+1}(M, M \setminus (K \cap L)) & \rightarrow & H_n(M, M \setminus (K \cup L)) & \rightarrow & H_n(M, M \setminus K) \oplus H_n(M, M \setminus L) & \rightarrow & H_n(M, M \setminus (K \cap L)) \\ & & \downarrow = & & \downarrow J_{K \oplus L} & & \downarrow J_{K \cap L} \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma_c(K \cup L, \Theta \otimes G) & \longrightarrow & \Gamma_c(K, \Theta \otimes G) \oplus \Gamma_c(L, \Theta \otimes G) & \longrightarrow & \Gamma_c(K \cap L, \Theta \otimes G), \end{array}$$

dove tutte le mappe verticali tranne la seconda sono isomorfismi per ipotesi. Dal Lemma dei Cinque segue quindi la tesi.

Con questi due fatti, usando l'identità  $K \cap (L_1 \cup \dots \cup L_r) = (K \cap L_1) \cup \dots \cup (K \cap L_r)$ , con un argomento induttivo segue la tesi per tutte le unioni finite di insiemi compatti e convessi dentro un aperto euclideo  $U$ .

Consideriamo adesso una sequenza di compatti  $K_1 \supset K_2 \supset \dots$  e mostriamo che se la tesi vale per tutti i  $K_i$ , allora vale anche per  $K = \bigcap K_i$ .

Dimostriamo che le restrizioni  $\Gamma(K_i, \Theta \otimes G) \rightarrow \Gamma(K, \Theta \otimes G)$  inducono un isomorfismo

$$\varinjlim \Gamma(K_i, \Theta \otimes G) \xrightarrow{\cong} \Gamma(K, \Theta \otimes G).$$

Per l'iniettività sia  $s$  una sezione su qualche  $K_i$  che venga mandata in zero. Esiste quindi un aperto  $U \supset K$  tale per cui  $s = 0$  su  $U \cap K_i$ . Per compattezza esiste  $j > i$  tale che  $K_j \subset U$ . Allora  $s = 0$  su  $K_j$ , e quindi la classe di  $s$  nel prodotto diretto è zero. Per la surgettività mostriamo che una sezione  $s$  su  $K$  si estende ad un intorno di  $K$ . Per  $x \in K$ , esiste una sezione  $s_x \in \Gamma(U_x, \Theta \otimes G)$ , dove  $U_x$  è un intorno di  $x$ , tale che  $s = s_x$  su  $U_x \cap K$ . Posso ricoprire  $K$  con un numero finito di questi insiemi,  $K \subset U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_k}$ . Sia  $U = \{y \mid \text{tutti gli } s_{x_i}(y) \text{ sono uguali per } y \in U_{x_i}\}$ , che è un aperto che contiene  $K$  su cui posso estendere  $s$ .

Poiché  $K_i, K$  sono compatti, possiamo considerare il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim H_p(M, M \setminus K_i) & \xrightarrow{\cong} & H_p(M, M \setminus K) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \\ \varinjlim \Gamma_c(K_i, \Theta \otimes G) & \xrightarrow{\cong} & \Gamma_c(K, \Theta \otimes G), \end{array}$$

che dimostra la tesi.

Per concludere basta notare che in una varietà ogni compatto si scrive come intersezione di una sequenza di unioni finite di compatti convessi contenuti in un aperto euclideo, e quindi la tesi è vera per ogni compatto  $K \subset M$ .  $\square$

Lasciamo ora il caso generale a coefficienti in un gruppo  $G$  qualsiasi e concentriamoci sul caso a coefficienti in  $\mathbb{Z}$ . Diamo la seguente:

**Definizione 3.4.** La  $n$ -varietà topologica  $M$  è detta **orientabile lungo**  $A$ , con  $A \subset M$  chiuso, se esiste una sezione  $\vartheta_A \in \Gamma(A, \Theta)$ , detta **orientazione lungo**  $A$ , che genera  $\Theta_x$  per ogni  $x \in A$ . La varietà  $M$  si dice **orientabile** se è orientabile lungo  $M$ .

Vediamo come la nozione di orientazione appena introdotta si relaziona con la nozione di orientazione definita nel Capitolo 1. Dimostriamo il seguente teorema:

**Teorema 3.5.** *Una varietà topologica liscia  $M$  è orientabile nel senso della Definizione 1.3 se e solo se è orientabile nel senso della Definizione 3.4.*

*Dimostrazione.* Supponiamo si possa scegliere un atlante in modo che per ogni coppia di carte il cambio di coordinate abbia Jacobiano positivo. Sia  $x \in M$ , sia  $\phi$  l'inversa di una carta in tale atlante,  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow U$ , tale che  $\phi(0) = x$ . Sia  $\vartheta \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \simeq \mathbb{Z}$  un generatore fissato. Allora  $\phi_*(\vartheta) \in H_n(U, U - \{x\}) = \Theta_x$  è un generatore. Supponiamo che  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset U$  sia un'altra carta tale che  $\psi(0) = x$ . Allora  $\phi^{-1}\psi$  è un diffeomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  che fissa l'origine e con Jacobiano positivo. Segue che la mappa indotta in omologia è l'identità, e quindi l'elemento  $s_x = \phi_*(\vartheta) \in \Theta_x$  è indipendente dalla scelta di  $\phi$ . D'altra parte sia  $s \in \Theta$  un'orientazione nel senso della Definizione 3.4, allora se in ogni punto si guarda una qualsiasi carta, si ha che  $\phi_*(\vartheta) \in \Theta_x$  coincide con  $s_x$  oppure no. Se  $\phi(\vartheta)$  coincide con  $s_x$  allora, per continuità della mappa  $\phi_* : H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n) \rightarrow H_n(U, U \setminus D)$  con  $D$  un intorno di  $x$ , coincide con  $s_y$  per ogni  $y \in U$ . Scegliendo tutte e sole le carte per cui coincide abbiamo un atlante dove, per quanto detto prima, il cambio di coordinate deve avere Jacobiano positivo.  $\square$

Nel seguito di questa discussione con varietà orientabile intenderemo nel senso della Definizione 3.4.

Nel caso di varietà con bordo abbiamo che, per  $x \in \partial M$ ,  $H_n(M, M - \{x\}) = 0$ , in quanto i punti del bordo hanno intorni aperti omeomorfi a  $\mathbb{R}_+^n$ , e quindi vale  $H_n(M, M - \{x\}) \simeq H_n(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_+^n - \{0\}) = 0$ . Diciamo quindi che una varietà con bordo è orientabile se  $M \setminus \partial M$  è orientabile come varietà senza bordo.

## 3.2 Lemmi di commutatività

Questa sezione sarà dedicata ad introdurre degli oggetti e a dimostrare due lemmi che ci serviranno per enunciare e dimostrare la dualità.

Sia  $M$  una varietà e fissiamo  $G$  il gruppo dei coefficienti, che ometteremo dalla notazione. Diamo la seguente:

**Definizione 3.6.** *Per insiemi chiusi  $L \subset K \subset M$  definiamo il  $p$ -esimo gruppo di coomologia  $\check{H}^p$  a coefficienti in  $G$  come*

$$\check{H}^p(K, L) = \varinjlim \{H^p(U, V) \mid (K, L) \subset (U, V), U, V \text{ aperti}\},$$

dove il limite diretto è indotto dalle naturali inclusioni.

Vediamo come sotto alcune ipotesi di regolarità la coomologia  $\check{H}^\bullet$  è naturalmente isomorfa alla coomologia singolare. Per dimostrare ciò useremo il seguente teorema dovuto a Karol Borsuk, di cui non riportiamo la dimostrazione.

**Teorema 3.7 (Borsuk).** *Se  $X$  è localmente compatto e localmente contraibile, allora ogni inclusione di  $X$  in un qualsiasi  $\mathbb{R}^n$  è un retratto di un qualche intorno in  $\mathbb{R}^n$ .*

Veniamo ora all'isomorfismo che ci interessa.

**Corollario 3.8.** *Se la varietà topologica  $M^m$  è immersa in  $\mathbb{R}^n$ , allora*

$$\check{H}^\bullet(M) = \{\varinjlim H^\bullet(K)\} \rightarrow H^\bullet(M)$$

è un isomorfismo, dove  $K$  varia tra gli intorni di  $M$  in  $\mathbb{R}^n$ .

*Dimostrazione.* Mostriamo prima che ogni intorno  $U \supset M$  contiene un intorno  $V$  più piccolo che si deforma fortemente su  $M$  dentro  $U$ . Per dimostrarlo è sufficiente costruire, per qualche intorno  $W$  di  $M$ , una deformazione  $F : W \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $F(m, t) = m$  per ogni  $m \in M$  e  $t \in I$ ,  $F(w, 0) = w$ ,  $F(w, 1) \in M$ , dato che per ogni  $U$  la preimmagine  $F^{-1}(U)$  è un aperto contenente  $M \times I$ , e che quindi contiene un aperto della forma  $V \times I$ , con  $V$  come sopra, per compattezza di  $I$ . Sia  $r : W \rightarrow M$  una retrazione di un intorno di  $M$  in  $\mathbb{R}^n$  che esiste per il Teorema 3.7, allora  $F : W \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$  definita da  $F(w, t) = tw + (1 - t)r(w)$  è la deformazione cercata. Sia ora  $U$  un intorno di  $M$  in  $\mathbb{R}^n$  abbastanza piccolo perché si retragga su  $M$ . Allora la mappa  $H^\bullet(U) \rightarrow H^\bullet(M)$  indotta dall'inclusione è surgettiva, e c'è uno split dato dalla mappa indotta dalla retrazione. Supponiamo che  $M \subset V \subset U$  con  $F : V \times I \rightarrow U$  una deformazione come sopra. Sia  $r = F(\cdot, 1) : V \times \{1\} \rightarrow M$  una retrazione. Siano  $i : V \times \{0\} \rightarrow U$  l'inclusione  $(v, 0) \mapsto v \in V \subset U$ , e  $j : M \hookrightarrow U$  l'inclusione. Consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} H^\bullet(M) & \xrightarrow{r^*} & H^\bullet(V \times \{1\}) \\ j^* \uparrow & & \simeq \uparrow \\ H^\bullet(U) & \xrightarrow{F|_*} & H^\bullet(V \times \{1\}) \\ & \searrow i^* & \downarrow \\ & & H^\bullet(V \times \{0\}), \end{array}$$

dove il triangolo inferiore commuta per omotopia. Notiamo come  $j^*(\alpha) = 0 \implies F|_*(\alpha) = 0 \implies i^*(\alpha) = 0$ , cioè ogni elemento  $\alpha \in H^\bullet(U)$  che va in 0 in  $H^\bullet(M)$  va in 0 già in  $H^\bullet(V)$ . Questo insieme con la surgettività di  $j^*$  conclude la dimostrazione, grazie al Corollario 1.11.  $\square$

Sia  $M^n$  una  $n$ -varietà topologica orientabile e sia  $\vartheta_M \in \Gamma(M, \Theta)$  un'orientazione lungo  $M$ . Per  $K \subset M$  compatto,  $\vartheta_M$  si restringe a  $\vartheta_K \in \Gamma(K, \Theta) = \Gamma_c(K, \Theta) \simeq H_n(M, M \setminus K)$ , dove l'ultimo isomorfismo segue dal Teorema 3.3, e considereremo

$\vartheta_K$  come elemento di  $H_n(M, M \setminus K)$ . Indichiamo con  $\vartheta := \{\vartheta_K\}$  la collezione di tutti i  $\vartheta_K$  al variare di  $K$  compatto e chiamiamo  $\vartheta$  un'orientazione.

Consideriamo ora  $(K, L) \subset (U, V)$  come nella Definizione 3.6. Esiste un prodotto cap

$$\Delta^p(U, V) \otimes \left[ \frac{\Delta_n(V) + \Delta_n(U \setminus L)}{\Delta_n(U \setminus K)} \right] \xrightarrow{\cap} \Delta_{n-p}(U \setminus L, U \setminus K)$$

dato da  $f \cap (b + c) = f \cap b + f \cap c = f \cap c$ . Notiamo che in omologia  $H_{n-p}(U \setminus L, U \setminus K) \simeq H_{n-p}(M \setminus L, M \setminus K)$ . Inoltre  $H_\bullet \left( \frac{\Delta_\bullet(V) + \Delta_\bullet(U \setminus L)}{\Delta_\bullet(U \setminus K)} \right) \simeq H_\bullet(U, U \setminus K) \simeq H_\bullet(M, M \setminus K)$  per escissione e in quanto  $\{V, U \setminus L\}$  è un ricoprimento aperto di  $U$ . Questo ci dice che il prodotto cap induce un prodotto cap in (co)omologia

$$H^p(U, V) \otimes H_n(M, M \setminus K) \rightarrow H_{n-p}(M \setminus L, M \setminus K).$$

In particolare possiamo fissare una classe  $\gamma \in H_n(M, M \setminus A)$  per un insieme compatto  $A$  abbastanza grande, ottenendo quanto segue: siano  $f \in \Delta^p(U, V)$  e supponiamo  $\gamma$  sia rappresentato dalla catena  $b + c + d \in \Delta_n(V) + \Delta_n(U \setminus L) + \Delta_n(M \setminus K)$ , allora

$$[f] \cap \gamma = [f \cap (b + c + d)] = [f \cap c] \in H_{n-p}(M \setminus L, M \setminus K),$$

dal momento che  $f \cap b = 0$  e  $f \cap d$  è una catena in  $M \setminus K$ .

Per  $A$  abbastanza grande possiamo quindi fissare  $\vartheta_A \in H_n(M, M \setminus A)$  per ottenere l'omomorfismo

$$\cdot \cap \vartheta : H^p(U, V) \rightarrow H_{n-p}(M \setminus L, M \setminus K),$$

che rispetta le ipotesi della Proposizione 1.10, pertanto passando al limite diretto otteniamo la mappa

$$\cdot \cap \vartheta : \check{H}^p(K, L) \rightarrow H_{n-p}(M \setminus L, M \setminus K).$$

Diamo una descrizione di questa mappa. Sia  $\alpha \in \check{H}^p(K, L)$  rappresentata dal cociclo  $f \in \Delta_p(U, V)$ . Supponiamo inoltre che l'orientazione  $\vartheta$  sia rappresentata dalla catena  $a = b + c + d \in \Delta_n(V) + \Delta_n(U \setminus L) + \Delta_n(M \setminus K)$ . Allora poiché  $f \cap (b + c + d) = f \cap c$  si ha che  $\alpha \cap \vartheta$  è rappresentata da  $f \cap c$ .

Possiamo ora dimostrare i due seguenti lemmi.

**Lemma 3.9.** *Il diagramma*

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \check{H}^p(K, L) & \longrightarrow & \check{H}^p(K) & \longrightarrow & \check{H}^p(L) \xrightarrow{\delta^*} \check{H}^{p+1}(K, L) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \rightarrow & H_{n-p}(M \setminus L, M \setminus K) & \rightarrow & H_{n-p}(M, M \setminus K) & \rightarrow & H_{n-p}(M, M \setminus L) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-p-1}(M \setminus L, M \setminus K) \rightarrow \dots \end{array}$$

è commutativo con righe esatte, dove tutte le mappe verticali sono date dal prodotto cap con l'orientazione  $\vartheta$ .

*Dimostrazione.* L'esattezza della prima riga segue dall'esattezza del limite diretto,

dimostrata nel Teorema 1.12. L'unico quadrato di cui dobbiamo verificare la commutatività è quello più a destra, ovvero quello che coinvolge  $\delta^*$  e  $\partial_*$ . Fissiamo  $f \in \Delta^p(M)$  tale che  $f|_V \in \Delta^p(V)$  rappresenta  $\alpha \in H^p(V)$  tale che la classe di  $\alpha$  in  $\check{H}^p(L)$  è la classe che vogliamo seguire nel diagramma. Rappresentiamo  $\vartheta$  con  $a = b + c + d \in \Delta_n(V) + \Delta_n(U \setminus L) + \Delta_n(M \setminus K)$ . Notiamo inoltre che possiamo decomporre  $a$  anche come  $a = 0 + b + (c + d) \in \Delta_n(\emptyset) + \Delta_n(V \setminus \emptyset) + \Delta_n(M \setminus L)$ . Quindi la stessa catena  $a$  può essere usata per calcolare entrambi i cap product che costituiscono le mappe verticali prese in considerazione nel diagramma. Notiamo inoltre che, poiché  $\vartheta$  è una classe di  $(M, M \setminus K)$ ,  $\partial a$  deve essere una catena in  $M \setminus K$ . Possiamo adesso seguire  $f$  nel diagramma. Andando a destra troviamo  $\delta f$ , che viene mandata giù in  $\delta f \cap a$ . Dall'altra parte andando prima giù troviamo  $f \cap a$ , che viene mandato a destra in  $\partial(f \cap a) = \delta f \cap a \pm f \cap \partial a$ . Poiché  $\partial a$  è una catena in  $M \setminus K$  passando in omologia diventa nulla, provando quindi la commutatività del diagramma.  $\square$

**Lemma 3.10.** *Siano  $K$  e  $L$  sottoinsiemi compatti della  $n$ -varietà  $M$  con l'orientazione  $\vartheta$ . Allora il diagramma*

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & \check{H}^p(K \cup L) & \longrightarrow & \check{H}^p(K) \oplus \check{H}^p(L) & \longrightarrow & \check{H}^p(K \cap L) \xrightarrow{\delta^*} \check{H}^{p+1}(K \cup L) \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots & \rightarrow & H_{n-p}(M, M \setminus (K \cup L)) & \rightarrow & H_{n-p}(M, M \setminus K) \oplus H_{n-p}(M, M \setminus L) & \rightarrow & H_{n-p}(M, M \setminus (K \cap L)) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-p-1}(M, M \setminus (K \cup L)) \rightarrow \dots
 \end{array}$$

*commuta e ha righe esatte, dove tutte le mappe verticali sono date dal prodotto cap con l'orientazione  $\vartheta$ .*

*Dimostrazione.* Anche in questo caso dobbiamo solo dimostrare la commutatività del quadrato più a destra. La sequenza nella prima riga è indotta dalla sequenza esatta

$$\begin{aligned}
 0 &\rightarrow \text{Hom}(\Delta_\bullet(U) + \Delta_\bullet(V), G) \rightarrow \text{Hom}(\Delta_\bullet(U), G) \oplus \text{Hom}(\Delta_\bullet(V), G) \rightarrow \\
 &\rightarrow \text{Hom}(\Delta_\bullet(U \cap V), G) \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

per intorni aperti  $U \supset K$  e  $V \supset L$ . Sia  $\alpha \in \check{H}^p(K \cap L)$  rappresentata da  $f \in \Delta^p(M)$  con  $\delta f = 0$  su  $U \cap V$ . Allora  $\delta^*(\alpha) \in \check{H}^p(K \cup L)$  è ottenuta come segue: tiriamo indietro  $f$  in  $(f, 0) \in \text{Hom}(\Delta_\bullet(U), G) \oplus \text{Hom}(\Delta_\bullet(V), G)$  e consideriamo il suo bordo  $(\delta f, 0)$ . Si ha allora che l'elemento  $h \in \text{Hom}(\Delta_\bullet(U) + \Delta_\bullet(V), G)$  definito da  $h(u + v) = \delta f(u)$  rappresenta  $\delta^*(\alpha)$ . Possiamo estendere  $h$  arbitrariamente ad  $h \in \text{Hom}(\Delta_\bullet(M), G)$ .

Rappresentiamo ora  $\vartheta$  con una catena  $a = b + c + d + e \in \Delta_\bullet(U \cap V) + \Delta_\bullet(U \setminus L) + \Delta_\bullet(V \setminus K) + \Delta_\bullet(M \setminus (K \cup L))$ , dove l'ultimo termine  $e$  può essere ignorato visto che produce catene in  $M \setminus (K \cup L)$ . Abbiamo quindi che  $\delta^*(\alpha) \cap \vartheta$  è rappresentata da  $h \cap (b + c + d) = h \cap (c + (b + d)) = \delta f \cap c$ .

Dall'altra parte la sequenza nella seconda riga è indotta dalla sequenza esatta

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \frac{\Delta_{\bullet}(M)}{\Delta_{\bullet}(M \setminus (K \cup L))} &\rightarrow \frac{\Delta_{\bullet}(M)}{\Delta_{\bullet}(M \setminus K)} \oplus \frac{\Delta_{\bullet}(M)}{\Delta_{\bullet}(M \setminus L)} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{\Delta_{\bullet}(M)}{\Delta_{\bullet}(M \setminus K) + \Delta_{\bullet}(M \setminus L)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi che  $\alpha \cap \vartheta \in H_{n-p}(M, M \setminus (K \cap L))$  è rappresentata da  $f \cap a$  modulo  $\Delta_{\bullet}(M \setminus K) + \Delta_{\bullet}(M \setminus L)$ . Possiamo quindi tirare indietro  $f \cap a$  in  $(f \cap a, 0)$ , il cui bordo è  $(\partial(f \cap a), 0) = (\delta f \cap a \pm f \cap \partial a, 0) = (\delta f \cap c + \delta f \cap d \pm f \cap \partial a, 0)$ , che è equivalente a  $(\delta f \cap c, 0)$  in quanto  $\delta f \cap d \pm f \cap \partial a \in \Delta_{\bullet}(M \setminus K)$ . Quindi  $\delta f \cap c$ , modulo  $\Delta_{\bullet}(M \setminus (K \cup L))$ , rappresenta  $\partial_*(\alpha \cap \vartheta)$ , provando la commutatività.  $\square$

### 3.3 Dualità di Poincaré-Alexander-Lefschetz

Abbiamo adesso tutto quello che serve per enunciare e dimostrare la dualità di Poincaré-Alexander-Lefschetz.

**Teorema 3.11.** *Sia  $M^n$  una  $n$ -varietà orientata da  $\vartheta$ , e siano  $K \supset L$  sottoinsiemi compatti di  $M$ . Allora il prodotto cap*

$$\cdot \cap \vartheta : \check{H}^p(K, L) \rightarrow H_{n-p}(M \setminus L, M \setminus K)$$

è un isomorfismo.

La dimostrazione segue lo stesso schema usato per il Teorema 3.3.

*Dimostrazione.* Per il Lemma dei Cinque e il Lemma 3.9 è sufficiente dimostrare il teorema nel caso  $L = \emptyset$ , ovvero mostrare che

$$\cdot \cap \vartheta : \check{H}^p(K) \rightarrow H_{n-p}(M, M \setminus K)$$

è un isomorfismo.

Notiamo che se  $K$  è un punto,  $K = \{x\}$ ,  $\cdot \cap \vartheta$  è un isomorfismo, in quanto se  $p \neq 0$  entrambi i gruppi sono zero, e se  $p = 0$  sia  $U$  un intorno di  $x$ , allora  $\cdot \cap \vartheta$  è indotta dalla mappa

$$\begin{aligned} H^0(U) &\longrightarrow H_n(M, M - \{x\}) \\ 1 &\longmapsto 1 \cap \vartheta_{\{x\}} = \vartheta_{\{x\}}. \end{aligned}$$

Sia  $K \subset M$  compatto e convesso in un aperto euclideo di  $M^n$ , dimostriamo che allora la tesi è vera per  $K$ .

Questo segue dal diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 \check{H}^p(K) & \xrightarrow{\cdot \cap \emptyset} & H_{n-p}(M, M \setminus K) \\
 \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
 \check{H}^p(\{x\}) & \xrightarrow{\cdot \cap \emptyset} & H_{n-p}(M, M - \{x\}),
 \end{array}$$

dove le frecce verticali sono isomorfismi per omotopia, mentre la freccia in basso è un isomorfismo per quanto osservato nel caso  $K = \{x\}$ .

Per insiemi compatti  $K, L \subset M$  dimostriamo che se la tesi è vera per  $K, L, K \cap L$  allora è vera anche per  $K \cup L$ .

Questo segue dal Lemma dei Cinque e dal Lemma 3.10.

Sia  $K_1 \supset K_2 \supset \dots$  una successione di insiemi compatti, dimostriamo che se la tesi è vera per tutti i  $K_i$ , allora è vera per  $K = \bigcap K_i$ .

Per ogni  $i$  sia  $U_{i,j}$  un sistema fondamentale di intorni aperti di  $K_i$ , ovvero una famiglia di aperti  $\{U_{i,j}\}$  tali che ogni intorno di  $K_i$  contiene uno degli  $U_{i,j}$ . Per comodità possiamo definire questi insiemi in modo che per ogni  $i$  si ha  $U_{i,1} \supset U_{i,2} \supset \dots$  e per ogni  $j$  si ha  $U_{1,j} \supset U_{2,j} \supset \dots$ . Gli  $U_{i,j}$  formano quindi un sistema fondamentale di intorni di  $K = \bigcap K_i$ . Ordinando  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  con l'ordine  $(i, j) \geq (i', j') \iff i \geq i' \text{ e } j \geq j'$ , notiamo che la mappa  $H^p(U_{i,j}) \rightarrow \varinjlim_j H^p(U_{i,j}) \rightarrow \varinjlim_i \left( \varinjlim_j H^p(U_{i,j}) \right)$  induce per la proprietà universale una mappa  $\varinjlim_{i,j} H^p(U_{i,j}) \rightarrow \varinjlim_i \left( \varinjlim_j H^p(U_{i,j}) \right)$ . Vediamo che tale mappa verifica le ipotesi del Corollario 1.11 e che quindi è un isomorfismo. Per la surgettività notiamo che ogni elemento di  $\varinjlim_i \left( \varinjlim_j H^p(U_{i,j}) \right)$  viene da un elemento di  $H^p(U_{i,j})$ , e ciò implica che viene da qualche elemento di  $\varinjlim_{i,j} H^p(U_{i,j})$ . Per l'iniettività, se qualche elemento di  $H^p(U_{i,j})$  viene mandato in zero in  $\varinjlim_i \left( \varinjlim_j H^p(U_{i,j}) \right)$  allora deve essere già zero in qualche  $\varinjlim_j H^p(U_{i,j})$ . Ma, similmente, ciò implica che era già zero in qualche  $H^p(U_{i,j})$ . Abbiamo quindi un isomorfismo

$$\varinjlim_i \check{H}^p(K_i) = \varinjlim_i \varinjlim_j H^p(U_{i,j}) \xrightarrow{\cong} \varinjlim_{i,j} H^p(U_{i,j}) = \check{H}^p(K),$$

e quindi un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \varinjlim_i \check{H}^p(K_i) & \xrightarrow{(\cdot \cap \emptyset)_*} & \varinjlim_i H_{n-p}(M, M \setminus K_i) \\
 \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
 \check{H}^p(K) & \longrightarrow & H_{n-p}(M, M \setminus K),
 \end{array}$$

che dimostra quello che volevamo.

Per quanto già osservato per il Teorema 3.3 possiamo concludere che la tesi è vera per tutti i compatti in  $M$ , in quanto in una varietà ogni insieme compatto è l'intersezione di una sequenza di unioni di compatti contenuti in un aperto euclideo.  $\square$



Se la varietà  $M^n$  è compatta prendendo  $K = M$  nel diagramma del Lemma 3.9 otteniamo il seguente corollario, che va sotto il nome di *Dualità di Poincaré-Lefschetz*:

**Corollario 3.12.** *Siano  $M^n$  una  $n$ -varietà compatta e orientabile e  $L \subset M$  chiuso, allora si ha il seguente diagramma con righe esatte*

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & \longrightarrow & \check{H}^p(M, L) & \longrightarrow & \check{H}^p(M) & \longrightarrow & \check{H}^p(L) & \longrightarrow & \check{H}^{p+1}(M, L) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \\ \dots & \rightarrow & H_{n-p}(M \setminus L) & \rightarrow & H_{n-p}(M) & \rightarrow & H_{n-p}(M, M \setminus L) & \rightarrow & H_{n-p-1}(M \setminus L) & \rightarrow & \dots \end{array}$$

dove tutte le mappe verticali, ovvero prodotti cap con la classe di orientazione, sono isomorfismi.

In particolare l'isomorfismo che coinvolge solo  $M$  è detto *Dualità di Poincaré*, che nel caso di  $n$ -varietà immerse compatte e orientabili per il Corollario 3.8 diventa

$$H^p(M) \simeq H_{n-p}(M).$$

Un altro corollario interessante è una generalizzazione del teorema della curva di Jordan.

**Corollario 3.13.** *Sia  $M^n$  una  $n$ -varietà connessa, compatta, orientabile con  $H_1(M^n; \Lambda) = 0$  per qualche anello  $\Lambda$  con unità. Sia  $A$  un sottoinsieme chiuso proprio di  $M^n$ . Allora  $\check{H}^{n-1}(A; \Lambda)$  è un  $\Lambda$ -modulo libero con rango il numero di componenti connesse di  $M^n \setminus A$  meno uno.*

*Dimostrazione.* Tralasciamo  $\Lambda$  nella notazione. Il numero di componenti connesse di  $M \setminus A$  è il rango di  $\text{rank}(H_0(M \setminus A)) = 1 + \text{rank}(\tilde{H}_0(M \setminus A))$ . Dal momento che  $H_1(M) = 0$  e  $\tilde{H}_0(M) = 0$  la sequenza esatta della coppia relativa  $(M, M \setminus A)$  ci dà  $\tilde{H}_0(M \setminus A) \simeq H_1(M, M \setminus A)$ , che a sua volta è isomorfo a  $\check{H}^{n-1}(A)$  per dualità.  $\square$

Nel caso in cui  $\Lambda = \mathbb{Z}$ ,  $M = \mathbb{R}^n$  e  $A = S^{n-1}$  si ottiene il teorema della curva di Jordan generalizzato. Una conseguenza interessante del Corollario 3.13 è che non viene richiesta alcuna regolarità dell'inclusione  $A \hookrightarrow M$ , quindi in particolare un qualsiasi sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  omeomorfo a  $S^{n-1}$  sconnette sempre  $\mathbb{R}^n$  in due componenti connesse.

### 3.4 Dualità su varietà compatte con bordo

Consideriamo ora il caso particolare in cui  $M$  è una  $n$ -varietà compatta con bordo, fissiamo i coefficienti in  $\mathbb{Z}$ . Ricordiamo che una varietà con bordo è orientabile se è orientabile  $M \setminus \partial M$ , in questo caso un'orientazione  $\vartheta$  sarà un generatore  $[M] \in H_n(M, \partial M)$ , che chiamiamo *classe fondamentale* di  $M$ . Sia inoltre  $\partial M$  il bordo di  $M$ , possiamo assumere che ci sia un intorno di  $\partial M$  in  $M$  della forma  $\partial M \times [0, 2)$ , con  $\partial M \simeq \partial M \times \{0\}$ .

Supponiamo che  $M$  sia connessa e orientabile, allora abbiamo i seguenti isomorfismi:

$$\begin{aligned}
 H_{n-p}(M, \partial M) &\simeq H_{n-p}(M, \partial M \times [0, 1)) && \text{(omotopia)} \\
 &\simeq H_{n-p}(M^0, \partial M \times (0, 1)) && \text{(escissione)} \\
 &\simeq H^p(M \setminus (\partial M \times [0, 1))) && \text{(dualità)} \\
 &\simeq H^p(M). && \text{(omotopia)}
 \end{aligned}$$

Nel caso in cui  $p = 0$  si ha  $H_n(M, \partial M) \simeq H^0(M) \simeq \mathbb{Z}$ , dove la classe fondamentale di  $M$  corrisponde a  $1 \in H^0(M)$ , la classe dell'augmentazione. Inoltre per naturalità del prodotto cap abbiamo che l'isomorfismo per dualità è dato proprio dal prodotto  $\text{cap} \cdot \cap [M]$ .

Assumiamo inoltre che  $\partial M$  sia orientata da  $[\partial M] = \partial_*[M]$ , con  $\partial_*$  l'omomorfismo connettivo nella sequenza esatta della coppia relativa  $(M, \partial M)$ , allora vale il seguente:

**Teorema 3.14.** *Sotto le ipotesi di questa sezione il diagramma con righe esatte*

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & H^p(M) & \xrightarrow{i^*} & H^p(\partial M) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{p+1}(M, \partial M) & \xrightarrow{j^*} & H^{p+1}(M) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow \simeq \cap [M] & & \downarrow \simeq \cap [\partial M] & & \downarrow \simeq \cap [M] & & \downarrow \simeq \cap [M] & & \\
 \dots & \longrightarrow & H_{n-p}(M, \partial M) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1-p}(\partial M) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-p-1}(M) & \xrightarrow{j_*} & H_{n-p-1}(M, \partial M) & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

è commutativo (a meno del segno).

*Dimostrazione.* L'unico isomorfismo che non è già stato verificato è il terzo, che lo sarà per il Lemma dei Cinque una volta dimostrata la commutatività del diagramma.

Sia  $c \in \Delta_n(M)$  un rappresentante della classe fondamentale  $[M] \in H_n(M, \partial M)$ , e quindi avremo che  $\partial c$  è una catena in  $\partial M$ .

Per il primo quadrato, sia  $f \in \Delta^p(M)$  un cociclo. Andando prima a destra e poi in basso troviamo una classe rappresentata da

$$f|_{\partial M} \cap \partial c = f \cap \partial c = (-1)^p \partial(f \cap c),$$

mentre andando prima in basso e poi a destra troviamo  $\partial(f \cap c)$ .

Per il secondo quadrato, sia  $f \in \Delta^p(M)$  con  $\delta f = 0$  su  $\partial M$ . Andando prima a destra e poi in basso troviamo  $(\delta f) \cap c = \partial(f \cap c) + (-1)^{p+1} f \cap \partial c$  che è omologo a  $(-1)^{p+1} f \cap \partial c = (-1)^{p+1} f|_{\partial M} \cap \partial c$ , mentre andando prima in basso e poi a destra troviamo  $f|_{\partial M} \cap \partial c$ .

Infine, la commutatività del terzo quadrato è ovvia. □

Come corollario a questo teorema si ha che

$$\cdot \cap [M] : H^p(M, \partial M) \rightarrow H_{n-p}(M)$$

è un isomorfismo.

Concludiamo il capitolo indagando il rapporto tra il prodotto cap che compare nei teoremi di dualità e il prodotto cup. Consideriamo  $M$  una  $n$ -varietà con bordo che sia orientabile con coefficienti in un campo  $\Lambda$ , la mappa bilineare

$$\begin{aligned} \cap_{[M]}^p : H^p(M; \Lambda) \times H^{n-p}(M; \Lambda) &\rightarrow \Lambda \\ (\varphi, \psi) &\mapsto (\varphi \cup \psi)([M]) \end{aligned}$$

si dice **non-singolare** se le due mappe ottenute vedendo la mappa  $\cap_{[M]}^p$  come una funzione di una delle due variabili è un isomorfismo, ovvero se le mappe lineari  $\psi \mapsto (\varphi \cup \psi)([M])$  e  $\varphi \mapsto (\varphi \cup \psi)([M])$  sono entrambe isomorfismi.

**Proposizione 3.15.** *Sia  $M$  una varietà con bordo  $\Lambda$ -orientabile, se  $\Lambda$  è un campo allora la mappa bilineare  $\cap_{[M]}^p$  è non-singolare.*

*Dimostrazione.* Consideriamo la composizione

$$H^{n-p}(M; \Lambda) \xrightarrow{h} \text{Hom}_{\Lambda}(H_{n-p}(M; \Lambda), \Lambda) \xrightarrow{D^*} \text{Hom}_{\Lambda}(H^p(M; \Lambda), \Lambda)$$

dove  $h$  è la mappa che compare nel Teorema 4.1, e  $D^* = (\cdot \cap [M])^*$  è la mappa indotta da  $\text{Hom}(\cdot, \Lambda)$  della mappa di Poincaré vista alla fine del capitolo precedente. La composizione  $D^* \circ h$  manda  $\psi \in H^{n-p}(M; \Lambda)$  nell'omomorfismo  $\varphi \mapsto \psi([M] \cap \varphi) = (\varphi \cup \psi)([M])$ . Poiché  $\Lambda$  è un campo  $h$  è un isomorfismo, allora la non-singolarità in una delle due variabili si ha se e solo se  $\cdot \cap [M]$  è un isomorfismo. La non-singolarità nell'altra variabile segue dalla commutatività del prodotto cup discussa nel Capitolo 2.  $\square$

---

---

# CAPITOLO 4

---

## *APPLICAZIONI DELLA DUALITÀ DI POINCARÉ*

In questo capitolo applicheremo la dualità di Poincaré per dimostrare alcuni risultati interessanti. Faremo uso del teorema dei coefficienti universali nella seguente forma:

**Teorema 4.1.** *Sia  $C$  un complesso di catene di  $R$ -moduli liberi con gruppi di omologia  $H_n(C)$ , allora i gruppi di coomologia  $H^n(C; G)$  del complesso di catene  $\text{Hom}(C_n, G)$  sono determinati dalla sequenza esatta*

$$0 \rightarrow \text{Ext}_R(H_{n-1}(C), G) \rightarrow H^n(C; G) \xrightarrow{h} \text{Hom}_R(H_n(C), G) \rightarrow 0.$$

Osserviamo inoltre che se  $R$  è un campo allora  $\text{Ext}_R(H_{n-1}(C), G) = 0$ , e quindi  $h$  è un isomorfismo.

### 4.1 Spazi proiettivi

Generalizziamo l'Esempio 2.14 con la seguente:

**Proposizione 4.2.** *L'anello di coomologia degli spazi proiettivi reali è*

$$H^\bullet(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2[\alpha] / (\alpha^{n+1}),$$

con  $\deg(\alpha) = 1$ .

*Dimostrazione.* La dimostrazione procede per induzione su  $n$ , dove il caso  $n = 2$  è stato visto nell'Esempio 2.14. Supponiamo la tesi vera per  $n - 1$ , ovvero che esista  $\alpha \in H^1(\mathbb{P}^{n-1}; \mathbb{Z}_2)$  tale che  $\alpha^i$ , ovvero il prodotto cup di  $\alpha$  con se stesso  $i$  volte, genera  $H^i(\mathbb{P}^{n-1}; \mathbb{Z}_2) \forall 0 \leq i \leq n - 1$ . L'inclusione  $\mathbb{P}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{P}^n$  induce un isomorfismi sugli  $H^i$  per  $i \leq n - 1$ , quindi per ipotesi induttiva  $H^i(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}_2)$  è generato da  $\alpha^i$  per  $i < n$ . Vogliamo ora mostrare che  $\alpha^n$  genera  $H^n$ . Come conseguenza della Proposizione 3.15 si ha che se  $\alpha^p$  genera  $H^p(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}_2)$ , allora esiste un elemento  $\beta \in H^{n-p}(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}_2)$  tale che  $\alpha \cup \beta$  genera  $H^n(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}_2)$ , e quindi esiste  $m \in \mathbb{Z}_2$  tale che  $\alpha \cup m\alpha^{n-1}$  genera  $H^n(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}_2)$ , ma questo può succedere solo se  $m = 1$ , concludendo la dimostrazione.  $\square$

Similmente è possibile calcolare gli anelli di coomologia degli spazi proiettivi complessi e quaternionici, trovando che

$$\begin{aligned} H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}) &\simeq \mathbb{Z}[\alpha] / (\alpha^{n+1}) \quad \text{con } \deg(\alpha) = 2, \\ H^*(\mathbb{H}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}) &\simeq \mathbb{Z}[\alpha] / (\alpha^{n+1}) \quad \text{con } \deg(\alpha) = 4. \end{aligned}$$

Continuiamo lo studio degli spazi proiettivi con il seguente:

**Teorema 4.3.** *Per ogni  $n \geq 2$ ,  $\mathbb{P}^n$  non può essere immerso in  $\mathbb{S}^{n+1}$ .*

*Dimostrazione.* Se  $n$  è pari questo segue dal Corollario 3.13, infatti se si potesse immergere  $\mathbb{P}^n$  in  $\mathbb{S}^{n+1}$  avremmo che  $\check{H}^n(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z})$  sarebbe libero, ma dal Teorema 3.8  $\check{H}^n(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}) \simeq H^n(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_2$  che non è libero. Se  $n$  è dispari usiamo quello che abbiamo dimostrato nella Proposizione 4.2. Osserviamo prima che se  $M$  è una  $n$ -varietà connessa, compatta e orientabile con  $H_1(M; \mathbb{Z}) = 0$  e se  $N \subset M$  è una  $(n - 1)$ -varietà compatta, allora  $M \setminus N$  ha esattamente due componenti con  $N$  come bordo di entrambe. In particolare questo segue dal Corollario 3.13 in quanto  $\text{rank}(H^{n-1}(N; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}) = 1$ . Supponiamo quindi che  $\mathbb{S}^{n+1}$  si possa scrivere come  $A \cup B$  con  $A \cap B = \mathbb{P}^n$  e fissiamo  $\mathbb{Z}_2$  come gruppo dei coefficienti. Dall'esattezza del limite diretto, usando il Corollario 3.8, abbiamo la sequenza lunga esatta

$$\dots \rightarrow H^i(\mathbb{S}^{n+1}) \rightarrow \check{H}^i(A) \oplus \check{H}^i(B) \rightarrow H^i(\mathbb{P}^n) \rightarrow H^{i+1}(\mathbb{S}^{n+1}) \rightarrow \dots$$

che implica un isomorfismo  $\check{H}^i(A) \oplus \check{H}^i(B) \simeq H^i(\mathbb{P}^n)$  per ogni  $0 < i < n$ . Poiché  $H^1(\mathbb{P}^n) \simeq \mathbb{Z}_2$ , possiamo assumere  $\check{H}^1(A) \simeq \mathbb{Z}_2$  e  $\check{H}^1(B) \simeq 0$ . Sia  $\alpha \in \check{H}^1(A)$  una classe mappata in una classe non nulla  $\beta \in H^1(\mathbb{P}^n)$ , allora  $\alpha^n \mapsto \beta^n \neq 0$  e quindi la mappa  $\check{H}^n(A) \rightarrow H^n(\mathbb{P}^n)$  è surgettiva. Inoltre, poiché  $A, B$  sono sottoinsiemi chiusi propri di  $\mathbb{S}^{n+1}$ , dalla dualità di Poincaré-Lefschetz (Corollario 3.12) segue che  $\check{H}^{n+1}(A) \simeq H_0(\mathbb{S}^{n+1}, \mathbb{S}^{n+1} \setminus A) = 0$ , similmente per  $B$ . Queste considerazioni contraddicono l'esattezza di

$$\check{H}^n(A) \oplus \check{H}^n(B) \rightarrow H^n(\mathbb{P}^n) \rightarrow H^{n+1}(\mathbb{S}^{n+1}) \rightarrow 0.$$

$\square$

Vediamo adesso come gli spazi proiettivi non possono essere il bordo di una varietà.

**Teorema 4.4.** *Sia  $\Lambda$  un campo e consideriamo omologia e coomologia a coefficienti in  $\Lambda$ . Sia  $V$  una  $(2n + 1)$ -varietà compatta orientata con  $\partial V = M$  una  $2n$ -varietà connessa. Allora  $\dim(H^n(M))$  è pari e vale*

$$\begin{aligned} \dim(\text{Ker}(i_* : H_n(M) \rightarrow H_n(V))) &= \dim(\text{Im}(i^* : H^n(V) \rightarrow H^n(M))) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \dim(H^n(M)). \end{aligned}$$

Inoltre  $\text{Im}(i^*) \subset H^n(M)$  è tale che  $\text{Im}(i^*)^2 = 0$ , cioè il prodotto cup di due classi in  $\text{Im}(i^*)$  è nullo.

*Dimostrazione.* Consideriamo la seguente parte del diagramma presente nel Corollario 3.12:

$$\begin{array}{ccccc} H^n(V) & \xrightarrow{i^*} & H^n(M) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{n+1}(V, M) \\ & & \downarrow \cdot \cap [M] & & \downarrow \cdot \cap [V] \\ & & H_n(M) & \xrightarrow{i_*} & H_n(V), \end{array}$$

dove le frecce verticali sono isomorfismi. Dall'esattezza del diagramma vediamo che  $\text{Im}(i^*) \cap [M] = \text{Ker}(\delta^*) \cap [M] = \text{Ker}(i_*)$ . Segue che  $\text{rank}(i^*) = \dim(\text{Im}(i^*)) = \dim(\text{Ker}(i_*)) = \dim(H^n(M)) - \text{rank}(i_*) = \dim(H^n(M)) - \text{rank}(i^*)$  in quanto  $i_*$  e  $i^*$  hanno lo stesso rango. Quindi  $\dim(H^n(M)) = 2 \cdot \text{rank}(i^*) = 2 \cdot \dim(\text{Ker}(i_*))$ .

Consideriamo ora  $\alpha, \beta \in H^n(V)$ . Abbiamo che  $\delta^*(i^*(\alpha) \cup i^*(\beta)) = (\delta^* i^*)(\alpha \cup \beta) = 0$  per esattezza. Si ha però che  $\delta^* : H^{2n}(M) \rightarrow H^{2n+1}(V, M)$  è iniettivo, in quanto è duale a  $i_* : H_0(M) \rightarrow H_0(V)$ . Questo implica  $i^*(\alpha) \cup i^*(\beta) = 0$  come voluto.  $\square$

Un'immediata conseguenza di questo teorema è che  $\mathbb{P}^{2n}$  non può essere il bordo di una varietà compatta, infatti prendendo  $\Lambda = \mathbb{Z}_2$  si ha che  $\dim(H^n(\mathbb{P}^{2n})) = \dim(\mathbb{Z}_2) = 1$ .

## 4.2 Sfera di Poincaré

In questa sezione dimostriamo l'esistenza di una 3-varietà compatta che ha gli stessi gruppi di omologia della sfera  $S^3$  ma che non è ad essa omeomorfa. Questa 3-varietà va sotto il nome di **Sfera di Poincaré**, poiché l'omonimo matematico la usò come controesempio ad una sua congettura, ovvero che tutte le 3-varietà con la stessa omologia della 3-sfera fossero ad essa omeomorfe.

**Teorema 4.5.** *Esiste una 3-varietà compatta con gli stessi gruppi di omologia di  $S^3$  ma che non è semplicemente connessa.*

*Dimostrazione.* Consideriamo  $I$  il gruppo delle simmetrie di un icosaedro che preservano l'orientazione, detto *gruppo icosaedrico*. Sappiamo che  $I$  è un sottogruppo di  $SO(3)$  isomorfo al gruppo alternante  $A_5$ , che è un gruppo semplice, ovvero non ha sottogruppi normali non banali. Consideriamo l'omomorfismo  $S^3 \rightarrow SO(3)$ , dove  $S^3$  è visto come il gruppo dei quaternioni unitari. La preimmagine di  $I$  in  $S^3$  secondo questo omomorfismo è un gruppo  $I'$ , e vale  $I = I' / \{\pm 1\}$ . Poichè il dodecaedro, solido platonico duale all'icosaedro, ha un cubo inscritto, possiamo assumere che il cubo sia allineato agli assi coordinati e che i quaternioni  $i, j, k$  siano in  $I'$ , e quindi  $iji^{-1}j^{-1} = k^2 = -1$  sta nel commutatore  $[I', I']$ . L'immagine di  $[I', I']$  in  $I$  è  $[I, I] = I$ , in quanto  $I$  è semplice. Segue che anche  $[I', I'] = I'$ . Consideriamo ora lo spazio  $\Sigma^3 := S^3 / I'$ . Abbiamo che  $\pi_1(\Sigma^3) \simeq I'$  e quindi  $H_1(\Sigma^3) \simeq \pi_1(\Sigma^3) / [\pi_1, \pi_1] = 0$ . Dal teorema dei coefficienti universali abbiamo  $H^1(\Sigma^3) \simeq \text{Hom}(H_1(\Sigma^3), \mathbb{Z}) = 0$ . Dalla dualità di Poincaré abbiamo che quindi  $H_2(\Sigma^3) \simeq H^1(\Sigma^3) = 0$ . Abbiamo quindi mostrato che lo spazio  $\Sigma^3$  ha la stessa omologia della sfera  $S^3$ , ma non è semplicemente connesso.  $\square$

Poincaré congetturò in seguito che tutte le 3-varietà omotopicamente equivalenti alla 3-sfera fossero ad essa omeomorfe. Tale congettura è la celebre *congettura di Poincaré*, dimostrata nei primi anni duemila da Perel'man, quasi cento anni dopo la sua formulazione.

---

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Glen E. Bredon. *Topology and Geometry*. Springer Verlag, Cap 6, 1993.
- [2] Allen Hatcher: Algebraic Topology,  
<https://pi.math.cornell.edu/hatcher/AT/AT.pdf>