A.A. 2019/2020
Analisi Superiore

Vieri Benci

Appunti completi del corso

Matteo Stefanini

Questi appunti sono stati presi direttamente a lezione e non sono stati revisionati quindi è molto probabile che siano presenti degli errori. Se volete potete segnalarmi quelli presenti e vi manderò nel più breve tempo possibile la versione rimodificata. L'indice è stato creato copiandolo dal registro delle lezioni. Spero che vi siano d'aiuto e buono studio!

Indice

LEZIONE 01

Titolo nota 02/10/2019

1 - METODI VARIAZIONALI

2 - METODI DI MONOTONIA

3 - METODI TOPOLOGICI

4 - METODI NON STANDARD

PROBLEMA MODELLO

COMPONENTE ELASTICA

$$\begin{cases} -\nabla\cdot[a(x)\nabla u(x)] + f(x,u) = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

ALTRE FORZE CHE AGISCONO SULLA MEMBRANA

CONDIZIONI AL CONTORNO

LO VEDO CON $A[u]$ OPERATORE

IDEA DEL MODELLO DELL'EQUAZIONE:

IN $n=2$ LA SOLUZIONE $u(x)$ È IL PUNTO DI EQUILIBRIO DI UNA MEMBRANA SOGGETTA DA UNA FORZA f, $a(x)$ RAPPRESENTA IL MATERIALE, SE IL MATERIALE È OMOGENEO $a=1$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ESTENSIONE DELLA MEMBRANA

ALTRO MODELLO

$u : [0,T] \times \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N \Rightarrow \frac{\partial t}{\partial u} = A[u]$ EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

CASO FACILE $u_t = \Delta_x u$ È L'EQUAZIONE DEL CALORE (o POPOLAZIONI BATTERICHE)

OPPURE $u_t = \Delta u - f(x,u)$ SE LA DIFFUSIONE DIPENDE DALLA SORGENTE STESSA.

HO UNA SORGENTE DI CALORE O UNA LEGGE DI RIPRODUZIONE DI SPECIE

ANDREMO AD APPLICARE I VARI METODI ALLA RISOLUZIONE DEL PROBLEMA MODELLO

$$\begin{cases} -\Delta u = -f & \text{EQ DI POISSON} \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad \text{PROBLEMA DI LAPLACE}$$

IDEA DI RIEMANN

$V = C^2(\overline{\Omega})$ SPAZIO DI BANACH

IDEA LA SOLUZIONE È IL MINIMO DELL'ENERGIA ASSOCIATA ALL'EQUAZIONE

$-\Delta u = f$

$$E(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - f(x)u\right] dx$$

IN DIMENSIONE 1) $f(x)=0$ SONO I MINIMI DI $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ ↳ ENERGIA.

L'EQUAZIONE $-\Delta u = f$ VIENE VISTA COME VARIAZIONE DI $E(u)$

$$\frac{d}{dt} E(u+tv)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla(u+tv)|^2 - f(x)[u+tv]\,dx\Big|_{t=0} =$$

$$= \int_\Omega (\nabla v \,|\, \nabla(u+tv)) - f(x)v\,dx\Big|_{t=0} =$$

$$= \int_\Omega (\nabla u \,|\, \nabla v) - f(x)v\,dx =$$ INTEGRO PER PARTI E USO $u|_{\partial\Omega} = 0$

$$\int_\Omega [-\Delta u - f(x)]\,v\,dx$$

SE u è IL MINIMO DELL'ENERGIA $\forall v$ $\frac{d}{dt}E(u+tv)\Big|_{t=0} = 0$

$\Rightarrow \quad -\Delta u - f(x) = 0$

RIEMANN DISSE CHE $\forall f$ $E(u)$ È COERCITIVA $\Rightarrow$ IL MINIMO ESISTE SEMPRE E QUINDI IL PROBLEMA AMMETTE MINIMO

ERRORE NON È DETTO CHE $u \in C^2(\overline{\Omega})$

CALCOLO DIFFERENZIALE IN SPAZI DI BANACH

SIA $J: X \longrightarrow \mathbb{R}$ X SPAZIO DI BANACH

DEF DERIVATA DIREZIONALE DI J NELLA DIREZIONE v

$$D_v J(u) := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{J(u+\varepsilon v) - J(u)}{\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} J(u+\varepsilon v)\Big|_{\varepsilon=0}$$

DEF DERIVATA DI GATEAUX

HO UNA MAPPA $v \longrightarrow D_v J(u)$ SE È CONTINUA IN V SI CHIAMA DERIVATA DI GATEAUX

DEF J SI DICE DIFFERENZIABILE NEL PUNTO $u \in X$

SE $J(u+v) = J(u) + L_u[v] + o(\|v\|)$ E L_u È IL DIFFERENZIALE

NOTAZIONE $L_u[v] = dJ(u)[v]$

$dJ(u) : X \longrightarrow X'$ SE X È DI HILBERT $\phi : X \longrightarrow X'$

POSSO IDENTIFICARE TRAMITE IL TEOREMA DI RIESZ

$\phi[u] = (u_\phi | u)$

IN REALTÀ $dJ_u : T_u X \longrightarrow T_u X'$

$\searrow$ SPAZIO COTANGENTE A X' IN u

PROP SE J È DIFFERENZIABILE IN $u \Rightarrow J$ È DERIVABILE IN u ESISTE LA DERIVATA DI GATEAUX

E VALE $dJ(u)[v] = D_v J(u)[v]$

OSSERVAZIONE IL TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE QUINDI SE $D_v J(u)$ È CONTINUO IN UN INTORNO DI u $\Rightarrow$ LA DERIVATA DI GATEAUX SI CHIAMA DI FRECHET E IN QUEL CASO $J(u)$ È DIFFERENZIABILE.

ATTENZIONE: IN GENERALE LE NORME QUI NON SONO EQUIVALENTI, QUINDI LA SCELTA DELLA NORMA PUÒ INCIDERE MOLTO SULLA DIFFERENZIABILITÀ.

NOTAZIONE QUINDI DIREMO CHE J È UN OPERATORE DI CLASSE C^1

$$J'(u) : u \in X \longrightarrow J'(u) \in X'$$

$$\overset{J'(u)}{\underset{dJ(u)[v]}{\shortparallel}}$$

ESEMPIO $J(u) = \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + F(x,u)\, dx$ $\quad u \in C^2(\overline{\Omega}) \cap C^0_0(\overline{\Omega})$ $\quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ LIMITATO

$f = F_u$

$$dJ(u)[v] = \underbrace{\int_\Omega (\nabla u | \nabla v) + f(x,u) v\, dx}_{\phi(v)} \overset{\swarrow}{=}$$

$u \in C^2$ POSSO SCARICARE UNA DERIVATA E DATO AL BORDO NULLO

FUNZIONALE LINEARE E CONTINUO IN V

A PATTO DI CHIEDERE f ABB. REGOLARE

$$= \int_\Omega \left[-\Delta u(x) + f(x,u) \right] v\, dx$$

HA SENSO $J'(u) = -\Delta u + f(x,u)$ A PATTO DI IDENTIFICARLO CON UN OGGETTO DI $\Big(\underbrace{C^2(\overline{\Omega}) \cap C^0_0(\Omega)}\Big)'$

MA È UNO SPAZIO COMPLICATO.

TORNANDO AL PROBLEMA DI RIEMANN

VOLEVAMO MINIMIZZARE

$$J(u) = \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - f(x) u\, dx \qquad \text{SE } u_n \in C^2(\Omega) \cap C^0_0(\overline{\Omega})$$

PURTROPPO NON CONVERGE

IDEA: DEVO TROVARE UNO SPAZIO DOVE CI SONO LE SOLUZIONI

$$J(u) = \frac{1}{2} \overbrace{a(u|u)}^{\text{FORMA QUADRATICA DEFINITA POSITIVA}} - f(x) u \qquad \text{MA } C^2(\Omega) \text{ con } a(u|u) \text{ NON È COMPLETA.}$$

ABBIAMO $C^2(\Omega) \cap C^0_0(\overline{\Omega})$ con $a(u|v) = \int \nabla u \nabla v\, dx$ NON È COMPLETO

ALLORA PRENDO $H^1_0(\Omega) =$ CHIUSURA DI $C^2_c(\Omega)$ RISPETTO AD $a(u|v)$

LEZIONE 02

Titolo nota 09/10/2019

PROBLEMA MODELLO

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \qquad J(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - f(x)u \, dx \qquad u \in C^1_0$$

SE f È DISCONTINUA $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar\Omega)$

PROBLEMA: NON È DETTO CHE LA SOL CI SIA

ANALOGIA: TROVARE LA SOLUZIONE DI $x^2 = 2$ IN $\mathbb{Q} \overset{\text{SI COMPLETA}}{\rightsquigarrow}$ E SI TROVA $\mathbb{R}$

ALLORA PRESA $C^2_c(\Omega)$ SI COMPLETA SECONDO LA NORMA $\|u\| = \sqrt{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}$

E SIA $J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int f(x) u \, dx$ SICCOME IL COMPLETAMENTO DI $C^2_c(\Omega)$ CON QUELLA NORMA

È UN HILBERT, ALLORA DEVO MOSTRARE CHE $J(u)$ È DEBOL SEMICONTINUO WF

IL PRIMO PEZZO È LA NORMA QUINDI LO È

ADESSO IL SECONDO PEZZO È LINEARE QUINDI BASTA MOSTRARE CHE È CONTINUO OVVERO

$$\left| \int f \cdot u \right| \leq K \|u\|$$

USANDO LA DIS. DI POINCARÈ IN $H^1_0(\Omega)$ (DOPO AVER USATO HOLDER)

$$\left| \int u^2 \right| \leq C_\Omega \int |\nabla u|^2$$

TH $\forall f \in L^2$, $\exists u$ $\forall v \in H^1_0(\Omega)$

$$\int \nabla u \nabla v \, dx = \int f \cdot u$$

PROBLEMA: MA u È IL LIMITE DI UNA SUCC DI CAUCHY OTTENUTA COME COMPLETAMENTO QUINDI È UNA CLASSE DI EQUIVALENZA, NON SO NEANCHE SE È UNA FUNZIONE

DEF DERIVATA DEBOLE

$D_i f = g \in L^1_{loc}$ è UNA DERIVATA DEBOLE SE $\forall \varphi \in C^\infty_c$

$$\int_\Omega g \varphi \, dx = -\int f \partial_i \varphi \, dx$$

INTRODUCIAMO QUINDI

NOTAZIONE (DI SCHWARTZ) $C_c^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$

$$W^1(\Omega) = \{ u \in L^1_{loc}(\Omega) \mid \nabla u \in L^2 \}$$

ALLORA $\|u\|^2 = \int |\nabla u|^2 dx + \int u^2 dx$ È UNA NORMA SU QUESTO SPAZIO

E QUESTA NORMA È EQUIVALENTE ALLA PRECEDENTE IN $H^1_0(\Omega)$

DEF $W^{p,m} = \{ u \in L^1_{loc}(\Omega) \mid D^k u \in L^m, \ |k| \leq p \}$

QUELLO DI PRIMA $W^{1,2} = W^1$

$W_0^{p,m}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}$ CHIUSO RISPETTO $\|u\|^p = \sum_k \int |D^k u|^p dx$

$H^{p,m}$ CHIUSURA DI $C^\infty(\Omega)$ CON LA NORMA SU TUTTE LE DERIVATE

$H_0^{p,m}$ " DI $\mathcal{D}(\Omega)$ CON LA STESSA NORMA

NOTAZIONE: W DI SOLITO SI USA I BANACH e H SE SONO HILBERT

e $W_0^{1,2} = H_0^1$

TORNANDO AL PROBLEMA

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

PER QUALI f LO SO RISOLVERE?

ABBIAMO VISTO CHE SE $f \in L^2$ LO SO RISOLVERE?

SUPPONIAMO $f \notin L^2$

A NOI SERVE CHE SE $u \in H^1_0$ $\int f \cdot u = \phi(u)$ SIA UN FUNZIONALE E SIA LINEARE E CONTINUO (VEDREMO $f \in L^1$ IL PROBLEMA È APERTO)

VEDREMO COME MIGLIORARE LE INFORMAZIONI CON LE DIS. DI SOBOLEV.

GENERALIZZANDO IL PROBLEMA

i) $L = -\mathrm{div}[k(x) \nabla u(x)] \rightsquigarrow \int k(x) |\nabla u|^2 dx$ SISTEMARE K IN MODO CHE IL PROBLEMA SIA BEN POSTO.

ii) $L = \sum_{ij} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u(x)$

SI STEMARE a_{ij} b_i e $C(x)$ PERCHÈ IL PROBLEMA SIA BEN POSTO

SUPPONIAMO NEL CASO $K \geq 0$ q.o

ALLORA SI COSTRUISCE $W^1_0(\Omega, K) :=$ SPAZIO DI SOBOLEV CON PESO

CIOÈ $\int K(x)\, |\nabla u(x)|^2 \, dx < +\infty$ E POI RESTA DA STUDIARE

PROBLEMA DI DIRICHLET CLASSICO

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

PRENDO UNA $v|_{\partial\Omega} = g \Rightarrow u = w + v$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\Delta w = \overbrace{+\Delta v}^{f} \\ w|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

NASCONO I PROBLEMI DI TRACCIA SE AD ESEMPIO g È CONTINUA.

$W^1 \ni u \longrightarrow \partial u \in W^?(\partial\Omega)$

TORNANDO A:

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

SE $u \in H^1_0$ COSA RAPPRESENTA $-\Delta u$?

$-\Delta u$ VIVE IN $\left(H^1_0(\Omega)\right)' = H^{-1}(\Omega)$

INDICANDO LA DUALITÀ $\langle \, , \, \rangle$

$${}_{H^{-1}}\langle -\Delta u, v \rangle_{H^1_0(\Omega)} = \int \nabla u \, \nabla v \, dx$$

SE u FOSSE C^2 $-\Delta u$ SAREBBE IL LAPLACIANO SCARICANDO LA DERIVATA.

QUINDI L'IDEA È QUELLA DI COSTRUIRE SPAZI SEMPRE + GRANDI:

TEORIA DELLE DISTRIBUZIONI:

IDEA: PIÙ UNO SPAZIO È PICCOLO, PIÙ IL SUO DUALE È GRANDE.

LO SPAZIO "PIÙ PICCOLO" SENSATO DA CUI PARTIRE È

$\mathcal{D}(\Omega) = C^\infty_c(\Omega) \rightsquigarrow \mathcal{D}'(\Omega)$

IL PROBLEMA DI DEFINIRE LA TOPOLOGIA DI $\mathcal{D}(\Omega)$ PER DEFINIRE IL SUO DUALE TOPOLOGICO. SICCOME LA TOPOLOGIA È COMPLICATA BASTA DIRE QUANDO LA SUCCESSIONE È CONVERGENTE.

$\varphi_n \to 0$ SE i) $\exists B_R$: $\operatorname{supp} \varphi_n \subset B_R$

ii) $\forall k$ $\|\partial_i^k \varphi_n\|_\infty \to 0$ (UNIFORMEMENTE)

SE $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R} \Rightarrow T \in \mathcal{D}'(\Omega) \Leftrightarrow \forall \varphi_n \to 0 \quad \langle T, \varphi_n \rangle \to 0$

ESEMPI 1) HO UNA $f \in L^1_{loc}$ VOGLIO ASSOCIARGLI UNA DISTRIBUZIONE $T_f \in \mathcal{D}'$

$${}_{\mathcal{D}'}\langle T_f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}} = \int f \cdot \varphi \, dx$$

2) $\mu \in \mathcal{M}$ MISURA DI RADON (POSITIVE)

$$\langle T_\mu, \varphi \rangle = \int \varphi \, d\mu$$

3) SIA $(\mathcal{C}_c)' = \mathcal{M}$ MISURE DI RADON CON SEGNO

OSS SE $f \notin L^1_{loc}$ $\int f \cdot \varphi \overset{\text{POTREBBE}}{=} +\infty$

$$\langle Lf, \varphi \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } \int f\varphi \, dx = +\infty \\ \int f \varphi \, dx & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

NON È UNA DIST. QUINDI ANCHE LA DISTRIBUZIONE HA DEI LIMITI.

DEF DERIVATA DI UNA DISTRIBUZIONE

$D_i T$ è LA DERIVATA DI T SE VALE CHE

$$\langle D_i T, \varphi \rangle = - \langle T, \partial_i \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

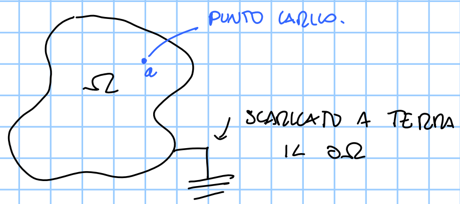
QUINDI TORNANDO AL PROBLEMA GUIDA

DEF $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ è SOL NEL SENSO DELLE DISTR. $\begin{cases} -\Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$

SE $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ $\langle -\Delta u, \varphi \rangle = \langle u, -\Delta \varphi \rangle$

ALTRO ESEMPIO: δ DI DIRAC $\quad \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a) \quad \forall a \in \Omega$

PROBLEMA



MODELLIZZO IL PROBLEMA

$$\begin{cases} -\Delta u = \delta_a \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

MA $\delta_a \in H^{-1}$ QUINDI NON LO POSSO RISOLVERE

$$\int \varphi_n \delta_a = \varphi_n(a)$$

MA SE CI C'È LA SINGOLARITÀ L'ENERGIA ESPLODE.

PROBLEMA: UNA CARICA PUNTIFORME HA ENERGIA INFINITA.

OPERAZIONI CON LE DISTRIBUZIONI: $+, \lambda$ SONO UNO SPAZIO VETTORIALE

D DERIVATE

TRASLAZIONE, DILATAZIONE

IDEA GENERALE

HO UNO SPAZIO DI LAVORO V, LO IMMERGO IN UN HILBERT H,

L'HILBERT LO IDENTIFICO COL SUO DUALE E QUELLO LO IMMERGO

IN V'.

(TRIPLETTA DI LIONS) $\quad V \hookrightarrow H (\cong H') \hookrightarrow V'$

$$v \longrightarrow (h, v) = \phi(v)$$

ESEMPI $\quad$ i) $H'_0 \hookrightarrow L^2 \hookrightarrow H^{-1}$ $\qquad$ ii) $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^2 \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$

$$\Rightarrow \boxed{-\Delta : H'_0(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)}$$

È UN'IDENTIFICAZIONE DI H'_0 CON H^{-1}

PERCHÈ È UN HILBERT.

IN GENERALE $\quad \left(H^m_0(\Omega)\right)' = H^{-m}(\Omega)$

TORNANDO

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

POTREMMO VOLENDO RISOLVERE USANDO IL TEOREMA DI RIESZ INVECE CHE IL METODO VARIAZIONALE.

$$\int \nabla u \nabla v = \int f v$$

E QUINDI LA SOLUZIONE È IL FUNZIONALE DI $(u|v) = \phi(v) \quad \phi \in H'$

SE INVECE

$$\begin{cases} -\Delta u + \vec{b}\,\nabla u = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

NON AVREI POTUTO PERCHÉ $\vec{b}\cdot\nabla u$ NON È DETTO SIA SIMMETRICA

<u>TEO</u> (LAX-MILGRAM) (NO -DIM LO RIVEDREMO CON ALTRI STRUMENTI)

SE $a(u,v)$ BILINEARE IN H

i) $a(u,v) \leq K \|u\| \cdot \|v\|$

ii) $a(u,u) \geq \nu \|u\|^2$

ALLORA $\forall\, \phi \in H'$ L'EQUAZIONE $a(u,v) = \phi(v)\ \forall v$ HA SOLUZIONE UNICA.

LEZIONE 03

Titolo nota 11/10/2019

CASO NON LINEARE

$$\begin{cases} -\Delta u + f(x,u) = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad \overset{\text{METODO VARIAZIONALE}}{\rightsquigarrow} \quad \min \text{ DI } J(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(x,u)\,dx$$

$$\text{CON } F(x,u) = \int_0^u f(x,s)\,ds$$

SCELTA DELLO SPAZIO

$H^1_0(\Omega)$ $\quad \|u\|^2_{H^1} = \int_\Omega |\nabla u|^2 + |u|^2\,dx$ COME COMPLETAMENTO DI $\mathcal{D}(\Omega)$ (o $C^1(\bar\Omega)$ SE Ω È ABB REGOLARE)

IN $J(u)$ IL PEZZO PROBLEMATICO È $\int F(x,u)\,dx$

RICORDANDO CHE $-\Delta : H^1_0(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$

QUINDI f NELL'EQ. LA VOGLIO VEDERE COME UN'OPERATORE $\quad u \longrightarrow f(x,u)$

$\Rightarrow$ È IN $H^{-1}(\Omega)$ SE $\int f(x,u)v(x)\,dx < +\infty \quad \forall v \in H^1_0$

ALTRIMENTI LO VEDO COME UNA DISTRIBUZIONE

$$H^1_0(\Omega) \overset{i}{\hookrightarrow} \underbrace{L^2 \xrightarrow{f} L^2}_{u \longrightarrow f(x,u)} \overset{i}{\hookrightarrow} H^{-1}(\Omega)$$

$\rightsquigarrow$ OPERATORE DI NIEMITSKIJ

$\downarrow$

VORREI CHE FOSSE CONTINUA.

TEOREMA DATO $f : L^p(\Omega) \longrightarrow L^q(\Omega)$ OPERATORE DI NIEMITSKIJ È CONTINUO SE:

(DIM VEDI LIBRO AMBROSETTI - PRODI)

1) f È UNA FUNZIONE DI CARATHÉODORY

CIOÈ $\quad f(x,t)$ È MISURABILE IN x $\forall t$

E PER q.o. x È CONTINUA IN t

2) SE $\forall u \in L^p \quad f(x,u(x)) \leq g(x) + |u|^{\frac{p}{q}}$ CON $g(x) \in L^q$

VEDIAMO CHE 2) $\Rightarrow$ $f(x,u(x)) \in L^q$

$$\int_\Omega |f(x,u(x))|^q \le \int_\Omega \left|g(x)+|u|^{\frac{p}{q}}\right|^q dx \le \int_\Omega |g(x)| + \left(|u|^{\frac{p}{q}}\right)^q < +\infty$$

SE $\mu(\Omega)<+\infty$ LA CONDIZIONE 2) LA POSSO SOSTITUIRE CON

$$f(x,u(x)) \le M + |u|^{\frac{p}{q}}$$

SICURAMENTE LE COSTANTI SONO IN L^q

GENERALIZZAZIONI DELL'OPERATORE

$$H_0^1(\Omega) \overset{i}{\hookrightarrow} L^2(\Omega) \xrightarrow{f} L^2(\Omega) \overset{i}{\hookrightarrow} H^{-1}(\Omega)$$

$\Rightarrow$ $|f(x,u)| \le M+|u|$ MA $H_0^1 \hookrightarrow L^2$ SI IMMERGE MEGLIO DI L^2 MAGARI POSSO AVERE UNA STIMA MIGLIORE

IMMERSIONI DI SOBOLEV

$$W^{m,p}(\Omega) \overset{i}{\hookrightarrow} L^q(\Omega) \qquad \Omega \text{ LIMITATO}$$

SE $\frac{1}{p}-\frac{m}{N} \le \frac{1}{q}$ i È CONTINUA SE "<" i È COMPATTA

SE $\frac{1}{p}-\frac{m}{N}=0$ ALLORA $u \in W^{m,p} \Rightarrow u \in L^p \ \forall p<+\infty$

SE $\frac{1}{p}-\frac{m}{N}=0$ ALLORA u È HÖLDERIANA $C^{0,\alpha}$ $\to$ (TEO DI MORREY)

$$|u(x)-u(y)| \le C|x-y|^\alpha \quad \text{CON } \alpha<1$$

HO A GRATIS LA COMPATTEZZA

VOGLIO FARE MEGLIO CON L'OPERATORE DI NIGM.

$$H_0^{1,2}(\Omega) \overset{i}{\hookrightarrow} L^p \xrightarrow{f} L^q \overset{i}{\hookrightarrow} H^{-1}(\Omega)$$

VOLENDO OTTIMIZZARE LA STIMA

$$|f(x,u)| \le M+|u|^{p/q}$$

VOGLIO IL p PIÙ GRANDE POSSIBILE E q PIÙ PICCOLO

$H_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^p$ $\quad \frac{1}{2} - \frac{1}{N} \leq \frac{1}{p}$ PER P MAGGIORE DEVE VALERE

$$p \leq \frac{2N}{N-2} = 2^* = \text{ESPONENTE CRITICO.}$$

POICHÈ AVREMO BISOGNO DI UN'IMMERSIONE COMPATTA SUPPORREMO $p < 2^*$

RICORDO CHE SE $H_0^1(\Omega) \overset{i}{\hookrightarrow} L^p$ È CONTINUA (o CPT)

$\Rightarrow (L^p)' \overset{i'}{\hookrightarrow} H^{-1}(\Omega)$ È CONTINUA O COMPATTA

OSS SULLA MAPPA COVARIANTE:

$$X \overset{i}{\hookrightarrow} Y \Rightarrow Y' \overset{i'}{\hookrightarrow} X' \qquad {}_{X'}\langle i'\alpha, y\rangle_{Y'} = {}_{X}\langle \alpha, iy\rangle_{Y}$$

QUINDI LO SCHEMA DIVENTA

$$H_0^1(\Omega) \overset{i}{\hookrightarrow} L^p \xrightarrow{f} L^{p'} \overset{i'}{\hookrightarrow} H^{-1}(M)$$

HO PRESO $p' = q$ POICHÈ SE p È IL PIÙ GRANDE p' È IL PIÙ PICCOLO

$$p = \frac{2N}{N-2}$$

$$1 - \frac{N-2}{2N} = \frac{N+2}{2N} = \frac{1}{p'}$$

$\Rightarrow$ LA STIMA DIVENTA $|f(x,u)| \leq M + |u|^{\frac{N+2}{N-2}}$ PER $N > 2$

INOLTRE SE $r < \frac{N+2}{N-2} \Rightarrow$ HO $|f(x,u)| \leq M + |u|^r$ E L'OPERATORE È CPT PERCHÈ

$$\begin{tikzcd} H_0^1(\Omega) \arrow[r, hook, "CPT"] \arrow[rrr, bend right, "CPT"'] & L^p \arrow[r, hook, "CONT"] & L^{p'} \arrow[r, hook, "CONT"] & H^{-1} \end{tikzcd}$$

TEOREMA $f: H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ È COMPATTA

ALLORA $F(x,u) = \int_0^u f(x,s)\,ds$ È DEB. CONTINUO.

DIM SE $K: X \to X'$ OPERATORE LINEARE

ALLORA $J(v) = \int_0^1 \langle K(tv), v\rangle\, dt$ È IL SUO INTEGRALE.

ALLORA SE K È COMPATTO QUANDO MANDA SUC. DEB. CONVERGENTE IN UNA FORT. CON V

SI HA CHE $J(u_n) = \int_0^1 \langle \underset{\text{CONV. FORT.}}{K(tu_n)}, \overset{\text{CONV. DEBOLE}}{u_n} \rangle\, dt \to$ CONV. DEBOLE (PER UN COROLLARIO DI BANACH-STEIN)

ABBIAMO QUINDI CHE L'OPERATORE

$$J(u) = \underbrace{\int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2}_{\text{D-SCI PERCHÉ È UNA NORMA}} + F(x, u(x))\, dx$$

È DEBOLMENTE CONTINUO (QUINDI D-SCI)

ALLORA $J(u)$ È DSCI

RESTA DA METTERE UNA CONDIZIONE DI COERCIVITÀ PER AVERE IL MINIMO.

AD ESEMPIO $F(x,u) = -|u|^s$ CON $s > 2$ NON VA BENE

PERCHÉ $J(u_0 t) \sim A t^2 - B t^s$ CON $A, B > 0$

$\to -\infty$ $t \to +\infty$ QUINDI IL MIN È $-\infty$

ESEMPI

1) $-\Delta u + u|u|^4 = g(x)$ $\quad g(x) \in H^{-1}(\Omega)$

g E AL DUALE. $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*} \Rightarrow g \in (L^{2^*})' = L^{\frac{2N}{N+2}}$.

INOLTRE $f(x,u) = u|u|^4 - g(x)$ DEVE ESSERE UN BUON OPERATORE DI NIEM. $\Rightarrow 5 < \frac{2N}{N-2} \Leftrightarrow N = 3$ OK $\quad N = 5$ NO

2) $$\begin{cases} -\Delta u + |u|^{p-2} u = g(x) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$ $\quad J(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{p}|u|^p - g(x)u(x)\, dx$

SE p È GRANDE H_0^1 POTREBBE NON ESSERE LO SPAZIO GIUSTO (PENSERESTI CHE $\int \frac{1}{2}|\nabla u|^2$ SIA UNA NORMA)

CERCO $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega) = V$ e $\|u\|_V = \|u\|_{H_0^1} + \|u\|_{L^p}$

$\Rightarrow \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{p}|u|^p$ È LA NORMA, È SCI $\quad J(u): V \longrightarrow V'$ È COERCITIVO PERCHÉ p È GRANDE

AL SOLITO $g(x) \in V' = \underset{(h,\ k)}{H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega)}$ $\quad \langle h+k, v\rangle = \langle h, v\rangle + \langle k, v\rangle \ \forall v \in V$

QUINDI IL PEZZO $\int g(x)\,u$ È COMPATTO ALLORA $J(U)$ HA MINIMO.

3) $\begin{cases} -\Delta u + a(x)\,|u|^{p-2}u = g(x) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$

$a(x)$ SCHIFOSA

$a \geq 0$

$u \in H^1_0(\Omega) \cap L^p(\Omega, a) = V$

$\|u\| = \|u\|_{H^1_0} + \|u\|_{L^p_a}$ $\qquad \|u\|_{L^p_a} = \int_\Omega |u|^p a(x)\,dx$

PROBLEMA CARATTERIZZARE V'

4) SE $a(x)$ PUÒ ESSERE NEGATIVA $J(U)$ POTREBBE NON ESSERE LIMITATO INF

PROBLEMA $\begin{cases} -\Delta u - |u|^{p-2}u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$ C'È UNA SOLUZIONE NON BANALE?

CASO $p<2^*$ $\qquad J(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{p}|u|^p\,dx$

OSS $U_0 = 0$ È MIN LOC $\qquad \frac{1}{2}\|u\|^2_{H^1} - \frac{1}{2}\|u\|^p_{L^p}$ $\qquad$ MA $p<2^* \Rightarrow H^1 \hookrightarrow L^p$

$\geq$

$c_1\|u\|^2_{L^p} - \frac{1}{2}\|u\|^p_{L^p} \geq 0$

MA $J(U)$ AVRÀ PUNTI CRITICI? SE SÌ SONO LE MIE SOL

DEF $\quad J'(u_0) = 0 \qquad J(u_0) = c \qquad u_0 =$ PUNTO CRITICO

$c =$ VALORE CRITICO

TEOREMA (PASSO MONTANO)

$\Rightarrow \quad c = \inf_{\gamma \in \Gamma_{a,b}} \max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t))$

$$\Gamma_{a,b} = \{\gamma : [0,1] \to H^1_0(\Omega) \mid \gamma(0) = a \quad \gamma(1) = b \quad J(b) < 0\}$$

LEZIONE 04

Titolo nota 16/10/2019

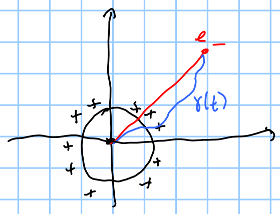
$$\begin{cases} u \in H^1_0(\Omega) \\ -\Delta u = |u|^{p-2} u \end{cases} \qquad 2 < p < p^* = \frac{2N}{N-2}$$

LE SOL SONO I PUNTI CRITICI DI

$$J(u) = \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{1}{p} \int_\Omega |u|^p dx = \frac{1}{2} \|u\|^2_{H^1_0} - \frac{1}{p} \|u\|^p_{L^p} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \|u\|^2_{H^1_0} - \frac{k}{p} \|u\|^p_{H^1_0} \geq 0$$

IN UN INTORNO DI 0



- 0 è UNA SOLUZIONE
- IN UN INTORNO DELLO ZERO $J(u) \geq 0$
- ESISTE e ABB. LONTANO TALE CHE $J(e) < 0$

PASSO MONTANO

POICHE TUTTI I CAMMINI SONO COMPATTI $\exists \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t))$

SIA $\Gamma = \{ \gamma : [0,1] \to H^1_0 : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e \}$

$$\min_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t))$$

USARE IL TEOREMA DEL PASSO MONTANO È COME USARE "UN CANNONE PER UN MOSCERINO"

<u>TEORIA DEGLI AUTOVALORI DEGLI OPERATORI</u>

SIA $J_0(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|$ E SIA $M = \{ w \in H^1_0 \mid \underbrace{\|u\|_{L^p}}_{G(u)} = 1 \}$ È UNA VARIETÀ DIFF.

USO IL TEOREMA DEI MOLT. DI LAGR.

$$J_0'(u) = \lambda G'(u) \Rightarrow -\Delta u = \lambda |u|^{p-2} |u| \qquad \text{SIA } \frac{w}{\rho} = u$$

$$-\frac{\Delta w}{\cancel{\rho}} = \frac{\lambda}{\rho^{p-1}} |w|^{p-2} w \Rightarrow \rho = \sqrt[p-2]{\lambda}$$

DEVO ESSERE SICURO CHE ≥ 0

INT. PER PARTI E SCARICO UNA DERIVATA

$$\begin{cases} u \cdot J_0'(u) = \lambda G'(u) \cdot u \\ \|u\|_{H^1_0} = \lambda \cdot \frac{1}{p} \|u\|^p_{L^p} \Rightarrow \lambda \geq 0 \end{cases}$$

ALLORA PRESA $u_n \longrightarrow \bar{u} \overset{?}{\in} M$. MA $u_n \xrightarrow[L^p]{} \bar{u}$ $\forall p < 2^*$

SUCC MINIMIZZANTE

PERCHÈ $J_0(u)$ È DEBOLMENTE SCI
M È DEBOLMENTE CHIUSA
$J_0(u)$ È COERCITIVO
$\Rightarrow$ USO WEIERSTRASS.

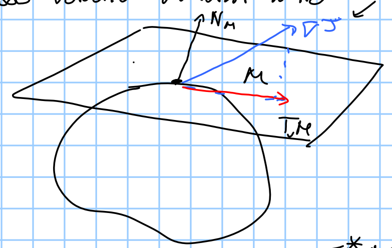
OSS IL TEO DEI MOLT. NON USA COSE DI COMPATTEZZA QUINDI NON CAMBIA.

QUINDI IDEA GENERALE: LE COSE CHE NON USANO LA COMPATTEZZA NON CAMBIANO

TEO MOL. DI LAGRANGE

SIA $M = \{ G(u) = 0 \}$ UNA VARIETÀ CHE POSSO VEDERE IMMERSA IN $\mathbb{R}^n$

MI BASTA CHE LA PROIEZIONE DI ∇J SU T_M SIA NULLO.



$$0 = \nabla_M J = \nabla J(u) - \lambda \frac{\nabla G}{|\nabla G|}$$

$$e \quad \lambda = \frac{(\nabla J(u) \mid \nabla G(u))}{|\nabla G(u)|}$$

$$N_M = \frac{\nabla G}{|\nabla G|} \in \underbrace{T^* M}_{\text{COTANGENTE}}$$

MA PER SCRIVERE IL TEOREMA DI LAGRANGE COSÌ HO BISOGNO DI UNA STRUTTURA HILBERTIANA

PERCHÈ $\quad (\nabla J(u) \mid v) = dJ(u)[v]$

INFATTI NEGLI SPAZI DI BANACH IL TEO DEI MOLTIPLICATORI SI SCRIVE COME

$$dJ_0(u) = \lambda \, dG(u)$$

OVVERO $\quad dJ_M(u) = dJ_0(u) - \lambda \, dG(u) = 0$

PIÙ IN GENERALE

$$\begin{cases} u \in H \\ J'u = \lambda G'(u) \\ G(u) = 1 \end{cases}$$

SE J' E G' SONO LINEARI ALLORA HO INFINITI AUTOVALORI PER I PROBLEMI NON LINEARI ? HO INFINITI AUTOVALORI

QUINDI SE NON FISSO L'AUTOVALORE

$$\begin{cases} u \in H^1_0(\Omega), \ \lambda \in \mathbb{R} \\ -\Delta u = \lambda |u|^{p-2} u \\ \|u\|_{L^p} = 1 \end{cases}$$

E CON IL TRUCCO DI OMOGENEIZZAZIONE TUTTE LE SOL. DI QUESTO MI DANNO LE SOL. DEL PROB. INIZIALE

TORNANDO A $-\Delta u = |u|^{p-2} u$ CON $\underline{\underline{p = p^*}} = \frac{2N}{N-2}$

SE Ω È UNA $\overset{\text{CORONA CIRCO}}{V}$ O UN INSIEME A SIMMETRIA RADIALE $\overset{\text{SENZA}}{V} \Rightarrow u = r \cdot h(|r|)$ E QUINDI DIVENTA UN PROBLEMA IN UNA VARIABILE $-\Delta u = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial_r^2}$ (SVILUPPARE IN 0)

∼ ANCHE SE PERTURBO POCO SENZA MODIFICARE TROPPO LA TOPOLOGIA.

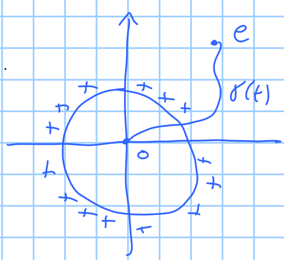
TORNANDO AL PROBLEMA INIZIALE LO COMPLICO

$$\begin{cases} u \in H^1_0(\Omega) \\ -\Delta u = f(u) \ \text{(NON LINEARE)} \end{cases} \qquad J(u) = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 dx - \int_0^u f(s)\, ds$$

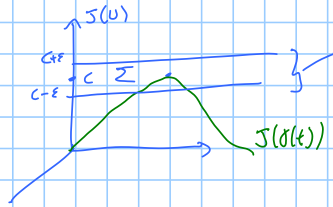
CON f IN MODO CHE L'OPERATORE DI NIEMYTSKI SIA COMPATTO.

DIM (CON ERRORI VOLUTI) DEL PASSO MONTANO

$$\inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{s \in [0,1]} J(\gamma(s)) = c \geq a = \inf_{\text{SULLA PALLA}} J(\upsilon)$$



SUPPONGO PER ASSURDO ESISTE $\varepsilon > 0$ $\forall t$ NELLA STRISCIA Σ $\|J'(u)\| > 0$



$\Rightarrow$ POSSO FARE UNA DEFORMAZIONE

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \eta_u(t) = \frac{-\nabla J(\eta_u(t))}{\|\nabla J(\eta_u)\| + 1} \Rightarrow \\ \eta_u(t) = u \end{cases}$$

SOL

ERR. TEC. 1: NON È DETTO SIA LOC. LIP.

ESISTE UNA SOL (IL PROBLEMA DI CAUCHY NON HA COMPATTEZZA)

$$\frac{d}{dt} J(\eta_u(t)) = \left(\nabla J(\eta_u(t)), \frac{d}{dt} \eta_u(t) \right) = -\|\nabla J\|^2 < 0$$

ERR. TEC 2: NON È DETTO CHE NON ABBIA UN BLOW-UP IN TEMPO FINITO.

ERRORE CONCETTUALE: AVREI BISOGNO DI $\leq -c < 0$ QUINDI ABBIAMO USATO LA COMPATTEZZA.

$\Rightarrow \exists T > 0$ $\eta(T, \Sigma) < \Sigma$

cioè $\eta(T, J^{c+\varepsilon}) < J^{c-\varepsilon}$

MA $\gamma(s)$ È LA CURVA CHE MI DAVA IL SUP $\Rightarrow \eta(T, \gamma(s)) < c - \varepsilon$

$\Rightarrow$ È ASSURDO

SOL TEC 1: SE J' SU UNA VARIETÀ NON È ABB. BELLA SI PRENDE UNA APPROSSIMAZIONE. POICHÉ X È PARACOMPATTO POSSO FARE UNA PARTIZIONE DELL'UNITÀ $\Rightarrow J(u) = \sum_{a \in X} f_a(x) J(u)$ $\quad \sum_{a \in X} f_a(x) = 1$

E OTTENGO LO PSEUDO-GRADIENTE $F(U)$ OTTENUTO AVENDO REGOLARIZZATO ABB. $J(U)$ USANDO I $f_a(x)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\eta_u(t) = -\frac{F(U)}{\|F(U)\|+1}$$

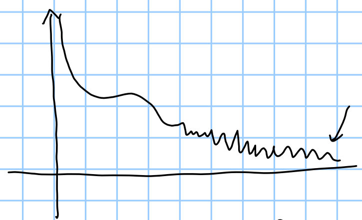
SOL. CONCETTUALE: LA TESI DEL TEOREMA È:

$$\underbrace{\exists\, u_m : \begin{array}{l} J(u_m) \to c \\ J'(u_m) \to 0 \end{array}}$$

NEL CASO IN CUI $\forall \varepsilon > 0$ NELLA STRISCIA $c-\varepsilon$, $c+\varepsilon$ TROVO U TALE CHE $\|J(U)\|$ È ARBITRARIAMENTE PICCOLO

DEF UNA SUCC. CHE FA QUESTO SI DICE SUCCESSIONE DI PALAIS-SMALE

OSS NON È DETTO CHE UNA SUCC MINIMIZZANTE SIA DI P-M.



POSSO PRENDERE UNA SUCC. U_m MINIMIZZANTE A 0 PRENDENDO U_m SEMPRE DOVE $J'(u_m)$ È MAX

MA SE C'È WF (O MINIMO) POSSO TROVARE UNA SUCC. MINIMIZZANTE DI P-M.

TEO DI P-S J SODDISFA P-S SE U_M DI P-S $\Rightarrow U_M \to \bar{u}$ CONVERGE FORTEMENTE

PER CONCLUDERE DEVO MOSTRARE CHE U_m CONVERGE

ciò SE $u_m \to \bar{u} \Rightarrow \begin{cases} J(u_m) \to J(\bar{U}) = c \\ J'(u_m) \to J(\bar{U}) = 0 \end{cases}$ (PER CONTINUITÀ DI J e J')

PASSO 1 DIMOSTRARE CHE u_m DI P-M CONV. DEBOLMENTE

DIRE CHE u_m È DI P-M 1) $J(u_m) = \frac{1}{2}\int |\nabla u_m|^2 - \frac{1}{p}\int |u_m|^p\,dx = c + \varepsilon_m$

2) $J'(u_m) = -\Delta u_m - |u_m|^{p-2}u_m = X_m$ con $X_m \in H^{-1}$

$X_m \to 0$ in H^{-1}

PRENDO LA 2) MOLTIPLICO PER U_m E INTEGRO PER PARTI

3) $\int |\nabla u_m|^2 - \int |u_m|^p = \langle X_m, u_m \rangle \leq \delta_m \|u_m\|_{H_0^1}$ PERCHÉ $X_m \to 0$ in H^{-1}

MOLTIPLICO 3) PER $\frac{1}{p}$ e FACCIO 1) – 3)

$$\nu\|u_m\|^2 \overset{p>2}{\leq} \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\int |\nabla u_m|^2 \leq c + \varepsilon_m + \delta_m \|u_m\|_{H_0^1} \leq C_1 + C_2\|u_m\|_{H_0^1}$$

$\nu\|u_m\|^2 \leq C_1 + C_2\|u_m\|_{H_0^1} \Rightarrow U_m$ è LIMITATA.

ALLORA $u_n \to \bar{u}$

PASSO 2 LA CONVERGENZA DEBOLE + IN H_0^1 L'OPERATORE DI NEM. È CPT.

DA 2)

$$-\Delta u_n = \underbrace{|u_n|^{p-2} u_n}_{\substack{\text{CONVERGE DEBOLE} \\ + \text{CPT DI } |u|^{p-2}u \text{ OP. DI NEMSKI} \\ \Downarrow \\ \text{CONV. FORTE}}} + \underbrace{\chi_n}_{\substack{\text{FORTE} \\ \downarrow \\ 0}}$$

\+ $-\Delta$ È UN ISOMORFISMO TRA H_0^1 e H^{-1}

$$\Rightarrow u_n = \underbrace{(-\Delta)^{-1}}_{\text{ISO}} \Big(\underbrace{|u_n|^{p-2} u_n + \chi_n}_{\text{FORTE}} \Big) \Rightarrow u_n \to \text{FORTE.}$$

Th (PASSO MONTANO IN COMPLETA GENERALITÀ)

SIA $J \in C^1(M)$ M VARIETÀ DI BANACH

(i) J SODDISFA P-S (IPOTESI DI COMPATTEZZA)

(ii) $J(0) = 0$, $\exists \rho > 0$ t.c. $\|u\| = \rho \Rightarrow J(u) > 0$ (IPOTESI DI GEOMETRIA DEL PASSO MONTANO)

$\exists e$ con $\|e\| > \rho$ $J(e) < 0$

ALLORA POSTO $c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t))$

c È UN VALORE CRITICO OVVERO $\exists \bar{u}$ t.c. $J(\bar{u}) = c$ e $J'(\bar{u}) = 0$

QUINDI PRESO

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) & \Omega \text{ LIMITATO} \\ -\Delta u = f(u) \end{cases}$$

CHE IPOTESI DEVO METTERE ?

- $|f(u)| \le c_1 + c_2 |u|^{p-1}$ con $p < 2^*$ (SERVE PER DIRE $J \in C^1$)
- $f(0) = 0$ (COSÌ $J(0) = 0$)
- $|f(t)| \le c|t|^q$ $q < 2$ (SERVE PER AVERE $J(u)$ POSITIVO IN UN INTORNO DI 0)
- $\exists M > 0$ t.c. per $t > M$ $0 < F(t) \le \frac{1}{\vartheta} \langle f(t), t \rangle$ con $\vartheta > 2$ (MI DÀ P-S E LA NEGATIVITÀ IN e)

LEZIONE 05

Titolo nota 17/10/2019

TEOREMA (PASSO MONTANO)

DATO $J : M \longrightarrow \mathbb{R}$ M VARIETÀ HILB (O DI BANACH), $J \in C^1$

1) J SODDISFA P-M cioè DATA $u_m \in M$ t.c. $\begin{cases} J(u_m) \to c \\ J'(u_m) \to 0 \end{cases} \Rightarrow \exists\, u_{m_k}$

2) GEOMETRIA DEL PASSO MONTANO

$J(0)$

- $\exists\, \rho > 0$ $\|u\| = \rho$ e $J(u) > 0$
- $\exists\, e \in M$ $\|e\| > \rho$ e $J(e) < 0$

$$\Gamma = \left\{ \gamma : [0,1] \to M \;\middle|\; \begin{matrix} \gamma(0) = 0 \\ \gamma(1) = e \end{matrix} \right\}$$

POSTO $c = \inf\limits_{\gamma \in \Gamma} \max\limits_{t \in [0,1]} J(\gamma(t))$

ALLORA c è UN VALORE DI CRITICO DI J

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ -\Delta u = f(x,u) \end{cases} \qquad J(u) = \int \frac{1}{2}|\nabla u|^2 dx - \int F(x,u)\, dx \qquad F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\, ds$$

$|f(x,u)| \leq C_1 + C_2 |u|^{p-1}$ $\quad 2 < p < 2^* = \frac{2N}{N-2}$ (BUONA POSIZIONE DEL PROBLEMA CPT E CONT. DELL'OP. DI NEM $3 \le y$)

(i) $f(x,0) = 0$ (MI DA $J(0)=0$)

(ii) $|F(x,u)| \leq C_2 |u|^{p_1}$ $\quad p^* > p_1 > 2$ PER $|u| \leq u_0$ (MI DA $\rho > 0$ t.c. $J(u) > 0$ PER $\|u\| = \rho$)

PERCHÉ

$$\left| \int_\Omega F(x,u)\, dx \right| \leq \int_{|u| \leq u_0} |F(x,u)| + \int_{|u| \geq u_0} |F(x,u)| \leq$$

$$\leq C \int_\Omega |u|^{p_1} + C_3 \int_\Omega |u|^p \overset{\text{USO SOB. PERCHÉ } p_1, p < p^*}{\leq}$$

$$\leq C_4 \|u\|^{p_1}_{H^1} + C_5 \|u\|^p_{H^1}$$

$$\Rightarrow J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{H^1} - C_4 \|u\|^{p_1}_{H^1} - C_5 \|u\|^p_{H^1} \geq \alpha > 0 \text{ PER QUALCHE } \rho > 0 \text{ ABB. PICCOLO}$$

PER AVERE SIA P-S CHE LA CONDIZIONE $J(e)<0$ BASTA CONSIDERARE LA CONDIZIONE DI AMBROSETTI-RABINOWITZ

(iii) per $u \geq u_0$ $\quad 0 < F(x,u) \leq \frac{1}{p_2} f(x,u)\, u \quad p^* > p_2 > 2$

EQUIVALE A DIRE

$$D\log(F(u)) = \frac{F'(u)}{F(u)} \geq p_2 \cdot \frac{1}{u}$$

$\downarrow$ INTEGRO

$$\int_{u_0}^{u} D\log(F(s))\,d \geq \int_{u_0}^{u} \frac{p_2}{s}\,ds$$

$$\log(F(u)) - \log(F(u_0)) \geq p_2 \log(u) - p_2 \log(u_0)$$

$$\log(F(u)) \geq c + \log(u^{p_2})$$

$$F(u) \geq e^c \cdot u^{p_2}$$

RESTA DA DIMOSTRARE CHE VALE P-S.

PRESA u_n t.c.

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 - \int_\Omega F(x,u_n)\,dx = c + \varepsilon_n \quad \text{con } \varepsilon_n \to 0$$

$$\text{e} \quad -\Delta u_n - f(x,u_n) = \chi_n \in H^{-1}(\Omega) \quad \|\chi_n\|_{H^{-1}} \to 0$$

PASSO 1 DIMOSTRO CHE u_n È LIMITATA

PRENDO 2 MOLTIPLICO PER u_n E INTEGRO

$$\int_\Omega \|\nabla u_n\|^2 - \int_\Omega f(x,u_n) = \int \chi_n u_n = \delta_n \|u_n\|_{H^1} \quad \text{con } \delta_n \to 0$$

MOLTIPLICO PER $\frac{1}{p}$ QUELLA APPENA OTTENUTA E LA SOTTRAGGO ALLA PRIMA DI PS

USANDO AMBROSETTI-RAB.
$\downarrow$
$$\leq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\int_\Omega \|\nabla u_n\|^2 + \int_\Omega \frac{1}{p} f(x,u_n) - F(x,u_n)\,dx = \varepsilon_n + c - \delta_n \|u_n\|_{H_0^1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\|u_n\|^2_{H_0^1} \leq \varepsilon_n + c - \delta_n \|u_n\|_{H_0^1} \Rightarrow \|u_n\|_{H_0^1} \text{ è LIMITATA}$$

$\Rightarrow \quad u_n \longrightarrow \bar{u}$ in H^1_0

INOLTRE — POICHÉ f È CONTINUO PER NIEM. QUINDI MANDA SUCC. CONV. IN SUCC. FORT. CONT.

$$-\Delta u_n = f(x, u_n) - \chi_n$$

$$f(x, u_n) \to f(x, \bar{u}), \qquad \chi_n \to 0$$

$\Rightarrow \; \Rightarrow -\Delta u_n$ CONVERGE FORTE IN H^{-1} $\Rightarrow$ u_n CONVERGE FORT. IN H^1_0

TORNIAMO AL PROBLEMA DEGLI AUTOVALORI NON LINEARI

$$\begin{cases} u \in H^1_0(\Omega) \\ -\Delta u = \lambda |u|^{p-2} u \\ \|u\|_{L^p} = 1 \end{cases} \qquad J_0(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \qquad \mathcal{M} = \left\{ u \;\middle|\; \|u\|_{L^p} = 1 \right\}$$

ESSENDO $f(u) = |u|^{p-2}u$ DISPARI

CI SARANNO INFINITI AUTOVALORI ?

POSSO IDENTIFICARE I PUNTI DI M CON $-u$ (TIPO SPAZIO PROIETTIVO) E CI LA TOPOLOGIA È RICCA E CONSIDERARE

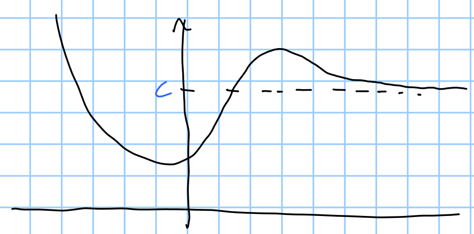
$\mathcal{M}/_\sim \qquad u \sim v$ SE $u = -v$ e CONSIDERO $J_0/_\sim$

$J^c = \left\{ u \in \mathcal{M} \;\middle|\; J(u) \le c \right\}$ PER I c CHE J^c CAMBIA TOPOLOGIA SONO IN PROSSIMITÀ DI PUNTI CRITICI.

POSSIBILE CONGETTURA (FALSA) A

OGNI CAMBIAMENTO DI TOPOLOGIA CORRISPONDE UN PUNTO CRITICO.

MA



IN c VALE IL CAMBIAMENTO DI TOP. MA NON HO PUNTI CRITICI A QUOTA c.

CONGETTURA (VERA) AD OGNI CAMBIAMENTO DI TOPOLOGIA CORRISPONDE UNA SUCC. DI P-M E HO UN CRITICO SOLO SE J SODDISFA P-M.

QUINDI RESTA DA FAR VEDERE CHE IL MIO FUNZIONALE HA INFINITI CAMBI DI TOPOLOGIA.

VOGLIO VEDERE CHE

TRA LA PALLA e $\mathbb{P}\mathbb{R}^\infty$ OK

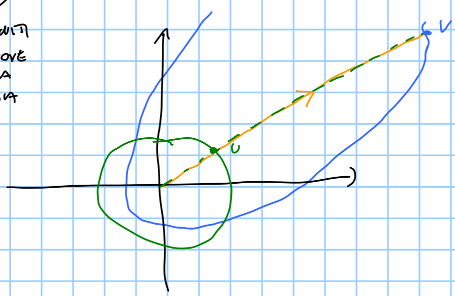
$$\mathcal{M} = \{ u \mid \|u\|_{L^p} = 1 \} \simeq \mathbb{P}\mathbb{R}^\infty \simeq \{ v \mid \|v\|_{H^1} = 1 \}$$

HA INFINITI PUNTI DOVE SI CAMBIA TOPOLOGIA

$\exists$ una mappa

$u \longmapsto v$

$\|u\|_{H^1} = 1 \qquad \|v\|_{L^p} = 1$



PRENDIAMO PER BUONO CHE (SERVE ROBA DI TOP. ALGEBRICA E OMOLOGIE e COOMOLOGIE...)

$\exists$ INFINITI $c_k \to +\infty$ $\quad k$ = INVARIANTE TOPOLOGICO (TIPO NUMERI DI BETTI ETC...)

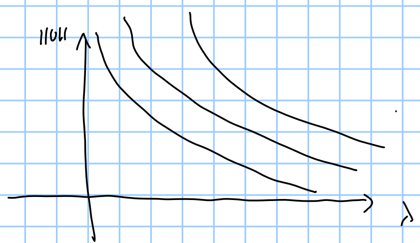
DOVE $c_k = \inf \{ c \mid k(J^k) \geq 0 \}$

$$\begin{cases} u \in H^1_0(\Omega) \\ -\Delta u = \lambda |u|^{p-2} u \\ \|u\|_{L^p} = 1 \end{cases}$$

SE $w = \rho u$ e $\lambda_{k,1}$ AUTOVALORE PER u CON $\|u\|_{L^p} = 1$

$-\Delta w = -\rho \Delta u = \lambda_{k,1} \rho^{2-p} |w|^{p-2} w$

$\Rightarrow \lambda_{k,p} = \dfrac{\lambda_{k,1}}{\rho^{p-2}}$



PASSIAMO AL PROBLEMA

$$\begin{cases} u \in H^1_0(\Omega) \\ -\Delta u = f(u) \end{cases}$$

VORREI RIUSCIRE A DIMOSTRARE CHE SE $f(u) = -f(-u)$ HO INFINITE SOLUZIONI

IDEA: RIPORTARE QUESTO PROBLEMA A UN PROBLEMA DI TOPOLOGIA SUL $\mathbb{P}\mathbb{R}^\infty$

SOL DI NEHARI: SE $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad J(0) = 0$

PRENDE $\mathcal{N} = \{ u \in X \mid \langle J'(u), u \rangle = 0 \}$ = VARIETÀ DI NEHARI (A QUESTO PUNTO $\mathcal{N}$ È SOLO UN INSIEME)

SE $\forall u \in X \setminus \{0\}$ $g'(u) \neq 0 \Rightarrow \mathcal{N} \setminus \{0\}$ è una varietà di codimensione 1

Hp $\quad \forall u \in \mathcal{N} \Rightarrow \langle \mathcal{G}'(u), u \rangle \neq 0$

Th $\quad$ se u è un PC su $\mathcal{N} \Rightarrow J'(u) = 0$

Dim $\quad G(u) = \langle J'(u), u \rangle$

Posso usare i molt. di Lagrange

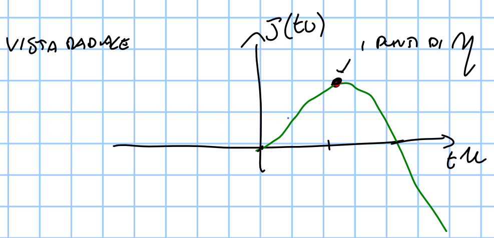
$J'(u) = \lambda G'(u)$ $\qquad$ se $\langle J'(u), u \rangle = \lambda \langle G'(u), u \rangle \Rightarrow \lambda = 0$

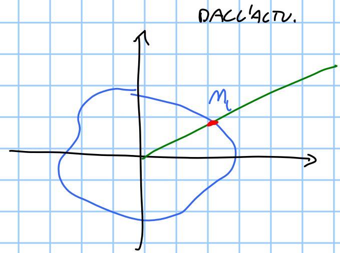
$\langle G'(u), u \rangle \neq 0$

$\langle J'(u), u \rangle = \mathcal{G}(u) = 0$

$\Rightarrow J'(u) = 0$

Ma cosa significa $\langle J'(u), u \rangle = 0$?





Quindi $\mathcal{N}$ è sensata quando vale la geometria del passo montano.

- Nel nostro caso

$$J(u) = \frac{1}{2} \int \|\nabla u\|^2 dx - \int_\Omega F(u)\, dx$$

$$\mathcal{G}(u) = \langle J'(u), u \rangle = \int_\Omega \{ |\nabla u|^2 - f(u) u \} dx = 0$$

Voglio ipotesi tali che

$g(u) = 0 \Rightarrow \langle g'(u), u \rangle \neq 0$ $\quad$ cioè $\displaystyle\int_\Omega \{ |\nabla u|^2 - f'(u) u^2 - \underbrace{f(u) u}_{0} \} dx \neq 0$

$$\Rightarrow \int_\Omega f'(u) u^2 \neq 0$$

Quindi poiché f è crescente (dispari e $F = \cup$)

$$\Rightarrow \int_\Omega f'(u) u^2 > 0$$

Quindi la varietà di Nehari è ben definita

Resta da vedere che vale P-M. ma su $\mathcal{N}$

QUINDI PRESA $u_n \in \eta$

$$J(u_n) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_n|^2 - F(u_n)u_n \longrightarrow 0$$ (SONO STIME A PRIORI $\Rightarrow u_n \to u$)

$$J'_\eta(u_n) = J'(u_n) - \lambda_n G'(u_n) \longrightarrow 0$$

SI PUÒ VEDERE CHE $\langle G'(u_n), u_n \rangle \geq a > 0$

$$\Rightarrow \lambda_n = \frac{\langle J'(u_n), u_n \rangle \to \text{LIMITATO}}{\langle G'(u_n), u_n \rangle \not\to 0} \Rightarrow \lambda_n \text{ NON ESPLODE A } +\infty$$

$$\Rightarrow -\Delta u_n + f'(u_n) - \lambda_n\left[-\Delta(u_n) - f'(u_n)u_n - f(u_n)\right] = \chi_n$$

$$-(1-\lambda_n)\Delta u_n = \dots$$

BISOGNA VEDERE CHE $\lambda_n \not\to 1$ IN QUEL CASO LAPLACIANO CONVERGE FORTEMENTE

ALLORA $u_n \to$ FORTEMENTE

PROBLEMI A CASO

$$-\Delta u + |u|^{q-2}u = |u|^{p-2}u \qquad u \in H^1_0(\Omega), \quad 2 < p, q < 2^*$$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 + \frac{1}{q}\int_\Omega |u|^q - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p$$

$p > q$ MI DÀ LA GEOMETRIA DEL PASSO MONTANO

- SE $q > 2^* > p$

$\int \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{q}\int |u|^q$ NON È + COMPATTO $\Rightarrow u \in L^p \cap H^1_0$ SISTEMA L'OPERATORE

SEGNO BUONO

MA $q > p$ NON MI DÀ $J(u) < 0$

QUINDI USANDO $K|u|^{p-2}u$ INVECE DI $|u|^{p-2}u$ CON K MOLTO GRANDE PRIMA O POI $J < 0$

e $-\frac{1}{p}\int |u|^p$ È CPT. PERCHÈ $p < 2^*$

HO $0, \bar{u}$ COME SOL. MA $J(u)$ È PARI $\Rightarrow$ ANCHE $-\bar{u}$

LEZIONE 06

Titolo nota 23/10/2019

FINO AD ADESSO ABBIAMO VISTO PROBLEMI DEL TIPO:

$A(u) = f$ CON A CON STRUTTURA VARIAZIONALE $A = dJ$

$A: V \longrightarrow V'$ CON V BANACH RIFLESSIVO (CIOÈ $V'' \sim V$)

QUINDI J CONVESSI $\Rightarrow J$ DEB CHIUSI

OPERATORI MONOTONI

VOGLIO DARE LA DEFINIZIONE MONOTONIA PER $A: V \longrightarrow V'$

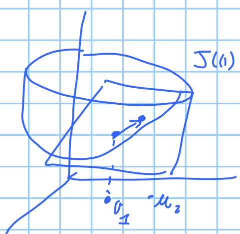
IN ANALISI 1 $\left(f(x_2) - f(x_1)\right)(x_2 - x_1) \geq 0$ PER AVERE f MONOTONA CRESCENTE

DEF A È MONOTONO SE $\langle \underbrace{A(u_2) - A(u_1)}_{\in V'}, \underbrace{u_2 - u_1}_{\in V} \rangle \geq 0$

LA GENERALIZZAZIONE GIUSTA? CIOÈ SE J È CONVESSO $\Rightarrow dJ$ È MONOTONO?

(ESATTAMENTE COME SUCCEDEVA IN ANALISI I)

PROP J CONVESSO ALLORA dJ È MONOTONO



DIM

DALLA CONVESSITÀ DI J VALGONO $\forall u_1, u_2$

$J(u_2) \geq J(u_1) + \langle dJ(u_1), u_2 - u_1 \rangle$

$J(u_1) \geq J(u_2) + \langle dJ(u_2), u_1 - u_2 \rangle = J(u_2) - \langle dJ(u_2), u_2 - u_1 \rangle$

SOMMO

$0 \geq \langle dJ(u_1) - dJ(u_2), u_2 - u_1 \rangle$

$0 \leq \langle dJ(u_2) - dJ(u_1), u_2 - u_1 \rangle$

ESEMPIO $u \in H_0^1$

$\nabla A \cdot \nabla u = f$ A È UNA MATRICE $(A\xi)_i = \sum_{j=1} a_{ij} \xi_j$

A PUÒ DIPENDERE DA x (OSS SE $A = Id \Rightarrow \nabla A \nabla u = \Delta u$

SE A È SIMMETRICO $\Rightarrow$ IL PROBLEMA È VARIAZIONALE)

$\langle A(x)\xi, \xi \rangle \geq \alpha \|\xi\|^2 > 0 \ \forall \xi$

ALLORA IL PROBLEMA SI DICE UNIF. ELLITTICO

SE $|A(x)| < M$ E IL PROB. È UNIF. ELLITTICO $\Rightarrow$ $\int A \nabla v \nabla u$ È UNA NORMA EQ. A QUELLA EQUIV.

ESEMPI

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega) \\ \nabla[A(x)\nabla u] \text{''}+ u^3\text{''} = f \end{cases} \qquad \left\|\ \begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ -\Delta u + \vec{b}\,\vec{\nabla} u = f \end{cases}\right.$$

NON È VARIAZIONALE

PROBLEMA: $-\Delta_p u = f$ DOVE $-\Delta_p = \frac{1}{p} d \, \|u\|_{L^p}^p$ (COME GEN. CHE $-\Delta u = d\|u\|_{L^2}^2$)

$$\langle -\Delta_p u, v\rangle = \int |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v \, dx$$

$$-\Delta_p = -\nabla\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right)$$

SCELTA SPAZIO

$$\begin{cases} u \in W^{1,p}(\Omega) & 1 < p < \infty \\ -\Delta_p u = f \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $-\Delta_p$ È CONVESSO ED È ANCORA VARIAZIONALE

AD ESEMPIO

$$\begin{cases} u \in W^{1,p} \\ -\Delta_p u + \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = f \end{cases}$$

NON È PIÙ VARIAZIONALE MA È ANCORA MONOTONO

VERIFICO CHE $A(u) = \underbrace{-\Delta u}_{\text{QUESTA È UNA FORMA QUADRATICA QUINDI È MONOTONO}} + \overbrace{\nabla(\vec{b}(x)u)}^{\text{BASTA CHE VERIFICO CHE QUESTO È MONOTONO}}$ È MONOTONO

$$\int \left(\nabla\cdot(\vec{b}\,u_2) - \nabla(b u_1)\right)(u_2 - u_1) \overset{?}{\geq} 0$$

$$\text{''}$$

$$\int \nabla\left(\vec{b}u_2 - \vec{b}u_1\right)(u_2 - u_1) \geq 0$$

'' $\to$ SCARICO UNA DERIVATA

$$-\int \underbrace{\vec{b}(x)\,(u_2 - u_1) \qquad \nabla(U_2 - U_1)}_{} \geq 0$$

''

$$-\frac{1}{2}\int b(x)\, \nabla(U_2 - u_1)^2 \, dx \overset{\text{SCARICO LA DERIVATA}}{=} \frac{1}{2}\int \vec{\nabla}\vec{b}\,(u_2 - u_1)^2 dx \geq 0 \quad \text{SE } \overset{\text{AD ESEMPIO}}{\forall}\ \vec{\nabla}\vec{b}(x) \geq 0$$

TEOREMA

$A: V \to V'$ $\quad V$ BANACH RIFLESSIVO

- A MONOTONO
- A CONTINUO
- A LIMITATO (MANDA LIMITATI IN LIMITATI)
- $\lim_{\|u\| \to +\infty} \dfrac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|} = +\infty$

$\Rightarrow$ $\forall f \in V'$ L'EQUAZIONE $A(u) = f$

SE A È STRETTAMENTE MONOTONO LA SOLUZIONE È UNICA

SE A È UNIFORMEMENTE MONOTONO ALLORA A^{-1} È CONTINUO

DOVE UNIF. MONOTONO SIGNIFICA $\langle A(u)-A(v), u-v\rangle \geq \varphi(\|u-v\|) > 0$
CON φ POSITIVA

MODIFICA: A CONTINUA È TROPPO FORTE, BASTA A HEMICONTINUO OVVERO CHE È CONTINUO RISTRETTO AGLI SPAZI DI DIMENSIONE FINITA.

DUE APPROCCI POSSIBILI: 1) APPROSSIMARE IL PROBLEMA IN DIMENSIONE FINITA E POI PASSARE AL LIMITE (METODO DI FAEDO-GALERKIN)
2) SVILUPPARE TEORIA DI PUNTO FISSO

SEGUENDO 1) SIA $V = \overline{\bigcup V_m}$ CON $V_m \subseteq V_{m+1}$

CERCO $u_m \in V_m$ t.c. $\langle Au_m, v\rangle = \langle f, v\rangle \ \forall v \in V_m$

ADESSO RESTA DA SPERARE CHE $u_m \to \bar{u}$

SIA $P_m : V \to V_m$ UNA PROIEZIONE

$\Rightarrow \langle Au_m, P_m v\rangle = \langle f, P_m v\rangle \overset{\langle\,,\,\rangle \text{ È AUTOAGGIUNTO}}{=} \langle P_m f, v\rangle$

$\langle P_m A u_m, v\rangle$

$\Rightarrow P_m A u = P_m f \in V_m \Rightarrow$ HO UN PROBLEMA DEL TIPO $F(u) = h$ CON $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

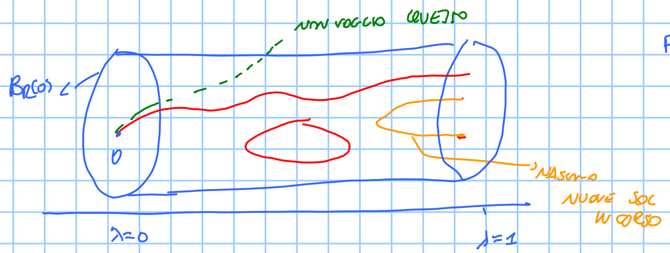
OSS $P_m A$ RESTA MONOTONO

QUINDI F OPERATORE MONOTONO $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $F(u) = h$ DEVO DIRE CHE TROVO UNA SOLUZIONE

PRENDO $F_\lambda(u) = h$ CON $F_\lambda(u) = \lambda F(u) + (1-\lambda)u$ (POSSO CONSIDERARE $h=0$ CON $G = F-h$

PER $\lambda = 0$ ESISTE LA SOLUZIONE $u = 0$

POI SEGUO LA SOLUZIONE AL VARIARE DI λ.



$F_\lambda(u) = 0$ CON $F_\lambda : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$
GLI ZERI SONO QUINDI UNA VARIETÀ DI CODIMENSIONE 1 È UNA CURVA MA LE CURVE NON SONO DI TANTI TIPI

CIOÈ VOGLIO $\forall u \in \partial B_R$ $F_\lambda(u) \neq 0$

DOVREI MOSTRARE CHE 0 È VALORE REGOLARE PER 0, MA POSSO USARE IL

LEMMA DI SARD E APPROSSIMO IL PROBLEMA A $F_\lambda(u) = 0 + \varepsilon$

MA SERVIREBBE LA REGOLARITÀ DI F PER IL LEMMA DI SARD

QUINDI REGOLARIZZO F_λ A $F_\lambda^\varepsilon = F * \rho_\varepsilon$ CON LA CONVOLUZIONE

E RISOLVO IL PROBLEMA $F_\lambda^\varepsilon(u_\varepsilon) = 0 + \varepsilon$ E $u_\varepsilon \longrightarrow u$

LA CONVERGENZA È FACILE PERCHÈ SONO IN $\mathbb{R}^n$ e B_R È CPT.

OSS LA B_R È INDIPENDENTE DA m e DA ε INFATTI

PRIMA FISSO UN $a > 0$ tc $\forall u \in \partial B_R$ $\|F_\lambda(u)\| \geq a > 0$ POI ε LO PRENDO + PICCOLO DI a

PER NON AVERE PROBLEMI

DEF GRADO TOPOLOGICO

$$d(F, \Omega, h) = \#\left\{ u \in \Omega \;\middle|\; \begin{matrix} dF(u) \neq 0 \\ F(u) = h \end{matrix} \right\} \bmod 2$$ È INVARIANTE PER OMOTOPIA

E QUINDI $F_\lambda(u)$ è L'OMOTOPIA FATTA SOPRA CHE NON CAMBIA IL GRADO TOPOLOGICO

QUINDI IN $\lambda = 1$ TROVO ALMENO UNA SOL.

OPPURE CAMBIO SOL "MASCHIO" o "FEMMINE"

E LA DIFFERENZA LA VEDO CON

$$\begin{cases} F(u) = 0 \\ dF(u) \neq 0 \\ \det[dF(u)] \begin{matrix} > 0 & \text{"MASCHIO"} \\ < 0 & \text{"FEMMINA"} \end{matrix} \end{cases}$$

LEZIONE 07

Titolo nota 24/10/2019

PROBLEMA: $\begin{cases} F : B_R \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ u \in B_R \\ F(u) = 0 \end{cases}$

IDEA PRENDERE UN'OMOTOPIA CON UNA FUNZIONE CHE HA SOL.

$F_\lambda(u) = \lambda F(u) + (1-\lambda)u$

$F_\lambda : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

POI SI VEDE CHE LA SOLUZIONE SOPRAVVIVE FINO A $\lambda = 1$

PERCHÉ $\forall \lambda$ SE $\|u\| = R \Rightarrow F_\lambda(u) \neq 0$

PERCHÉ $F_\lambda(u) = 0$ È UNA VARIETÀ DI CODIMENSIONE n

IL RISULTATO PUÒ ESSERE VISTO ANCHE COME CONSEGUENZA DEL PUNTO FISSO DI BROWER

$K : B_R \longrightarrow B_R$ HA UN PUNTO FISSO $K(u) = u$

$\Rightarrow$ CHIAMO $F_\lambda = I - \lambda K$

SIA $-\Delta u + \vec{b}\,\vec{\nabla} u + f(u) = 0$

$u \in H^1_0(\Omega)$

LO TRASFORMO $u = (-\Delta)^{-1}\left[\underbrace{-\vec{b}\nabla u - f(u)}\right]$

COMPATTA SE LA f VERIFICA LE STIME VICINO ZERO

E LE MAGGIORAZIONI A PRIORI PER $\|u\|$ GRANDE

STORICAMENTE PRIMA SI H^1_0

$$-\Delta u = f \Rightarrow u(x) = (-\Delta)(f) = \underbrace{\int_\Omega \overset{\text{FUNZIONE DI GREEN}}{G}(x-y)\, f(u(y))\,dy}_{K}$$

$K : C^0 \longrightarrow C^0$ FATICA: FAR VEDERE CHE K È COMPATTO.

IN GENERALE

$\begin{cases} \overset{\text{INVERTIBILE}}{A u} + \overset{\text{COMPATTO}}{K u} = 0 \\ u \in V \end{cases}$ + STIME A PRIORI $\rightsquigarrow$ RIESCO A TIRAR FUORI SOL. INVERTENDO A

$u = \underbrace{A^{-1}}_{\text{COMPATTO}}(Ku)$.

TEO (OPERATORI MONOTONI)

$A: V \longrightarrow V'$

1) A è MONOTONO $\langle A(u)-A(v), u-v\rangle \geq 0$

2) A HEMI-CONTINUO

3) A è LIMITATO $A(B_R) \subset B_{R_1}$

4) A COERCITIVO $\lim_{\|u\|\to+\infty} \frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|} \longrightarrow +\infty$

$\Rightarrow$ a) A è SURGETTIVO CIOÈ $Au=f$ HA SOLUZIONE $\forall f \in V'$

b) SE A è STRETTAMENTE MONOTONO $\Rightarrow$ $Au=f$ HA SOL. UNICA.

c) SE A è UNIF. MONOTONO CIOÈ $\exists\ \alpha$ MONOTONA $\langle A(u_1)-A(u_2), u_1-u_2\rangle > \alpha(\|u_1-u_2\|)$ $\alpha(0)=0$

ALLORA A^{-1} è CONTINUO

DIM b) DA a) SEGUE PRESI $u_1 \neq u_2$ t.c. $A(u_1)=f$ $A(u_2)=f$

$\Rightarrow$ $\langle Au_1 - Au_2, u_1-u_2\rangle > 0$

$\underbrace{f-f}_{0}$ ASSURDO

c) $\langle A(u_1)-A(u_2), u_1-u_2\rangle > \alpha(\|u_1-u_2\|)$ α è INVERTIBILE e $Au_1=f_1 \Rightarrow u_1=A^{-1}f_1$, $Au_2=f_2$ $u_2=A^{-1}f_2$

$\alpha^{-1}(\langle f_1-f_2, A^{-1}f_1-A^{-1}f_2\rangle) > \|A^{-1}f_1-A^{-1}f_2\|$

SE $f_1 \to f_2$ DA $\alpha(0)=0$ SI HA $A^{-1}f_1 \to A^{-1}f_2$

a) PRESE $\langle Au_m, v\rangle = \langle f, v\rangle$ $\forall v \in V_m$ e $u_m \in V_m$

SOLUZIONI IN DIMENSIONE FINITA CON $V=\overline{\bigcup_{m\in\mathbb{N}} V_m}$

$\Rightarrow \exists R$ t.c. $u \in V_m \cap \partial B_R \Rightarrow F(u) = P_m A u - P_m f u \neq 0$ UNIFORME IN m

DOVE P_m è LA PROIEZIONE SU V_m

DA 4) $\langle Av, u\rangle - \langle f, u\rangle \geq M\|v\| - \|f\|\,\|v\| = (M-\|f\|)R$, $v\in\partial B_R$

POICHÉ M è ARBITRARIAMENTE GRANDE

QUINDI $\langle Au_m, v\rangle = \langle f, v\rangle$ $u_m \to \bar{u}$ Au_m CONVERGE A QUALCOSA PERCHÉ A è LIMITATO MA NON è DETTO CHE SIA $A\bar{u}$

PER MONOTONIA FISSATO $v \in \cup V_n$

$$0 \leq \langle A u_m - Av, u_m - v \rangle = \langle A u_m, u_m - v \rangle - \langle Av, u_m - v \rangle =$$

$$= \langle A u_m, u_m \rangle - \langle A u_m, v \rangle - \langle Av, u_m - v \rangle$$

SOL PROBLEMA APPROSSIMATO

$$\langle f, u_m \rangle - \langle A u_m, v \rangle - \langle Av, u_m - v \rangle$$

$\exists \bar{n}$ t.c. $\forall n \geq \bar{n}$ $v \in V_n \Rightarrow \langle A u_m, v \rangle = \langle f, v \rangle$

$$\langle f, \bar{u} \rangle - \langle f, v \rangle - \langle Av, \bar{u} - v \rangle =$$

$$= \langle f - A(v), \bar{u} - v \rangle \geq 0$$

PRESO $v = \bar{u} - \lambda w$ con $\lambda \neq 0$ con $w \in V_n$ per $n \geq \bar{n}$

$$\langle f - A(\bar{u} - \lambda w), \lambda w \rangle \geq 0 \quad \text{Vero } \forall \lambda \neq 0$$

$$\lambda \langle f - A(\bar{u} - \lambda w), w \rangle \geq 0$$

$$\Rightarrow \langle f - A(\bar{u} - \lambda w), w \rangle \geq 0$$

$$\downarrow \lambda \to 0$$

$$\langle f - A(\bar{u}), w \rangle \geq 0 \quad \forall w \in V_n \quad \forall n \geq \bar{n} \Rightarrow \forall w \in V$$

ESERCIZI

1) $\begin{cases} u \in W^{1,p}(\Omega) \\ -\Delta_p u = f \end{cases}$

SI PUÒ VEDERE $\langle -\Delta_p v + \Delta_p w, u - w \rangle \geq c \|v - w\|$ CIOÈ È UNIF. MONOTONO

con $f = (W^{1,p})' = W^{-1,p'} \supseteq L^{p'}$ SE $p > N$ $W^{1,p} \overset{\text{PER SOBOLEV}}{\subset} C_c \Rightarrow W^{-1,p'} \supset \mathcal{M} = (C_c)'$ (MISURE)

$$u = (-\Delta_p)^{-1} f$$

2) $-\nabla(M(x)\nabla u) = f$ SUPPONIAMO SIA ELLITTICO E $a_{ij} \in L^\infty$

3) $-\Delta_p u + |u|^{q-2} q = h(x)$ SE $q < p$ o $p > q$ L'OPERATORE È MONOTONO

$\boxed{W^{1,p} \cap L^q}$ SPAZIO GIUSTO

4) $\begin{cases} \overbrace{-\Delta_p u + \sin(u)}^{\text{è VARIAZIONALE}} = h(x) \\ u \in W^{1,p} \end{cases}$ $J(v) = \frac{1}{p} \int |\nabla v|^p + (\cos(v) - 1) - h(x) u$

5) $\begin{cases} \underbrace{-\Delta_p u}_{\text{MONOTONO}} + \underbrace{\sin u + \vec{b}\,\nabla u - h(x)}_{\text{COMPATTO.}} = 0 \end{cases}$

E LE STIME A PRIORI CI SONO SE $p>2$ PERCHÉ $-\Delta_p$ CONTROLLA ∇u

LEZIONE 08

Titolo nota 30/10/2019

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\overbrace{V'(x)}^{\text{FORZA}} \\ x(0) = x_0 \\ x(1) = x_1 \end{cases}$$

Conservazione dell'energia $E = \underbrace{\frac{1}{2}\dot{x}^2}_{\text{cinetica}} + \underbrace{V(x)}_{\text{potenziale}}$

$$J(u) = \int_0^1 T - V = \int_0^1 \frac{1}{2}\dot{x}^2 - V(x(t))\,dt$$

$$x(t) \in H^1_{x_0 x_1} = \{ x : [0,1] \to \mathbb{R}^n \mid x(t) \in H^1 \quad x(0) = x_0 \quad x(1) = x_1 \}$$

È una varietà affine di codimensione 2, con base H^1_0

PROBLEMA con condizioni periodiche al bordo

$$\begin{cases} \ddot{x} = -V'(x) \\ x(0) = x(1) \\ \dot{x}(0) = \dot{x}(1) \end{cases}$$

Domanda 1: Qual è lo spazio giusto dove studiare il problema?

$$H^1_p(I, \mathbb{R}^n) = \{ x \in H^1(I, \mathbb{R}^N) \mid \underline{x(0) = x(1)} \}$$

Solo questo perché non ha senso scrivere $\dot{x}(0)$ e $\dot{x}(1)$ perché $\dot{x}(t) \in L^2$

Calcolo $dJ(x)[v] \quad \forall v \in H^1_p$

$$0 = dJ(x)[v] = \int_0^1 \dot{x}\dot{v} - V'(x)v\,dt =$$

Se x è critico

$$= \int_0^1 \underbrace{[-\ddot{x} - V'(x)]}_{\text{perché } x(t) \text{ è critico}} v\,dt + [\dot{x}v]_0^1$$

Qui ha senso scrivere $\dot{x}(0)$ e $\dot{x}(1)$ perché ho preso $x(t)$ soluzione e V abbastanza regolare (per bootstrap).

Allora $\dot{x}(1)v(1) - \dot{x}(0)v(0) = 0$

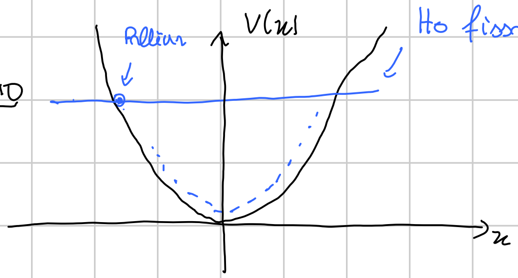
$v(1) = V(0) \neq 0$

$$v(0)\left(\dot{x}(1) - \dot{x}(0)\right) = 0$$

Tanto è vero $\forall v \in H^1_p$ quindi ne trovo almeno una con $v(0) \neq 0$

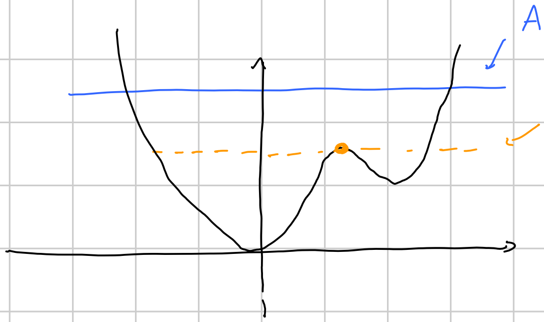
OSS È la scelta dello spazio che determina le condizioni al contorno

ESEMPIO



Ho fissato un'energia

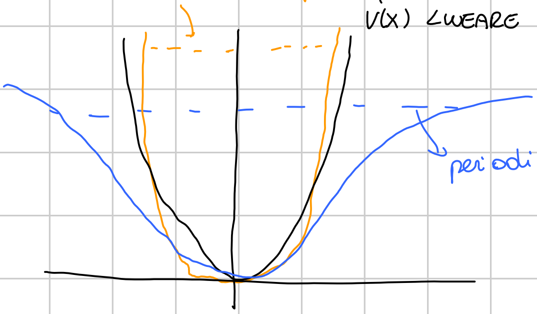
In questo caso mi posso aspettare mi posso aspettare sol periodiche



A questo livello posso aspettarmi ancora soluzioni periodiche

Questa dove non mi posso aspettare sol periodiche perché quel punto critico la sol lo raggiunge in tempo infinito.

Consideriamo $V \in C^2$, $V(0) = 0$,



Consideriamo il caso $V(x) \simeq \frac{1}{p}|x|^p$ $p > 2$ (sopralineare)

- $V \in C^2$
- $V(0) = 0$, $V(x) \neq 0 \Rightarrow V(x) > 0$

OBIETTIVO: usare Palais-Smale e Passo Montano per dire che le soluzioni esistono.

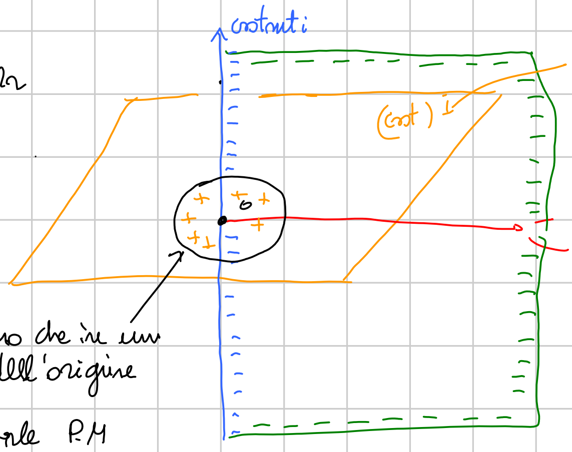
- V sopraquadratico nell'origine
- V " all'infinito
- $0 < V(x) \leq \frac{1}{p} V'(x)x$ (Condizione di Ambrosetti Rabinowitz)

P-S si verifica facilmente con A-R.

Per dimostrare che vale geometria di Passo Montano dovrei usare Poincaré, ma funziona con condizioni di Dirichlet ma non quelle periodiche.

Infatti in H'_p ci stanno le funzioni costanti e $J(\text{cost}) < 0$

Allora

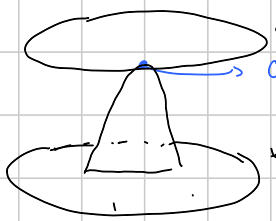


ad esempio le funzioni a media nulla.

se mi allontano J torna <0 perché V è più che quadratico a $+\infty$

non è vero che in un intorno dell'origine $J(u)>0$
→ non vale P.M

Analogia



A livello alto topologia banale

cambio di topologia mi da l'esistenza

A livello basso topologia ricca

(Linking) (Teo di Benci-Rabinowitz)

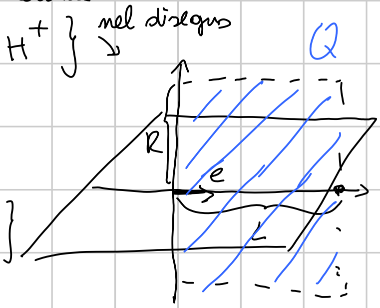
Teo V Dato $J \in C^1(H)$, che verifica P-S, $J(0)=0$

con $H = H^+ \oplus H^-$ e $\dim H^- = N < +\infty$

1) $\forall u \in \partial Q \quad J(u) \leq 0$ con (*)

2) $\exists\, 0<\rho<L \;\; \forall u \in B_\rho \cap H^+ \setminus\{0\} \;\; J(u) \geq a > 0$

(*) $Q = (B_R \cap H^-) \times \{ r \cdot e \mid 0 \leq r \leq L,\; e \in H^+ \}$ (direzione; nel disegno)



Tesi

dato $c = \inf_{h \in \mathcal{H}} \sup_{u \in Q} J(h(u))$ dove $\mathcal{H} = \{ h: Q \to H \text{ continue} \mid h|_{\partial Q} = id_{\partial Q} \}$

c è un valore critico per J

Dim cerco $u \in Q$ t.c. $\forall h \in \mathcal{H}$ $\begin{cases} P_N(h(u)) = 0 \\ \|h(u)\| - \rho = 0 \end{cases} \Rightarrow F(u) = 0$

Proiezione sullo spazio di dim. di N

dove $F(u) = \begin{pmatrix} P_N(h(u)) \\ \|h(u)\| - \rho \end{pmatrix} : Q \subseteq \mathbb{R}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{N+1} \simeq H^- \times \mathbb{R}$

Costruisco un'omotopia

$$F_\lambda(u) : \lambda F(u) + (1-\lambda) \underbrace{\begin{pmatrix} P_N(u) \\ \|u\| - \rho \end{pmatrix}}_{\text{è l'identità su } Q}$$

Per $\lambda = 0$ esiste la soluzione (è il punto $(0,\rho)$) e sulla ∂Q non può esserci soluzione perché $h|_{\partial Q} = id_{\partial Q}$ ⊛ quindi la soluzione vive $\forall h$ e $\forall \lambda \in [0,1]$. Quindi quel problema ha soluzione.

Quindi c è ben definito e $c \geq a > 0 \Rightarrow$ concludo come la dim. di Rosso-Montano supponendo $J \in C^{1,1}$ che c è critico con la deformazione modificando

$$\dot{\eta} = \frac{-\nabla u}{1 + \|\nabla u\|} H(u) \quad \text{con } H \in C^1 \text{ e } H(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } J(u) \geq 0 \\ 0 & \text{se } J(u) \leq \varepsilon \end{cases}$$

in modo che fissi il bordo

⊛ e se $u \in \partial Q$ $\begin{cases} P_N(u) \neq 0 \\ \|u\| = c > \rho \end{cases} \Rightarrow F_\lambda(u) \neq 0$

Quindi tornando al nostro problema con $H = H^- \oplus H^+$ (funzioni costanti; funzioni a media nulla)

Le ipotesi del teorema precedente sono quasi verificate per il nostro funzionale J, resta da verificare P-S.

Nel caso del laplaciano $\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2$ era la norma quindi si controllava bene. Mentre adesso non posso usare Poincaré per controllare $\int_0^1 \frac{1}{2}\dot{x}^2$

un'idea potrebbe essere quella di usare $\|x\|_{H^1_p} \simeq \int |\dot{x}|^2 + |x(0)|^2$ e vedere che è equivalente alla norma H^1

Perché è naturale studiare i problemi soprquadratici ?

In generale se ho un potenziale con un minimo in 0

ho $V(x) = \underset{\substack{\| \\ 0}}{V(0)} + \underset{\substack{\| \\ 0 \\ \downarrow \\ 0 \text{ è min}}}{V'(0)}\, x + \frac{1}{2} \underset{\substack{\| \\ \omega^2}}{V''(0)}\, x^2 + o(x^2)$

$\Rightarrow V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2 + W(x)$ con $W(x)$ soprquadratica e $W(x) \geq 0$

- Se $\omega = 0$ caso di sopra

- Se $\omega \neq 0 \Rightarrow J(u) = \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 x^2}_{\langle Lu, u\rangle} - W(x)$ Possiamo ricondursi a Linking ?

L: $-D^2 + \omega^2 \longrightarrow$ LINEARE, AUTOAGGIUNTO

$\Rightarrow$ avrò infiniti autovalori

basta vedere $\ddot{x} - \omega^2 x = \lambda x$

$\Rightarrow$ si vede che gli autovalori negativi sono in numero finito per avere soluzioni periodiche del tipo $\sin(nx)$ $\cos(nx)$.

$\Rightarrow$ Separo
- $H^- = \operatorname{Span}\{$autofunzioni relative ad autovalori negativi o nulli$\}$
- $H^+ = \operatorname{Span}\{$autofunzioni relative ad autovalori positivi$\}$

e per quanto osservato prima $\dim H^- = N < +\infty$

e quindi posso usare Linking.

Ma P-M è ancora più difficile da controllare.

LEZIONE 09

Titolo nota 06/11/2019

Teo del Linking

$J \in C^1(H)$ H banach riflessivo tale che

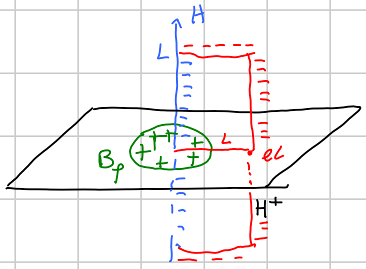
i) J soddisfa P-S

GEOMETRIA DEL LINK.

ii) $J(0)=0$

iii) $H = H^+ \oplus H^-$ Tali che $\dim H^- < +\infty$

e $\exists \rho > 0$ $u \in H^- \cap B_\rho \Rightarrow \|u\| \geq b > 0$



iv) $\forall u \in H^-$ $J(u) \leq 0$

v) $\exists e \in H^+$, $\|e\|=1$, $L > \rho$, $\forall u \in \partial Q$ $J(u) < 0$

con $Q = \{ er + v \mid 0 \leq r \leq L,\ v \in H^-,\ \|v\| \leq L \}$

$\Rightarrow$ $c = \inf\limits_{h \in \mathcal{H}} \max\limits_{u \in Q} J(h(u)) > b$ è punto critico ove $\mathcal{H} = \{ h : Q \to H \mid h|_{\partial Q} = id|_{\partial Q} \}$

__Esempio__: Ricerca di soluzioni periodiche di un problema meccanico

oss scrivo V' ma è ∇V

$$\begin{cases} \ddot{x} + V'(x) = 0 & x \in \mathbb{R}^N \\ x(0) = x(2\pi) \\ \dot{x}(0) = \dot{x}(2\pi) \end{cases}$$

Si adatta bene se V è sopraquadratico.

Considero l'azione $J(u) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 - V(x) \right\} dt$

Lo spazio ideale è $H^1_p = \{ x \in H^1((0,2\pi), \mathbb{R}^N) \mid x(0) = x(2\pi) \}$

periodico

(0) $V(0)=0$, $V'(0)=0$ (ipotesi di comodo per avere anche $J(0)=0$)

(1) $|V'(x)| \leq C_1 + C_2 |x|^s$ (Per usare Niemisky e avere la diff di J)

(ii) Dobbiamo vedere che J verifica P-S (non difficile)

(Aggiunto alla fine: vedremo serve A-R a V $0 < V(x) \leq \frac{1}{p} V'(x)\, x$ $|x| > R$)

Osservo che vicino all'origine $V(x) = \cancel{V(0)} + \cancel{V'(0)x} + \frac{1}{2}\langle Ax,x\rangle + \underbrace{W(x)}_{\text{sopraquadratico}}$

$A = V''(0)$

$$J(u) = \int \frac{1}{2}|\dot{u}|^2 - \frac{1}{2}\langle Ax,x\rangle - W(x) =$$

è il termine $\int \frac{1}{2}|x|^2$ che ho aggiunto per avere $\|x\|^2_{H^1}$

$$= \|x\|^2_{H^1} - \int \underbrace{\frac{1}{2}\langle (A+I)x, x\rangle + W(x)}_{F(x)}$$

Se $\exists R>0$ tc $0 < W(x) \le \frac{1}{p} W'(x)x$ x $|x|>R$, $p>2$

Vorrei che F fosse sopraquadratica. Quindi anche lei dovrebbe soddisfare Ambrosetti - Rabinowitz

Preso $2<q<p$

$$\frac{1}{q} x F'(x) = \frac{1}{q} W'(x)\cdot x + \langle (A+I)x, x\rangle \ge$$

per la condizione su W

$$\ge \frac{p}{q} W(x) + \langle (A+I)x, x\rangle =$$

è sopraquadratica quindi si maggiora il termine quadratico per x grandi

$$= W(x) + \boxed{\frac{p-q}{q}}_{>0} W(x) + \langle (A+I)x,x\rangle \ge$$

$$\ge W(x) + \frac{1}{2}\langle (A+I)x, x\rangle = F(x)$$

Quindi $J(u) = \frac{1}{2}\|x\|^2_{H^1} - \int F(x)\, dt$

Presa $J(x_n) \to c$ a) $\frac{1}{2}\|x_n\|^2_{H^1} - \int F(x_n)\,dt = c + \varepsilon_n$ $\quad \varepsilon_n \to 0$

$J'(x_n) \to 0$

$\Downarrow$

$\frac{1}{q}\left(J'(x_n), x_n\right)_{H^1} \to 0$ b) $\frac{1}{q}\underset{\|x_n\|^2_{H^1}}{(x_n, x_n)} - \frac{1}{q}\int F'(x_n)x_n = \frac{1}{q}\langle \chi_n, x_n\rangle$ $\quad \chi_n \to 0$

Sottraggo a) e b)

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)}_{>0} \|x_n\|^2_{H^1} + \int \overbrace{\frac{1}{q}F'(x_n)x_n - F(x_n)}^{\ge 0 \text{ per Ambrosetti - Rabinowitz}} = c + \varepsilon_n - \frac{1}{q}\langle \chi_n, x_n\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{9}\right) \|x_n\|^2_{H^1} \le C + \varepsilon_n - \frac{1}{9}\langle \chi_n, x_n \rangle \le C$$

$\Rightarrow$ x_n è limitata $\Rightarrow$ x_n conv. debole $\Rightarrow$ conv. fortemente $\Rightarrow$ vale P-S

perché da $J'(x_n) \to 0$

$-\ddot{x}_n + x_n - F'(x_n) = \chi_n \xrightarrow{\text{per ipotesi di PS}} 0$ $\Rightarrow$ $\ddot{x}_n$ converge debolmente in H^{-1}

$\Downarrow$ (Ascoli-Arzelà)

x_n conv forte.

$-\ddot{x}_n + x_n = -D^2 + I$ è invertibile; $F'(x_n)$ continuo per Niemnosky allora $F'(x_n)$ converg

$\Downarrow$

$-\ddot{x}_n + x_n$ converg

$\Downarrow$

$\ddot{x}_n$ converge perché x_n conv debole per limitatezza.

iii) Vedere H^+ e H^- poiché $J(u) = \int \underbrace{\frac{1}{2}|\dot{x}|^2 - \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle}_{\langle Lx, x\rangle} - W(x)$

con L quadratico

Allora $H^+ = \operatorname{span}\{\text{autofunzioni positive di } L\}$ $H^- = \operatorname{span}\{\text{autofunzioni negative di } L\}$

cioè $\ddot{x} - \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle = \lambda x$

<u>Parentesi</u> teoria spettrale di operatori

Esempio $\begin{cases} u \in H^1_0(\Omega) \\ -\Delta u = \lambda u \end{cases}$ $J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$ e lo minimizzo

su $\{u \in H^1_0 \mid \int u^2 dx = 1\}$

e trovo e_0, $\lambda_0 > 0$ primi autovalori e autovettore.

Considero $H_1 = [\operatorname{span}(e_0)]^\perp$ ← rispetto alla norma in L^2

minimizzo $J(u)$ nella palla unitaria in H_1

trovo e_1 e λ_1

tali che $\int \nabla e_1 \nabla v = \lambda_1 \int e_1 v \quad \forall v \in H_1 \rightsquigarrow$ ma $\forall v \in H^1_0$

decomponendo $v = \alpha e_0 + w \quad w \in H_1$

per ortogonalità la relazione vale $\forall v \in H^1_0$

Allora λ_1 e e_1 sono autovalori.

Problema $-\Delta$ non va da H^1 in H^1 ma da H^1 in H^{-1} ma $-\Delta$ è invertibile

$\Rightarrow \quad H^{-1} \xrightarrow{(-\Delta)^{-1}} H^1 \xrightarrow{i} L^2 \qquad u = (-\Delta)^{-1} \lambda u$

identificandolo come un operatore da L^2 in L^2

oppure come si faceva in passato vedere

come operatore di Fredholm da L^2 in L^2

$-\Delta u = \int G(x,y)\, u(y)\, dy$

Volendo quindi ricondursi al problema $Ku = \mu u$ con $K : H \longrightarrow H$

H Hilbert e K compatto

$\Rightarrow$ per la teoria spettrale K ha autovalori positivi $\mu_n \to 0$ e zero potrebbe essere autovalore.

<u>idea</u> $\quad H^1_0 \xrightarrow{-\Delta} H^{-1} \Rightarrow L_2 \subset H^{-1} \xrightarrow{(-\Delta)^{-1}} H^1_0 \big|_{L^2} : \underbrace{L_2 \longrightarrow H^1_0 \xrightarrow{i} L^2}_{K \text{ è compatto perché } i \text{ lo è}}$

è compatta per Sobolev

da questo abbiamo che $(-\Delta)^{-1}$ ha infiniti autovalori μ_n e $\mu_n \neq 0$ perché $(-\Delta)^{-1}$ è invertibile. $\Rightarrow \exists \{e_n\}$ base spettrale.

$\Rightarrow \quad u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n e_n(x) \qquad$ con $u_n = \int u(x)\, e_n(x)\, dx$

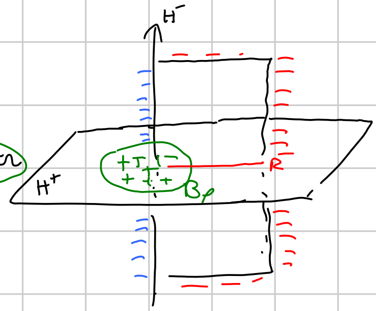
$\Rightarrow \quad -\Delta u(x) := \sum_{n=0} \lambda_n u_n e_n(x) \qquad u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \quad$ e $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n}$

su un dominio dove $\sum \lambda_n^2 |u_n|^2 < +\infty$

da questo si può definire $H^s = \{ u \mid \sum \lambda_n^s |u_n|^2 < +\infty \}$ anche con s frazionari.

Torniamo al problema iniziale

$$J(u) = \int \underbrace{\frac{1}{2}|\dot{x}|^2 - \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle}_{\text{vicino all'origine in } H' \text{ è quadratica}} - \underbrace{W(x)}_{\text{sopraquadratico}}$$



Allora $\exists\, \rho > 0$ t.c. $B_\rho \cap H'$ $J(u) \geq b > 0$

Mentre nel lontano il W è più che quadratico quindi $\exists R > 0$ t.c. $J(u) < 0$

Su H^- devo avere: $J(u) < 0 \Rightarrow$ chiedo $W(u) > 0$
perché il blocco $\frac{1}{2}|\dot{x}|^2 - \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle$ è negativo

In sintesi devo chiedere

i) $V(0) = 0$ $\quad V'(0) = 0$

ii) $0 < W(x) \leq \frac{1}{p} W'(x)x \qquad p > 2 \qquad |x| > R$ (Lui dice per V tanto è equivalente perché la parte quadratica la rispetta)

iii) $W(x) > 0$

<u>Oss</u> $\dim H^- < +\infty$ perché se diagonalizzo $Lx = \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 - \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle$

il problema diventa componente per componente

$$\ddot{x}_1 - \omega_1 x_1 = \underbrace{\lambda}_{\text{autovalori di } L} x_1 \qquad \text{con } \omega_i \text{ autovalori di } A \text{ (positivi per compattezza di } \langle Ax, x\rangle)$$

$\vdots$

allora solo finiti λ possono essere negativi.

LEZIONE 10

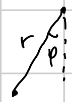
Titolo nota 07/11/2019

$x = x(t)$

$$J(\gamma) = \int \overbrace{(T - V)}^{\text{Lagrangiana}} \, dt =$$

$$= \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}^2 + [1 - \cos\varphi] \right\} dt$$

Es moto del pendolo

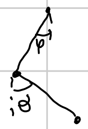


$\frac{d}{dt} r\varphi = r\dot\varphi$

$T = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}^2$

Problema $\varphi \notin \mathbb{R}$ $\varphi \in S^1 = \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$

Caso doppio pendolo



$x_1(\varphi, \theta) = f(\varphi, \theta)$

$x_2(\varphi, \theta) = g(\varphi, \theta)$

Quindi le conf sono S^2 $\Rightarrow T = \underset{\overset{\vee}{0}}{a(\varphi,\theta)}\, \dot{\varphi}^2 + \underset{\overset{\vee}{0}}{b(\varphi,\theta)}\, \dot{\theta}^2$

Se prendo un oggetto del tipo  ho $O(3)$ come spazio delle configurazioni.

Una cosa tipo  è $\underset{\text{posizioni pos. centro}}{\mathbb{R}^3} \times \overset{\text{rotazioni.}}{O(3)}$

Esempi come le conf di un mmobilio, essendo vincolato avere anche varietà con bordo.

Problema $J(x) = \int T(x, \dot{x}) - V(x) = \int \frac{1}{2} \sum_{ij} \overset{\text{forma bil. def > 0 ènu tensore metrico}}{g_{ij}(x)} \dot{x}_i \dot{x}_j - V(x)$

e l'energia cinetica viene una forma simmetrica rispetto a $\dot{x}$

con $x = (q_1 \ldots q_n) \in C$ = Varietà configurazioni.

Quindi lo spazio delle fasi è il fibrato tangente.

$$\Rightarrow J(x) = \int \frac{1}{2} \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle_g - V(x) \, dt$$ definito su una varietà Riemanniana M

Le equazioni del Moto sono $\boxed{dJ_M(x)=0}$

M $\quad T_xM=\{\gamma(t)\mid \gamma(0)=x\}$ $\quad TM=\bigcup_{x\in M} T_xM$

$f(x_0+\gamma(t))=f(x_0)+df_{x_0}(x_0)[v]+o(\|v\|)$

$\gamma(0)=x_0 \quad \dot\gamma(0)=v \quad df_{x_0}\in(T_xM)'$ è un vettore cotangente

corrisponde un vettore nel tangente

e $df_{x_0}[v]=\langle\nabla_M f(x_0),v\rangle$

Un punto critico è x_0 t.c. $df_{x_0}[v]=0 \quad \forall v\in T_{x_0}M$

cioè $\nabla_M f(x_0)=0$

$$\nabla_M f(x_0) = \nabla f(x_0)-\frac{\langle\nabla f,\nabla G\rangle}{\|\nabla G\|^2}\nabla G$$

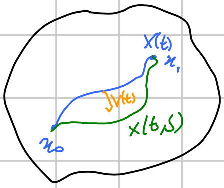
Preso $X(t,s)$ $\qquad$ $T_{x(t)}M \ni v(t)=\partial_s X(t,s)\big|_{s=0}$

$$\frac{d}{ds}\int\frac12\langle\dot x,\dot x\rangle-V(x)\,dt\Big|_{s=0}=\int\langle\partial_s\dot x,\dot x\rangle-V'(x)\partial_s x\Big|_{s=0}dt \overset{\Downarrow}{=}$$

idea di questa s

nel caso di spazi vettoriali $x(t,s)=x(t)+vs$

$$=\int\langle\partial_t\partial_s X(t,s),\partial_t X\rangle-V'(x)\partial_s x\Big|_{s=0}=$$



$X(t,0)=X(t)$

$X(t,s)$ è una curva su M

$X(0,s)=x_0 \quad X(T,s)=x_1$

$$=\int\langle\dot v(t),\dot x(t)\rangle-V'(x)v(t)\,dt$$

$$\| $$

e le cond. al bordo?

$$dJ(X)[v]=$$

Connessione di Levi-Civita ovvero la D_t

$$=\int\langle-\ddot x-\nabla V,v(t)\rangle\,dt$$

$M_a \qquad \not\Downarrow$

$\boxed{0=D_t\dot x+\nabla_M V(x)} = P_x\partial_t\,\dot x+\nabla_M V(x) = P_x(\ddot x+\nabla V(x))=0 \qquad \ddot x+\nabla V=0$

Proiezione rispetto a x su T_xM

EQUAZIONE DI EULERO LAGRANGE

Generalizzando dovremmo dire J, $\mathcal{M}$ e $T\mathcal{M}$

varietà infinito dimensionale

$$\mathcal{M} = \left\{ x(t) \in H^1((0,1),\mathbb{R}^N) \,\middle|\, \forall t \;\; x(t) \in M \,,\; x(0) = q_0 \,,\; x(1) = q_1 \right\}$$

dove $\mathbb{R}^N$ è quello dove M è immersa.

$$T_x\mathcal{M} = \left\{ v \in H^1((0,1),\mathbb{R}^N) \,\middle|\, \forall t, \; v(t) \in T_{x(t)}M \,,\; v(0) = v(1) = 0 \right\}$$

Se introduco un prodotto scalare che $\forall x \in \mathcal{M}$, $T_x\mathcal{M}$ è uno spazio Hilbertiano allora diremo che $\mathcal{M}$ è una varietà Hilbertiana.

$$\langle v, w \rangle_{\mathcal{M}} = \int (\dot{v}\dot{w} + vw)\, dt$$

<u>Oss</u> Se $V=0$ e M riemanniana e geodeticamente completa il problema è trovare le geodetiche su M

Per l'esistenza dei minimi di J ci vuole:

1) P–M

2) Capire la topologia.

1) $J(x_n) \longrightarrow c$ soliti conti a seconda di V se M non è cpt.

$J'(x_n) \longrightarrow 0$ se M è cpt invece dalle ip. di PS ho che

x_n è limitato in $L^\infty \Rightarrow \langle \dot{x}_n, \dot{x}_n \rangle$ è limitato

$\Rightarrow x_n \rightharpoonup \bar{x}$ e potrei dover ottenere la conv forte (<u>EX</u> basta vedere che x_n è di Cauchy)

(o lo vediamo la prox volta)

LEZIONE 11

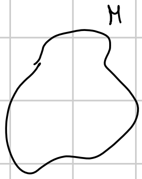
Titolo nota 13/11/2019

$M \subseteq \mathbb{R}^N$ ← Teo di Nash

M varietà di Riemann Compatta (altrimenti servirebbe completa)

$$J(x) = \int_0^1 \frac{1}{2}\langle \dot{x}, \dot{x}\rangle - V(x)\, dt$$

M



$$\begin{cases} \ddot{x} + V'(x) = 0 \\ \left.\begin{aligned} x(0) = x(1) \\ \dot{x}(0) = \dot{x}(1) \end{aligned}\right\} \text{condizioni periodiche} \end{cases}$$

Spazio giusto: $\mathcal{M} = \{ x \in H^1(\underbrace{[0,1]}_{``I"}, \mathbb{R}^N) \mid x(t) \in M,\ x(0) = x(1) \}$

$\mathcal{M}$: Varietà infinito dimensionale

$x(t) \in M$: Ha senso perché $x \in H^1$ è continua quindi posso definirla puntualmente

$$T_x \mathcal{M} = \{ v \in H^1(I, \mathbb{R}^N) \mid \forall t\ \ v(t) \in T_{x(t)} \mathcal{M},\ v(0) = v(1) \}$$

$$dJ(x)[v] = \int \langle \dot{x}, \dot{v}\rangle - \langle V'_M(x), v\rangle\, dt \qquad \forall v \in T_x \mathcal{M}$$

ha senso perché x e v li penso immersi in $\mathbb{R}^N$ e $\langle , \rangle$ è quello di $\mathbb{R}^N$ indotto dall'immersione di M in $\mathbb{R}^N$ (Dato dal teo di Nash)

$$V'_M = P_{x(t)} V'$$

Voglio dimostrare P-M

$$\begin{cases} dJ(x_n)[v] = \int \langle \dot{x}_n, \dot{v}\rangle - \langle V'_M(x_n), v\rangle\, dt = \langle \chi_n, v\rangle = \overset{\to 0}{\varepsilon_n} \|v\| \\ J(x_n) = c_n \to c \end{cases}$$

Poiché $J(x_n)$ converge $\Rightarrow$ $J(x_n)$ è limitato con minor infinito $\Rightarrow$ $\|x_n\|_{L^2}$ è limitato (M è cpt)

$\Rightarrow$ $\|\dot{x}_n\|_{L^2}$ è limitato

$\Rightarrow$ $x_n \rightharpoonup \bar{x}$ debole in H^1 e forte in C^0

Devo vedere che $x_n \to \bar{x}$ forte in H^1

L'idea è quella di scegliere un v giusto

prendo $V = P_{T_{x_m} M} (x_n - x_m) \underset{\text{notazione}}{=} P(x_n - x_m)$

1) $dJ[x_n][v] = \int \langle \dot{x}_n, \cancel{P}(\dot{x}_n - \dot{x}_m) \rangle - \langle V_\mu'(x_n), \cancel{P}(x_n - x_m) \rangle = \varepsilon_n \|x_n - x_m\|$

$T_{x_n}M$ quindi posso togliere P — Anche V è già proiettato quindi posso togliere P

2) Facendo la stessa cosa con x_m $\quad \int \langle \dot{x}_m, \dot{x}_n - \dot{x}_m \rangle - \langle V_\mu'(x_m), x_n - x_m \rangle = \varepsilon_n' \|x_n - x_m\|$

Perché x_m è limitata, $V \in C^1$, $x_n - x_m \to 0$

$\langle V_\mu'(x_n), (x_n - x_m) \rangle$ e $\langle V_\mu'(x_m), x_n - x_m \rangle$ sono infinitesimi quindi otteniamo

1) 2)

$$\int \langle \dot{x}_n - \dot{x}_m, \dot{x}_n - \dot{x}_m \rangle = \varepsilon_n'' \|x_n - x_m\|$$

Sommo da entrambe le cose

$$\int \langle x_n - x_m, x_n - x_m \rangle = \varepsilon_n''' \text{ per limitatezza di } x_n$$

$$\|x_n - x_m\|^2_{H^1} = \int \langle \dot{x}_n - \dot{x}_m, \dot{x}_n - \dot{x}_m \rangle + \langle x_n - x_m, x_n - x_m \rangle = \varepsilon_n'' \|x_n - x_m\| + \varepsilon_n'''$$

$\downarrow$

0 in norma quindi la convergenza è forte.

<u>Oss</u> quando abbiamo scritto $v(t) = P(T_{x_n(t)}M)[x_n - x_m]$

$$\Rightarrow \dot{v}(t) = P(\dot{x}_n - \dot{x}_m) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{ci siamo dimenticati} \\ \text{questo pezzo}}}{\underline{\underline{+}}} P'(T_{x_n(t)}M)[x_n - x_m]$$

$\Leftarrow$ si controlla ancora per la regolarità di P e la limitatezza di x_n

Fine capitolo sulle periodiche

Verso l'analisi non standard

Esempi di problemi che richiedono qualcosa in più

PROBLEMA DI YAMABE

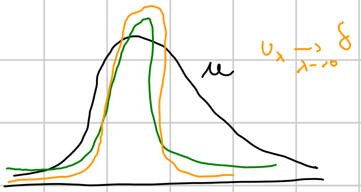
$$\begin{cases} -\Delta u = u^{\frac{N+2}{N-2}} & \frac{N+2}{N-2} = 2^* \text{ esponente critico} \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u > 0 \end{cases}$$

su Ω dominio stellato

$$\Rightarrow \begin{cases} \int \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \\ \|u\|_{L^p} = 1 \end{cases}$$

$u_n \longrightarrow 0$

$|u_n|^{2^*} \longrightarrow \delta_0 \quad \Rightarrow \quad u \simeq \sqrt[2^*]{\delta_0}$



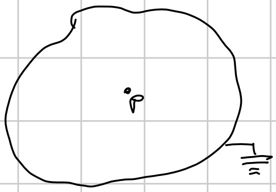
esiste $u_\lambda = C_\lambda u(\lambda x)$ quindi se restringo
e quindi u_λ è una succ. minimizzante ma il minimo non esiste

<u>Oss</u> su $\mathbb{R}^N$ la sol esiste $\Rightarrow$ la prendo la u_λ e la tronco con un cut-off e trovo la succ. per Ω.

In sostanza è un problema molto instabile perché non funziona P-M.

Problema del potenziale

$$\begin{cases} -\Delta u = \delta_P(x) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$



P punto materiale libero

non ho scritto $u \in H^1_0$ perché l'energia è $+\infty$ perché $u \simeq \frac{1}{|x|^{N-1}} \Rightarrow \int |\nabla u|^2 = +\infty$ vicino a $x_0 = 0$

Voglio sapere dove va P.

<u>Conto con errore.</u>

L'energia col cambio di segno

$$E_{el} = E_{\text{elettrostatica}} = -\int \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \langle f, u \rangle \, dx =$$

$$E_{el}(P) = -\int \frac{1}{2} |\nabla u_P|^2 dx$$

$P \in \overline{\Omega}$ quindi un compatto

Allora trovo il minimo

Quindi avrei bisogno di lavorare con gli infiniti e poterli confrontare.

<u>Altro problema</u>: Problema di elasticità

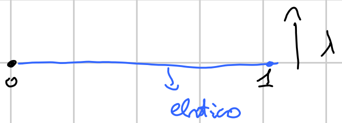
caso non omogeneo

$\langle A(u)\nabla u, \nabla u\rangle$

$$J = \int \frac{1}{2} a(u)|\nabla u|^2 - \lambda u$$

caso omogeneo

Quindi le eq. di eulero Lagrange

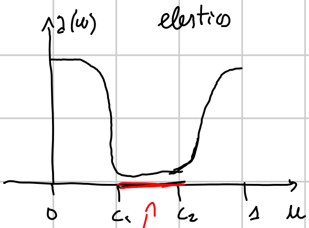


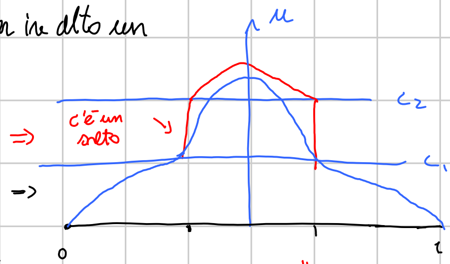
$$\nabla \cdot [a(u)\nabla u] - \frac{a'}{2}|\nabla u|^2 = \lambda$$

a è la forza dell'elastico

è una forza che tira in alto un elastico

Supponiamo a

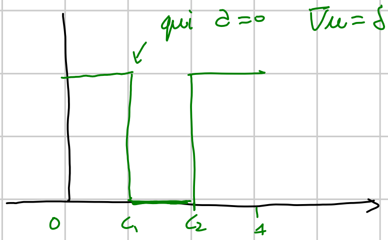




Problema se a può essere $=0$

$\nabla u = \delta$

Le cose hanno senso se $a(u)$



$\nabla u = \delta \Rightarrow$ il prodotto ha "senso".

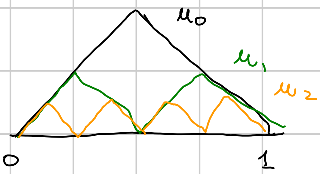
ma se $u \in H^1 \Rightarrow |\nabla u|^2 \in L^1$

ma in questo caso a' non è limitato $\Rightarrow$ $J(u)$ diverge anche in questo caso.

<u>Altro Problema</u>: Fenomeno di Lavrentiev

Preso $J(u) = \int_0^1 \underbrace{(|\nabla u| - 1)^2}_{\text{vorrei}} + \underbrace{u^2}_{\text{è compatta}}$ $\quad u \in H^1$

$F(\nabla u)$ con F convessa



u_n disegnate è una successione minimizzante

$u_n \to 0 \qquad J(u_n) \to 0 \quad$ <u>ma</u> $\quad J(0) = 1$

In Fisica $\quad J(u) = \int (|\nabla u| - \lambda)^2 + u^2 \, dx$

se $\lambda > 0$ si chiama problema di transizione di fase.

se $\lambda < 0$ $F(\nabla u)$ è convesso nessun problema

Esempi di Rette

$\longrightarrow$ Retta empirica (numeri decimali finiti) $\mathcal{E}$

$\longrightarrow$ Retta razionale (4 operazioni) $\mathbb{Q}$

$\longrightarrow$ Retta EUCLIDEA (segmenti costruibili con riga e compasso) E

$\longrightarrow$ Retta Reale (Dedecking) $\mathbb{R}$

LEZIONE 12

Titolo nota 14/11/2019

Cerchiamo una buona definizione di retta euclidea

ci serve

1) Continuo assoluto (senza buchi ovvero posso avere gli infinitesimi)
2) Campo ordinato

Tentativi di continuo assoluto

Pitagora: $\forall x<y \ \exists \ \xi$ tc $x<\xi<y$ => ottengo i reali

$\forall A \leq B$ cioè $\forall a\in A, \forall b\in B \quad a<b$

$\Rightarrow \exists c$ tc $a<c<b$

esempio $A=\{0\}$ $B=\mathbb{Q}^+$ $\mathbb{R}$ non soddisfa questa prop

Ma tale definizione non è consistente perché se esistesse un tale I

preso $\xi\in I$ e $A=\{x\in I \mid x\leq \xi\}$ $B=\{x\in I \mid x>\xi\}$

$A<B$ e $A\cup B=I \Rightarrow \nexists c$

Def Un insieme E si dice ordinario (di cardinalità raggiungibile) se

i) $E=\mathbb{N}$

ii) $E=\bigcup_{J\in I} A_J$ dove I e A_J sono ordinari

iii) $E=\mathcal{P}(A)$ dove A è ordinario

iv) $E=f(A)$ dove A "

Def un insieme è inaccessibile se non è ordinario

Assioma di inaccessibilità

Esistono insiemi non ordinari

Si chiama Ω il primo cardinale inaccessibile.

Def dico che I è un continuo assoluto se dati A e B ordinari con $A < B \Rightarrow \exists c \in I$ tc $a < c < b$ $\forall a \in A$ $\forall b \in B$

Proprietà di Archimede $\forall a, b > 0$ $\exists n$ tc $na > b$

$\mathbb{Q}$ è il più piccolo campo ordinato

Def Dato $\mathbb{K}$ un campo ordinato, ξ si dice infinitesimo se ξ e $|\xi| < \frac{1}{n}$

ξ si dice infinito se $\forall n \in \mathbb{N}$ $|\xi| > n$

Oss 0 è infinitesimo così gli infinitesimi formano un sottoanello

Prop $\mathbb{K}$ campo archimedeo $\Leftrightarrow$ in $\mathbb{K}$ l'unico infinitesimo è 0 e non ci sono infiniti

Def Se α è un infinito chiamo $\mathbb{Q}(\alpha) = \left\{ \frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)} \,\middle|\, P, Q \text{ polinomi in } \mathbb{Q} \text{ e } Q \neq 0 \right\}$

è un campo ordinato non archimedeo

non banale — uso il teo. $\mathbb{K}$ è ordinato se $\exists \mathbb{K}^+$ chiuso per $+$ e $\cdot$ e $\mathbb{K} = \mathbb{K}^+ \cup (\mathbb{K}^-) \cup \{0\}$, $\mathbb{K}^- = -\mathbb{K}^+$

Devo dire quando $\frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)} > 0 \Leftrightarrow \exists x_0 > 0$ tc $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ $\forall x > x_0$

per definizione.

Allora definisco $\mathbb{R}(\alpha)$ per avere anche i reali.

Germi di funzioni <u>meromorfe</u>

→ Analitiche con singolarità polari in 0

cioè $f(x)$ si scrive $f(x) = \sum_{n=-N}^{+\infty} b_n x^n = \frac{1}{x^N} \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}_{\text{Analitica}}$

Le funzioni meromorfe formano un campo

prendendo $\alpha =$ l'infinito di prima, chiamo $\eta = \frac{1}{\alpha}$

la riscrivo

$$f(x) \stackrel{!}{=} \left(\frac{1}{\eta}\right)^N \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \eta^n$$

Se parto da un $\{a_n\}$ qualsiasi chi mi dice che $\frac{1}{\eta^N} \sum a_n \eta^n$ derivi da una funzione meromorfa? NESSUNO! se $a_n \nearrow +\infty$ troppo rapidamente il raggio di conv. della serie è 0

$\Rightarrow$ definisco $\{\text{Serie formali}\} = \left\{\frac{1}{\eta^N} \sum a_n \eta^n\right\}$

<u>Problema</u> è dimostrare che esiste l'inverso

$$\frac{a_0}{\eta^N}\Big(1 + \overbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{a_0} \eta^n}^{\varepsilon \text{ è un infinitesimo}}\Big) \Rightarrow \frac{\eta^N}{a_0} \frac{1}{1+\varepsilon} = \underbrace{\frac{\eta^N}{a_0}\left[1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 - - -\right]}_{\text{è l'inverso.}}$$

<u>Problema</u>: il campo delle serie formali non è reale-chiuso non posso fare $\sqrt{\alpha}$ ad esempio

<u>Altro esempio</u> Campo di Levi-Civita $= \left\{ \frac{1}{\eta^p} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^{q_n} \;\middle|\; \begin{array}{l} p, q_n \in \mathbb{Q} \\ q_n \nearrow +\infty \\ \text{senza punt. di acc} \end{array} \right\}$

Assiomi sulla retta Euclidea $\mathbb{E}$

① $\mathbb{E}$ è un campo continuo numerico assoluto

(Ma questo non basta a dire neanche che $\mathbb{E}$ rende chiuso)

② Esiste una funzione sp (parte standard)

$$St : \mathbb{E}_{finiti} \longrightarrow \mathbb{E} \quad t.c$$

- è un omeo $\quad St(a+b) = St(a) + St(b)$
  $\quad St(a \cdot b) = St(a) \cdot St(b)$
- $q \in \mathbb{Q} \quad St(q) = q$
- $x \sim y \iff x - y$ è infinitesimo $\Rightarrow st(x) = st(y)$
- $st(st(x)) = st(x)$

esempio $\quad st\left(\frac{7}{3} + 9\eta^2\right) = \frac{7}{3}$

COSA CHIAVE: $\quad Img(St) = \mathbb{R}$

Def $\quad f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$

preso ε un infinitesimo $\Rightarrow st\left(\frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}\right) \overset{!}{=} Df$ se non dipende da ε

$$Dx^2 = St \; \frac{(x+\varepsilon)^2 - x^2}{\varepsilon} = st \; \frac{\cancel{x^2} + 2\varepsilon x + \varepsilon^2 - \cancel{x^2}}{\varepsilon} = St\left(2x + \varepsilon\right) \overset{!}{=} 2x \quad x \; 2x \in \mathbb{R}$$

$$\overset{!!}{=} st(2x)$$

Altrimenti

Quindi ho problemi a definire la derivata

Assioma ③ Data $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \exists! \, \varphi^* \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}^*$ che estende la φ

cioè
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi^*(x) = \varphi(x)$
- $(id_{\mathbb{R}})^* = (id_{\mathbb{E}})$
- $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$
- $(\varphi \cdot \psi)^* = \varphi^* \cdot \psi^*$
- $(\varphi \circ \psi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$

Def Data $f : E \longrightarrow E$ t.c. $f = \varphi^*$ con $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
allora f si dice Standard.

Def f. V standard si dice derivabile in x_0 se $\forall \varepsilon \sim 0$ (infinitesimo)

$$st\left(\frac{f(x_0+\varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}\right) \text{ è indipendente da } \varepsilon$$

se f è derivabile in $(a,b) \Rightarrow \exists f'$ estensione di una $\varphi' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Def $f : (a,b) \longrightarrow E$ standard si dice continua in $x_0 \in \mathbb{R}$
se $f(x_0) \sim f(x_0+\varepsilon)$ $\forall \varepsilon \sim 0$

è l'uniforme continuità

Osserviamo che $x \sim y \Rightarrow f(x) \sim f(y)$ è falso se f è continua

esempio $f(x) = \dfrac{1}{x} : (0,1) \longrightarrow E$

$$\begin{aligned} x &= \eta \sim 0 \\ y &= 2\eta \sim 0 \end{aligned} \Rightarrow x \sim y \quad \text{ma} \quad f(x) - f(y) = \frac{1}{\eta} - \frac{1}{2\eta} = \frac{1}{2\eta} \not\sim 0$$

Teorema di Heine-Cantor

$$\left.\begin{array}{l} f : [a,b] \longrightarrow E \text{ standard} \\ f \text{ continua} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ è unif continua}$$

Dim Siano $x \sim y$ $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ $x_0 \stackrel{!}{=} st(x) = st(y)$

serve $[a,b]$ limitato per dire che $st(x)$ e $st(y)$
e $[a,b]$ chiuso serve per dire $x_0 \in [a,b]$

$\Rightarrow f(x_0) \sim f(x)$ e $f(x_0) \sim f(y)$
e $\sim$ è di equivalenza.

LEZIONE 13

Titolo nota 20/11/2019

Assiomi per la retta euclidea

1. Campo ordinato, continuo assoluto

2. $\exists$ una funzione $St : \mathbb{E}_{finiti} \longrightarrow \mathbb{E}$
   - $q \in \mathbb{Q} \Rightarrow St(q) = q$
   - $x \sim St(x)$
   - $st(st(x)) = st(x)$
   - $st(x+y) = st(x) + st(y)$
     $st(x \cdot y) = st(x) \cdot st(y)$

oss equivalente all'assioma 2 e 2' $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{E}$ e $\mathbb{R} = st(\mathbb{E}_{fin})$

3. $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ esiste unica $\varphi^* : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ tc
   - $\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi^*(x) = \varphi(x)$
   - Date $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Rightarrow (\varphi+\psi)^* = \varphi^* + \psi^*$
     $(\varphi \cdot \psi)^* = \varphi^* \cdot \psi^*$
     $[\varphi(\psi)]^* = \varphi^*(\psi^*)$

   inoltre si può dimostrare che $id_{\mathbb{R}}^* = id_{\mathbb{E}}$

<u>Def</u> un campo <u>iperreale</u> $\mathbb{R}^*$ è un campo tc

i) $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^*$

ii) $\mathbb{R}^*$ verifica 3

<u>PROBLEMA</u> Bisogna vedere che 1, 2, 3 siano un sistema di assiomi consistenti, quindi bisogna trovare un modello

Insieme di succ. di cauchy

Idea prendo $\text{Cauchy}(\mathbb{Q}) / \text{Infinitesime} \cong \mathbb{R}$

modulo le succ. la cui diff è una succ. infinitesima

<u>Ricordi di Algebra</u> A = anello commutativo, I = Ideale $\Rightarrow A/I$ è un anello commutativo

se I è massimale A/I è un campo

$A = \text{Cauchy}(\mathbb{Q})$ I = succ. infinitesime.

$\Rightarrow$ posso definire $\lim_{n\to\infty} q_n = [q_n] = q_n + I$

<u>GENERALIZZANDO</u> preso X insieme infinito

definisco $\mathcal{F}(X,\mathbb{R}) = \{ f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ è una funzione} \}$

Cerco un ideale I massimale non principale.

<u>Esempio</u> $I(x_0) = \{ f : X \to \mathbb{R} \mid f(x_0) = 0 \}$ è principale

Prendo l'ideale di Frechet $I_F = \{ f : X \to \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0 \text{ su un insieme finito} \}$

$$\mathcal{F}(X,\mathbb{R}) / I_M \cong \mathbb{R}^*$$

$\Rightarrow$ posso definire $\lim_{x\uparrow\infty} f(x) = [f]$

notazione impropria è un infinito generico

Voglio vedere che vale il terzo assioma:

quindi prendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^*$ voglio definire

$f^*(\xi)$ con $\underset{[\varphi]}{\xi} = \lim_{x\uparrow\infty} \varphi(x) \Rightarrow f^*(\xi) := \lim_{x\uparrow+\infty} f(\varphi(x))$

OSS dovrei verificare che la definizione non dipende dalle $\varphi(x)$ che definiscono ξ (cioè $[f\circ\varphi] = [f\circ\psi]$ $\forall \varphi, \psi$ t.c. $\xi = [\varphi] = [\psi]$)

OSS in realtà dovrei anche usare $\mathcal{F}_0(X,\mathbb{R})$ invece che $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ dove $\mathcal{F}_0 = \{\varphi \in \mathcal{F} \mid \forall f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \ \varphi\circ f \in \mathcal{F}_0\}$ (NON SERVE SECONDO ME $\mathcal{F}$ ha già quella prop)

ESEMPIO Se $X=\mathbb{N}$ $\quad \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})/I_M = \{[x_n]\}$

Se I_M è gli infinitesimi $[\frac{1}{n}]_{inf} = [0]$

Se I_M è max ma non proprio $[\frac{1}{n}]_{I_M}$ è un infinitesimo $\neq [0]$

Analisi iperfinita

Def $F \subset \mathbb{R}^*$ si dice IPERFINITO se $F = \{\lim \varphi(x) \mid \lambda \in F_\lambda\}$ ↙ insieme finito.

ESEMPIO $\mathbb{R}^*$ come sopra, chiamo $\alpha = [n] = \lim_{n\uparrow\alpha} n$

"$\mathbb{N} \subseteq$" $F = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq \alpha\}$ dove $\mathbb{N}^* = \{[\varphi] \mid \varphi(n) \in \mathbb{N}\}$

$F = \{[\varphi] \mid \varphi(n) \in \mathbb{N}, \varphi(n) \leq n\} = \{[\varphi] \mid \varphi(n) \in \underbrace{\{0,\dots,n\}}_{F_n \text{ è finito}}\}$

UTILITÀ presa $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, considero

f^* l'estensione $\Rightarrow f^*|_F : F \to \mathbb{R}$

dico che $\exists \max_F f^* = \lim_{\lambda\uparrow\infty} f^*(\phi(\lambda))$

dove $f^*(\phi(\lambda)) = \max_{F_\lambda} f(\lambda)$ che esiste perché F_λ è finito

OBIETTIVO: Con $X = \mathbb{N}$ o $X = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ non è contenuto in un insieme iperfinito, ma se prendo X un campo con cardinalità pari al primo inaccessibile così ogni insieme accessibile è contenuto in un insieme iperfinito.

A questo punto abbiamo un $\mathbb{E}$
- $\mathbb{E}$ grande (cardinalità prima inaccessibile per X)
- soddisfa la numerosità

ASSIOMI STORICI CONTRASTANTI (su insiemi infiniti)

(i) ASSIOMA DI EUCLIDE: il tutto è più grande della parte

(ii) PRINCIPIO DI HUME: se $\exists f: A \to B$ biunivoca $\iff |A| = |B|$

Scelta di Cantor è (ii) e ottiene i $\boxed{\text{Cardinali}}$.
poi si accorse che non era abbastanza e si è inventato gli $\boxed{\text{Ordinali}}$

Vediamo cosa succede se scegliamo (i)

Def i numeri $\mathfrak{N}$ sono la parte positiva di un anello ordinato (tipo $\mathbb{Z}$)

Allora voglio costruire una funzione
$$n: A \longrightarrow \mathfrak{N} \quad \forall A \text{ insieme tc}$$
- se $A \subsetneq B \Rightarrow n(A) < n(B)$
- se $A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
- $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$

una teoria della numerosità è una teoria con le prop sopra

Aggiungo il quarto assioma alla definizione di $\mathbb{E}$

(4) $\eta \subseteq \mathbb{E}$

RICORDA $\quad card(\mathbb{N}^+) = \aleph_0 \quad Ord(\mathbb{N}^+) = \omega \quad num(\mathbb{N}^+) = \alpha$

<u>Vogliamo costruire adesso</u> $\mathbb{E} = \mathcal{F}_0(X, \mathbb{R}) / I_M$

Mettiamoci in una teoria insiemistica
dove esistono gli atomi $\mathbb{A}$ tutto ciò che non sono insiemi

insieme di tutti gli atomi

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{A}$ e la cardinalità di $\mathbb{A}$ è il primo inaccessibile

<u>Definisco la sovrastruttura su $\mathbb{A}$</u>

$$\mathbb{U} = V_\infty(\mathbb{A}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n(\mathbb{A})$$

universo

$$V_0(\mathbb{A}) = \mathbb{A}$$
$$V_{n+1}(\mathbb{A}) = V_n(\mathbb{A}) \cup \mathcal{P}(V_n(\mathbb{A}))$$

Prendo come $X = \mathcal{P}_{finite}(\mathbb{A})$

$(X, \subseteq)$ è un insieme diretto cioè

$\forall x, y \in X \quad \exists z \in X$ tc $\quad x \subseteq z$ e $y \subseteq z$

<u>Def</u> Dato $(D, \subseteq)$ diretto, $\varphi: D \to \mathbb{R}$ $\left(o\ (X, \tau) \text{ topologico} \right)$

$$\lim_D f(\lambda) = L$$

se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \lambda_0 \in D \quad \forall \lambda \geq \lambda_0, \quad |L - f(\lambda)| < \varepsilon$

Lezione 14

Titolo nota 21/11/2019

Come si definiscono i campi iperreali

Si prende $\mathbb{R}^* = \mathfrak{F}(X, \mathbb{R}) \big/ I_M$ $\quad I_M \supseteq \{ x \mid f(x) = 0 \ \forall x \in Q \}$

$\xi \in \mathbb{R}^*$ se $\xi = [\xi] = x + I_M$

Se ho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la estendo a $f^* : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$

con $f^*(\xi) = [f(\xi)]$ vedendo $\xi = \lim_{\varphi} \varphi(x)$

def Q è qualificato se $f(x) = 0 \ \forall x \in Q \Rightarrow [f] = 0$

$\Rightarrow [\varphi] = [\psi] \Leftrightarrow \varphi(x) = \psi(x) \quad x \in Q \Leftrightarrow$ due successioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ sono uguali se sono definitivamente

A noi ci basta un qualsiasi $\mathfrak{F}_0(X, \mathbb{R}) \overset{\text{sottoalgebra}}{\subset} \mathfrak{F}(X, \mathbb{R})$

cioè tc $\forall f \in \mathfrak{F}_0$ e $\forall \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \varphi \circ f \in \mathfrak{F}_0$.

Quindi $\mathfrak{F}_0(X, \mathbb{R}) \big/ I_M = \mathbb{R}^*$

Cerchiamo un campo iperreale che modellizzi bene la retta euclidea

Scegliamo $X = \mathcal{P}_{fin}(U)$ $\quad \underbrace{U = V_\infty(\mathbb{R})}_{\text{più o meno contiene tutta la matematica}}$ (U: sovrastruttura) $\left(\text{o } U = V_\infty(\mathbb{N}) \right)$

def Dato A insieme una sovrastruttura su A

$$V_0(A) = A$$
$$V_{n+1}(A) = \mathcal{P}(A) \cup V_n(A)$$
$$V_\infty(A) = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n(A)$$

Ma noi ESAGERIAMO: Prendiamo $\mathbb{A} > \mathbb{R}$ $\mathbb{A}$ insieme di alcuni cardinali non raggiungibili

$$\Rightarrow \quad X = \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{U}) \quad \text{con} \quad \mathbb{U} = V_\infty(\mathbb{A})$$

OSS $(X, \leq)$ è un insieme diretto, cioè $a, b \in X \Rightarrow a \cup b \in X$

Def $Q(\lambda_0) = \{ \lambda \in X \mid \lambda \geq \lambda_0 \}$ è un intorno dell'infinito $= \Lambda$

Def $\lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \varphi(\lambda) = L$ se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \lambda_0$ t.c. $\forall \lambda \in Q(\lambda_0) \Rightarrow |\varphi(\lambda) - L| < \varepsilon$

Prendo $I_{\lambda_0} = \{ \varphi \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R}) \mid \varphi(\lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in Q(\lambda_0) \}$ è un ideale

ma non è massimale

Quindi vuol dire che esistono altri intorno dell'infinito

Prendo $I_M \supset I_{\lambda_0}$ I_M ideale massimale.

OSS se facessi $\mathcal{F}(\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{U}), \mathbb{R}) / I_M$ è un po' troppo grande a garantire l'unicità.

Per risolvere

Prendo $\varphi \in \mathcal{F}$, $\exists A \in \mathbb{U}$ $\varphi(\lambda \cap A) = \varphi(\lambda)$ e lo chiamo $\mathcal{F}_0(\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{U}, \mathbb{R})$

Definisco $\mathbb{E} = \mathcal{F}_0(\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{U}), \mathbb{R}) / I_M$ (Lui scrive $\mathcal{F}_0(X, \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{U}))$ ma credo si sia confuso.)

con $\xi \in \mathbb{E}$ dove $\xi = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \varphi(\lambda) = [\varphi]$

Voglio vedere che su $\mathbb{E}$ sia ben definita la numerosità

Preso $E \subseteq \mathbb{E}$ $\quad n(E) = \lim_{\lambda \uparrow \Delta} \#(E \cap \lambda)$ $\quad$ con $\#$ = indico la cardinalità degli insiemi finiti.

se $E \cap F = \emptyset \Rightarrow n(E \cup F) = n(E) + n(F)$

DETTAGLIO: BISOGNA SCEGLIERE BENE I_M per avere $n(E \times F) = n(E) \cdot n(F)$.

Definisco $\alpha := n(\mathbb{N}^+)$

Def $\eta \subset \mathbb{N}^* \subset \mathbb{E}$ $\quad \mathbb{N}^* = \{ \xi = \varphi(\lambda) \mid \forall \lambda \ \varphi(\lambda) \in \mathbb{N}$ definitivamente$\}$

le numerosità

↳ è la copia dei naturali in $\mathbb{E}$

Sia $\mathcal{O}$ = l'insieme dei numeri ordinali

Voglio vedere che $\mathcal{O} \subset \eta$

Dove

- 0 è un numero ordinale
- se $a \in \mathcal{O}$ allora $\text{num}\{x \in \mathcal{O} \mid x < a\}$ è un numero ordinale

$\omega = \text{num}(\mathbb{N}) = \text{num}(\mathbb{N}^+) + \text{num}(\{0\}) = \alpha + 1$

ma $\alpha \notin \mathcal{O} \Rightarrow \mathcal{O} \subsetneq \eta$

OSS su $\mathbb{E}$ posso definire $\displaystyle\sum_{k \in K} a_k = \lim_{\lambda \uparrow \Delta} \sum_{k \in (K \cap \lambda)} a_k$.

Se pongo $a_k = 1$ $\quad \displaystyle\sum_{k \in K} a_k = n(K)$

Λ - LIMITE

Sia $V_\infty(\mathbb{R})$ mondo reale $\xrightarrow{*}$ $V_\infty(E)$ mondo esteso
estensione

$A \to A^* = \mathrm{supp}(\chi_A^*)$

$f \to f^*$

Voglio definire $\lim_{\lambda\uparrow\Lambda} A_n$ con $A_n \in V_{\textcircled{N}}(\mathbb{R})$
ess non ho preso $\underline{\underline{\infty}}$

So fare $\lim_{\lambda\uparrow\Lambda} a_n = [a_n]$ $\quad a_n \in V_0(\mathbb{R})$ (itero induttivamente)

$$\lim_{\lambda\uparrow\Lambda} A_n = \left\{ \lim_{\lambda\uparrow\Lambda} x_n \;\middle|\; x_n \in A_n \right\}$$ (ben definito perche $x_n \in V_{N-1}(\mathbb{R})$)

$$\lim_{\lambda\uparrow\Lambda}[a,b] = \left\{ \lim_{\lambda\uparrow\Lambda} x_n \;\middle|\; x_n \in A \right\} = [a,b]^*$$

Quindi dato $A \in V_\infty(\mathbb{R})$ gli associo $A^* = \left\{ \lim_{\lambda\uparrow\Lambda} a_\lambda \;\middle|\; a_\lambda \in A \right\}$

Dato A voglio costruire un insieme iperfinito contenente A

$$A^* \supset A^\circ = \left\{ \lim_{\lambda\uparrow\Lambda} x_n \;\middle|\; x_n \in (A \cap \lambda) \right\} \supset A$$ perché $\forall a \in A$ definitivamente $a \in \lambda$

<u>Esempio</u> <u>Th Weierstrass</u> $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$ f ha max e min.

<u>Dim</u> $\vee$ considero $f^* : \underbrace{[a,b]^\circ}$ $\to \mathbb{R}$

questo è un insieme iperfinito quindi essendo limite di insiemi finiti $\exists$ sicuramente il limite.

perché $\forall \lambda \quad \exists x_\lambda \in [a,b] \cap \lambda \quad f(x_\lambda) \geq f(y_\lambda) \quad \forall y_\lambda \in [a,b] \cap \lambda$

Prendo $\xi = \max_{x \in [a,b]^\circ} f^*$ $\Rightarrow$ dico che $x = st(\xi)$ è max di f

~~perchè~~ perchè dato che $[a,b]$ è chiuso e limitato $\Rightarrow x \in [a,b]$

per continuità di f $\quad st(f(\xi)) = f(x)$

quindi $\quad f(\xi) \geq f(y) \quad \forall y \in [a,b]$

$$\Rightarrow \underset{f(x)}{\underset{\parallel}{st}}(f(\xi)) \geq st(f(y)) = f(y)$$

LEZIONE 15

Titolo nota 04/12/2019

CAMPI IPERREALI

Sia X infinito, sia $\mathcal{F}_0(X,\mathbb{R})$ algebra di funzioni che rispetta la proprietà: $\forall \varphi \in \mathcal{F}_0$ e $\forall f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Rightarrow f \circ \varphi \in \mathcal{F}_0(X,\mathbb{R})$

Allora $\mathbb{R}^* = \mathcal{F}_0(X,\mathbb{R}) / I_m$ dove I_m è un ideale massimale.

$\Rightarrow \exists \; J: \mathcal{F}_0(X,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*$ tc $J(\varphi) = [\varphi] = \varphi + I_m$

Posso vedere la J come una specie di limite

$\lim_{\lambda \in X} \varphi(\lambda) = [\varphi]$

Teo: (no dim) se X ha la cardinalità del primo inaccessibile allora $\mathbb{R}^*$ che posso formare è unico.

Def una sovrastruttura su A insieme si indica con $V_\infty(A)$

$V_0 = A$ quindi elementi di A sono "Atomi."

$V_{m+1} = V_m(A) \cup \mathcal{P}(A)$

$V_\infty(A) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} V_m(A)$

Idea dell'analisi non-standard: Consideriamo 2 sovrastrutture, una su $\mathbb{R}$ e una su $\mathbb{R}^*$ e troviamo una mappa $*$ che le collega.

$* : V_\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow V_\infty(\mathbb{R}^*)$

in modo che ogni cosa vera in $V_\infty(\mathbb{R})$ sia vera in $V_\infty(\mathbb{R}^*)$ a patto di reinterpretarla.

La mappa $*$ viene definita ricorsivamente sulla struttura.

- AL LIVELLO 0 $\quad * : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$, $\lim_{\lambda \in X} \varphi(\lambda) = [\varphi]$
- AL LIVELLO $n+1$ presi $A_\lambda \in V_{n+1}(\mathbb{R})$

$$\lim_{\lambda \in X} A_\lambda = \left\{ \lim_{\lambda \in X} a_\lambda \mid a_\lambda \in A_\lambda \right\} \in V_{n+1}(\mathbb{R}^*)$$

quindi in generale $\lim_{\lambda \uparrow X} A = A^*$

Esempio $\quad \mathbb{R}^* = \left\{ \lim_{\lambda \uparrow X} x_\lambda \mid x_\lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Posso definire $\leq^*$ in $\mathbb{R}^*$ perché se

$$[\varphi] \leq^* [\psi^*] \iff \varphi(\lambda) \leq \psi(\lambda) \quad \forall \lambda \in X$$

Quindi dato $E \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow E^* = \{ \lim x_\lambda \mid x_\lambda \in E \}$

allora presa $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ corrisponde $f^* : E^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$

NOTAZIONE
i) $E \longrightarrow E^*$ si chiamano oggetti standard (sono le copie di un oggetto in $V_\infty(\mathbb{R})$ riletta in $V_\infty(\mathbb{R}^*)$) cose definite come limite di cose costruite.

ii) $E_\lambda \longrightarrow \lim_{\lambda \uparrow} E_\lambda$ interne: cose ottenute come limiti di cose standard

iii) oggetti non interni o esterni

Esempio se $X = \mathbb{N}$ $\quad \alpha = \lim_{n \in \mathbb{N}} n$ è interno

$\lim \sin(\cdot) = \sin^*(\cdot)$ è un oggetto standard

$\lim \sin(n \cdot) = \sin^*(\alpha \cdot x)$ è interno

$\sin(st(x)) : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ è esterna.

PRINCIPIO DI TRANSFER: Dimostrare una cosa in $V_\infty(\mathbb{R}^*)$ se è vera e il risultato è ottenibile come cose standard $\Rightarrow$ il risultato è vero anche in $V_\infty(\mathbb{R})$

SCELTA DI $\mathbb{R}^*$ (CAMPO NUMERI EUCLIDEI)

Prendo $X = \mathcal{L} = \mathcal{P}_{fin}(\Lambda)$ dove Λ = nostro universo = $V_\infty(\mathbb{A})$

$\mathbb{A}$ è un insieme che contiene $\mathbb{R}$ di cardinalità il primo inaccessibile

utile perché così $x = x^* \ \forall x \in \mathbb{R}$.

se identificassi x con le sue sezioni di Dedekind $\Rightarrow x \neq x^*$ (in realtà $x \subsetneq x^*$)

Quindi il nostro λ-limite diventa $\lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \varphi(\lambda)$

ACCORTEZZA: $(\Lambda, \leq)$ hanno una struttura ordinata

Quando devo scegliere I_M che sia coerente con quella dell'ordine su Λ

OSS gli intorni dell'infinito sono $Q(\lambda_0) = \{\lambda \in \mathcal{L} \mid \lambda \geq \lambda_0\}$

e quindi potrei fare il limite alla Cauchy

$$\lim_{\lambda \to \Lambda} \varphi(\lambda) = L \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \lambda_0 \in \mathcal{L}, \ \forall \lambda \geq \lambda_0 \quad |\varphi(\lambda) - L| < \varepsilon$$

MA questo non mi darebbe un ideale massimale $\Rightarrow \mathbb{R}^*$ sarebbe un anello, questo mi dice che la topologia indotta da un ideale massimale con cui ho definito il λ-limite è più ricco.

ESEMPIO $E \subset \Lambda \qquad E^* = \{\lim_{\lambda \uparrow \Lambda} x_\lambda \mid x_\lambda \in E\}$

Def un insieme F si dice iperfinito se insieme finito

$$F = \{\lim_{\lambda \uparrow \Lambda} x_\lambda \mid \forall_\lambda \ x_\lambda \in F_\lambda\} = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} F_\lambda$$

cioè è limite di cose finite

Def $E^\circ = \{\lim_{\lambda \uparrow \Lambda} x_\lambda \mid x_\lambda \in \overbrace{E \cap \lambda}^{\text{finito perché } \lambda \in \mathcal{P}_{fin}(\Lambda)}\}$ è iperfinito.

ovviamente poiché $\mathbb{R} \subset \Lambda \Rightarrow E \subset E^\circ$

inoltre per def $E^\circ \subset E^*$

Quindi posso definire $\mathbb{R}^\circ = \{ \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} x_\lambda \mid x_\lambda \in \mathbb{R} \cap \lambda \}$ è iperfinito

Teo di Weierstrass

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua ha max e min.

Dim sia $f^* : [a,b]^\circ \longrightarrow \mathbb{R}$ ha sicuramente max perché

f^* ha max $x_\lambda \in [a,b] \cap \lambda$ $\forall \lambda \in \mathcal{L}$ perché $[a,b] \cap \lambda$ è finito

$\Rightarrow \max_{[a,b]^\circ} f^* = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} x_\lambda = x_M$

Ma vorrei dimostrare che $\bar{x} = st(x_M)$ è il max per f su $[a,b]$

poiché $[a,b]$ è limitato $\Rightarrow$ $\bar{x}$ è limitato

poiché $[a,b]$ è chiuso $\Rightarrow \bar{x} \in [a,b]$

poiché f è continua $f(st(\bar{x})) = St(f(\bar{x}))$

Topologia in $\mathbb{R}^n$

DEF monade di x

$mon(x) = \{ y \in \mathbb{E}^n \mid y \sim x \}$

Galassia di x $gal(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid dist(x,y)$ è un numero finito$\}$

Def i) A è aperto se $\forall x \in A \Rightarrow mon(x) \subset A^*$

ii) F è chiuso se F^c è aperto

cioè $\forall x \in F^* \cap gal(0) \Rightarrow St(x) \in F$

iii) K è compatto $\iff$ $x \in K \Rightarrow st(x) \in K$

Dare una topologia su X è come dare una nozione di $\sim_x$ infinitamente vicino.

Teorema di Peano

$f(t,x)$ funzione continua di limitata $|f(t,x)| \le M$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \text{ammette una soluzione.}$$

costruisco una sol approssimata

IDEA DIM
$$\begin{cases} y(0) = x_0 \\ y(t_{j+1}) = y(t_k) + f(t_j, y(t_j))(t_{j+1} - t_j) \end{cases}$$

e mi serve Ascoli-Arzelà per provare il limite.

Negli iperreali considero $[0,T] \cap \lambda$ è finito li ho la compattezza quindi provare il limite è più semplice e alla fine la sol $X(t) = st(y(t))$ dove $y(t)$ è il mio limite sugli iperfiniti.

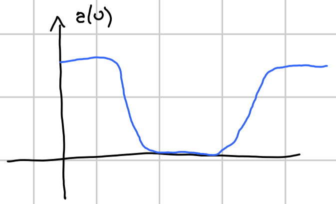
COSA INTERESSANTE ANCHE PRESA UNA f qualunque procedendo come prima posso dare un senso a una soluzione $x(t)$.

PROBLEMA: Tutto dipende dalla scelta di I_M.

PROBLEMA MODELLO

$$\min \int_0^1 a(u)|\nabla u|^2 - \lambda u \, dx \iff -\nabla \cdot [a(u) \nabla u] = \lambda$$

Con



Def Γ si dice griglia iperfinita se $\mathbb{R}^n \subset \Gamma \subset E^n$

(intera) si dice a

Def F è una funzione griglia se $F : \Gamma \longrightarrow E$ con Γ griglia iperfinita

Analizzo il problema $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

$\Rightarrow$ $u : \Gamma \to E$ $\quad \mathring{f} : \Gamma \to E$ con $\mathring{f} = f$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$

su $\Omega \cap \Gamma$ dove Ω è il dominio del problema

LEZIONE 16

Titolo nota 06/12/2019

$$J(u) = \int_\Omega \frac{1}{2} a(u)|\nabla u|^2 - f(u)\,dx$$

$$-\nabla[a(u)\nabla u] - \frac{1}{2}a'(u)|\nabla u|^2 = f'(u)$$

$$J'(u)[v] = \int_\Omega a(u)\nabla u \nabla v + \frac{1}{2}a'(u)v|\nabla u|^2 - f'(u)v\,dx \qquad v \in C_0^\infty$$

Se $a>0$ nessun problema di positum

Idea prendo una griglia Γ $\mathbb{R}^N \subset \Gamma \subset \mathbb{E}^N$ in modo tale che Γ sia iperfinito

$$\Rightarrow \Gamma = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} (\mathbb{R}^N \cap \lambda) = \{\lim x_\lambda \mid x_\lambda \in \mathbb{R}^N \cap \lambda\} \quad \lambda \in \mathcal{P}_{fin}(\Lambda)$$

<u>Def</u> $\mathcal{G}(\Gamma)$ = funzioni interne definite su Γ

presa $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^N) \xrightarrow[\text{estendo con } *]{*} f^* \in \mathfrak{F}(\mathbb{E}^N) \xrightarrow{\text{restringo a } \Gamma} f^\circ = f^*|_\Gamma$

cioè $\forall x \in \Gamma \quad f(x) = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} f_\lambda(x_\lambda)$ dove $x = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} x_\lambda$

Esempio $\sigma_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in a \in \Gamma \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad f(x) = \sum_{a \in \Gamma} f(a)\sigma_a(x)$

Sia V $\mathcal{D} \subset V \subset L^1$ un spazio

esempio $V = C^1_c$

Def uno spazio di ultra funzioni modellato su V (o per precisione su V_λ) è uno spazio tc esiste un isomorfismo

$$o : V_\Lambda \longrightarrow V^o$$

Così prendo $V_\lambda = \mathrm{span}(V \cap \lambda) \Rightarrow \bigcup V_\lambda = V$ ha dimensione iperfinita

oss V_Λ ha dimensione iperfinita ma non è iperfinito come insieme ma $\lim_{\lambda \uparrow \Lambda} V_\lambda = V_\Lambda$

$$V \subset V_\Lambda \subset V^* = \left\{ \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} f_\lambda \;\middle|\; f_\lambda \in V \right\} = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} V$$

$$V_\Lambda = \left\{ \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} f_\lambda \;\middle|\; f_\lambda \in \mathrm{span}(V \cap \lambda) \right\}$$

$$V^o = \left\{ f|_\Gamma \;\middle|\; f \in V_\Lambda \right\}$$

esempio Se $V = C^1_c$ se $u \in V^o$ $\quad u = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} u_\lambda \quad u_\lambda \in V$

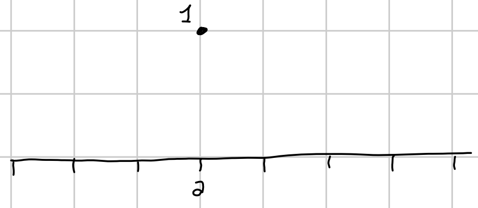
integrale generalizzato.

$$\oint u \, dx = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \int u_\lambda \, dx$$

$$\sigma_a(x) = \left(\chi_{\{a\}}\right)^o$$

posso vederla anche

$$\sigma_a(x) = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \sigma_{a,\lambda}(x), \quad \sigma_{a,\lambda} \in C^1_c$$



$$\Rightarrow \oint \sigma_a(x)\, dx = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \int \sigma_{a,\lambda}(x)\, dx \neq 0$$

Perchè definitivamente sarà diverso da 0 tendendo a 1

mentre $\int \chi_{\{a\}} \, dx = 0$

Def integrale generalizzato

$$\Rightarrow \quad \oint u(x)\,dx = \sum_{a\in\Gamma} u(a) \underbrace{\oint \sigma_a(x)\,dx}_{= d(a)} = \sum_{a\in\Gamma} u(a)\, d(a)$$

Def Derivata generalizzata

$$u = \lim u_\lambda \qquad u_\lambda \in C_0^1$$

$$\underset{\text{generalizzata}}{D_i u(x)} = \lim_{\lambda\uparrow\Lambda} \underset{\text{derivata vera}}{\partial_i u_\lambda(x_\lambda)} \qquad \text{con } x = \lim_{\lambda\uparrow\Lambda} x_\lambda$$

L'isomorfismo $o: V_\Lambda \longrightarrow V^o$ lo posso vedere come limite di isomorfismi tra

$$V_\lambda \xrightarrow{o_\lambda} \mathfrak{F}(\Gamma_\lambda) \cong \mathbb{R}^n$$

preso $f \in V_\lambda$ con $\dim V_\lambda = n$ $\quad \Gamma_\lambda = \{a_1, ---, a_n\}$

$$\Rightarrow \quad o_\lambda(f(x)) = (f(a_1), ---, f(a_n))$$

per vedere che o_λ è iso fisso $e_1 --- e_n$ base di V_λ e base canonica in arrivo e faccio vedere che

$$\det \begin{pmatrix} e_1(a_1) & & e_n(a_1) \\ \vdots & & \vdots \\ e_1(a_n) & & e_n(a_n) \end{pmatrix} \neq 0$$

<u>oppure</u> munisco V_λ di un prodotto scalare $\langle f, g\rangle = \int f \cdot g \, dx$

Vorrei definire un δ_a su V_λ cioè $\quad \underbrace{\int \delta_a(x) f(x)}_{= \langle \delta_a, f\rangle} = f(a)$

e oltre che $\delta_a \in V_\lambda$

Sia $e_1(x) \dots e_m(x)$ una base ortonormale di V_λ

$$\Rightarrow \quad \delta_a(x) = \sum_{h=1}^{m} e_h(a)\, e_h(x)$$ dico che δ_a fa quello che voglio

$$\int \delta_a(x)\, f(x)\,dx = \sum_{h=1}^{m} e_h(a) \int e_h(x)\, f(x)\,dx =$$

$$= \underbrace{\sum_{h=1}^{m} e_h(a)\, f_h}_{= f(a)}$$ dove $f = \sum_{n=1}^{m} f_n\, e_h(x)$

$\Rightarrow \quad \{\delta_{a,\lambda}(x)\}_{a \in \mathbb{R}^n}$ generano $V_\lambda \Rightarrow$ ne estraggo una base $\{\delta_{a,\lambda}(x)\}_{a \in \Gamma_\lambda}$

insieme di punti

$$\int f(x)\,\delta_{a,\lambda}(x) = f(a)$$

$$f(x) = \sum_{a \in \Gamma_a} \left[\int f(x)\, \delta_{a,\lambda}(x)\,dx \right] \sigma_{a,\lambda}(x)$$

$\Rightarrow \quad \delta_a(x)$ e $\sigma_{a,\lambda}(x)$ sono una una base duale dell'altra.

perché $\quad \langle \delta_a(x), \sigma_{a',\lambda}(x) \rangle = \delta_{aa'}$

<u>In sintesi</u>

$V^0 \qquad C^1_c \qquad x \quad f \in C^1_c \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &\oint f^\circ\,dx = \int f \\ &D f^\circ(x) = \partial^* f(x) \end{aligned}\right\}$$ sulle cose standard le operazioni generalizzate coincidono.

Esempio

minimizzare $\int \frac{1}{2} |\nabla u|^2 dx - \langle \delta_0, u \rangle$

corrisponde a risolvere $-\Delta u = \delta$ nel mondo delle distribuzioni passando alla trasformata di Fourier.

Lo vedo con l'analisi non standard come il funzionale definito da

$$\underbrace{\int \frac{1}{2} |\overset{\text{derivata generalizzata}}{D} u|^2 dx}_{} - u(0)$$

coercitivo (da dimostrare) perché una forma bilineare simmetrica definita positiva quindi il minimo esiste.

Abbiamo quindi definito

$\oint : V^\circ \to \mathbb{E}$ tc se $f \in V$ $\oint f dx = \int f(x) dx$

$D : V^\circ \to V^\circ$ tc $f \in V \Rightarrow D f^\circ(x) = (\partial f(x))^\circ$

Problema $u \cdot v$ $\oint uv\, dx = \lim \int \underbrace{(uv)_\lambda}_{\in V_\lambda} dx \overset{?}{=} \lim \int \underset{\in V_\lambda}{u_\lambda} \underset{\in V_\lambda}{v_\lambda} dx$

? VALE se $u_\lambda \cdot v_\lambda = (u \cdot v)_\lambda$ definitivamente perché V_λ non è un'algebra.

definisco quindi $\langle u, v \rangle := \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \oint u_\lambda v_\lambda \, dx$

LEZIONE 17

Titolo nota 06/12/2019

Def Data $\Gamma = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \Gamma_\lambda$ dove $\Gamma_\lambda = \lambda \cap \mathbb{R}^n$

una griglia iperfinita, sia $u(x) = \lim_{\lambda \cap \Lambda} u_\lambda(x_\lambda)$ $x_\lambda \in \Gamma_\lambda$, $x \in \Gamma$

una funzione interna

Allora $\mathcal{G}(\Gamma)$ sono tutte le funzioni interne definite su Γ

quindi ogni $f \in \mathcal{G}(\Gamma)$ si può scrivere come $f(x) = \sum_{a \in \Gamma} f(a)\, \sigma_a(x)$

dove $\sigma_a(x) = \begin{cases} 1 & x = a \in \Gamma \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Sia $V = C^1_c$

$V = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ $V_\lambda = \operatorname{span}(V \cap \lambda)$ sono tutti sottospazi di dimensione finita di V al variare di λ in Λ.

$\exists$ una mappa $\circ : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{G}(\Gamma)$

$f \longrightarrow f^\circ(x) = f^*|_\Gamma$

Definisco $V_\Lambda = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} V_\lambda$ è lo spazio vettoriale di dimensione iperfinita interno

Allora trovo un isomorfismo $\circ : V_\Lambda(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{G}(\Gamma) \equiv V^\circ$, con inversa φ

Questo serve a poter definire delle operazioni su V° in modo che ristrette a V coincidano

Ad esempio volendo definire un integrale sulle funzioni griglia

$$\oint \underset{\substack{\downarrow \\ u(x) \in \mathcal{G}(\Gamma)}}{u(x)}\,dx = \underset{\downarrow}{\int^{*}} \varphi\big(\overset{\substack{u^*(x) \\ \parallel}}{u(x)}\big)\,dx = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \int \overset{\substack{V_\lambda \\ \in}}{u_\lambda(x)}\,dx$$

operatore integrale estensione naturale su $\mathbb{E}^n$ dell'integrale su $\mathbb{R}^n$

Quindi se $f \in V \Rightarrow \oint f^{\circ} dx = \int f dx$

oss Questo non è vero per una funzione qualsiasi in V°

infatti preso $\sigma_a(x)$ $\quad \oint \sigma_a(x)\,dx = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \int \underset{\substack{\cap \\ V_\lambda}}{\sigma_{a,\lambda}(x)}\,dx \geq 0$

se approssimo una funzione che vale 1 in un punto e 0 altrove queste $\sigma_{a,\lambda} \geq 0$ definitivamente

Mentre $\displaystyle\int^{*} \varphi(\sigma_a(x))\,dx = 0$

Quindi abbiamo una funzione integrale

$$\oint : V^{\circ} \longrightarrow \mathbb{E} \quad \text{t.c.} \quad \forall f \in V \Rightarrow \oint f^{\circ} dx = \int f dx$$

Prop. $\displaystyle\oint_{\Omega} u(x)\,dx = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \int_{\Omega} u_\lambda(x)\,dx$ (Ω deve essere interno altrimenti la def. non è ben posta)

Ω in realtà è $\Omega^* \cap \Gamma$

$$\oint \sum_{a \in \Gamma} u(a)\sigma_a(x)\,dx = \sum_{a \in \Gamma} u(a)\,d(a) \qquad d(a) = \oint \sigma_a(x)\,dx = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \int \sigma_{a,\lambda}(x)\,dx$$

Sugli spazi V_λ che sono di dimensione finita il prodotto scalare di L^2 $\quad \langle u, v \rangle = \int u v \, dx$ è un vero prodotto scalare che quindi dà una struttura Hilbertiana a V_λ

Quindi Posso definire

$$\langle , \rangle : V^0 \times V^0 \longrightarrow \mathbb{E}$$

$$\langle u, v \rangle = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \int u_\lambda v_\lambda \, dx$$

Problema $\quad \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \int u_\lambda v_\lambda \, dx \underset{?}{=} \oint u v \, dx = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \int (uv)_\lambda \, dx$

Non sempre $u_\lambda \cdot v_\lambda = (uv)_\lambda$ perché V_λ non è un'algebra

Vogliamo definire una derivata:

Idea 1: $\quad Df(x) = \partial^* f^*(x) \Big|_\Gamma$ PROBLEMA: Così facendo non è più un'operazione antisimmetrica quindi non funziona con lo senso di derivata negli integrali

Soluzione $\quad Du(x)$ è quella funzione in V^0 t.c. $\forall v \in V^0$

$$\langle Du(x), v \rangle = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \int \partial u_\lambda v_\lambda \, dx$$

ESEMPIO Se $f \in V$ e $\partial f \in V$ scelgo $v = \delta_a(x) \in V^0$

$$\langle Df^0(x), \delta_a(x) \rangle = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \int \partial f_\lambda(x) \, \delta_{a,\lambda}(x) = \partial f(a)$$

$\Rightarrow$ la nuova def coincide con la vecchia

Fenomeno di Laurenti

$$J(u) = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}\left(1-(\partial u)\right)^2 + u^2\right] dx \quad + \text{DBC}$$

$J(u_1) > J(u_2) > \dots$

$u_n \longrightarrow 0$ unif

$J(u_n) \longrightarrow 0$

ma $J(0) = 1$

trasporto il problema nelle ultra funzioni

$$J(u) = \frac{1}{2} \langle (1-Du), (1-Du) \rangle + \langle u, u \rangle \quad \text{(e poi bisogna perdere)}$$

Problema: $V = C_c^1(\mathbb{R})$ ha dei limiti

nel senso delle distribuzioni

Soluzione $\quad V = L^\infty \cap BV \quad$ dove $f \in BV \Leftrightarrow \partial_i f \in \mathcal{M}$

è una misura Boreliana

$$\Rightarrow \langle D_1 u, v \rangle = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \int \partial u_\lambda \, v_\lambda \, dx = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \int v_\lambda \, d(\partial u_\lambda)$$

dove

in modo tale che $f \in V \Rightarrow Df \in V$

ma in questo caso f non sono più definite puntualmente.

Se $f \in \mathcal{L}^1$ e $[f] \in L^1$

esiste un modo di definirla puntualmente?

Scelgo $$f(x) = \underbrace{\lim_{R \to 0} \frac{1}{m(B_R)} \int_{B_R(x)} f(y)\,dy}$$

Teo di Lebesgue questo limite esiste per q.o. x

se $f \in \mathcal{L}^1$

Def un punto x che mi fa quel piacere si chiama punto di Lebesgue.

Esiste un modo di definire $f(x)$ negli x non di Lebesgue in modo tale che le f estese in quel modo formino uno spazio vettoriale?

Fisso η un infinitesimo, $\forall x$ punto non di Lebesgue (es. $\eta = \frac{1}{\alpha}$ $\alpha = n(\mathbb{N})$)

$$f(x) := st \left[\frac{1}{m^*(B_\eta(x))} \underbrace{\int_{B_\eta(x)} f^*(y)\,dy} \right]$$

f è L^∞ per fare in modo che non sia $+\infty$ il valore di $f(x)$

Per avere buone definizioni di D o di $\oint$ meglio non

$V = BV \cap L^\infty_{comp}$ per poter scrivere meglio

Dato un funzionale $\phi_\lambda : V_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}$ ha senso definire

$$\tilde{\phi} = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \phi_\lambda$$

$\forall v \in V^\circ$

$$< \tilde{\phi}, v > = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} < \phi_\lambda, v_\lambda >_\lambda \underset{\exists u_\lambda \in V_\lambda \text{ tc}}{\overset{\text{Teo di Riesz media fonti (sono in } V_\lambda)}{=}} \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \int u_\lambda v_\lambda \, dx$$

<u>Un esempio sono le misure.:</u>

data μ misura in V definisco un'altra funzione su V° $\tilde{\mu}$

$$< \tilde{\mu}, v > = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \int v_\lambda \, d\mu$$

<u>Data</u> $\chi_\Omega \, dx$ $\quad v \longrightarrow \int v \, \chi_\Omega \, dx = \int_\Omega v \, dx$

ha senso $< \tilde{\chi}_\Omega, v > = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \int_\Omega v_\lambda dx = \oint_\Omega v \, dx$

quindi l'integrale esteso a Ω è definito come dualità.

<u>Domanda</u> $\exists \, \vartheta_\Omega \in V$ tc $\vartheta^\circ_\Omega \in V^\circ$ $\vartheta^\circ_\Omega = \tilde{\chi}_\Omega$

LEZIONE 18

Titolo nota 10/12/2019

Scelta dello spazio V buono su cui fare le ultrafunzioni in modo tale che siano ben definite le operazioni $\oint$, $\langle , \rangle$, D_i

$$V = BV \cap L^\infty_{loc}$$

Ma queste sono funzioni definite quasi ovunque mentre nelle ultrafunzioni contano i punti, Allora definisco

$$\bar{u}(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} u(y)\,dy$$

Ma questo limite non esiste sempre ma se $u \in L^\infty_{cont.}$ l'argomento del limite è limitato $\forall r$

Quindi una strada sarebbe quella di prendere delle sottosuccessioni convergenti ma la scelta non sarebbe arbitraria (dovrei porre dall'Assioma di Scelta). Risolvo con una scelta coerente fissando un infinitesimo η e definisco

$$\bar{u}(x) := st \frac{1}{m(B_\eta(x))} {}^{*}\!\!\int_{B_r(x)} u(y)\,dy$$

Quindi prendo come $V = \{ u \in BV \cap L^\infty_c \mid u(x) = \bar{u}(x) \}$

spazio delle funzioni epilogiche

ovvero considero $\Pi : \mathcal{L}^\infty \longrightarrow V$ $\underline{os}$ se $u \in V_\lambda$ e $\int u^2 = 0 \Rightarrow u = 0$

$\Pi_\lambda : \mathcal{L}^1_{loc} \longrightarrow V_\lambda$

Fissata $\{e_i\}_{i=1}^{m_\lambda}$ base di V_λ $\Pi_\lambda u(x) = \sum_{k=1}^{m_\lambda} \left(\int u(y)\, e_k(y)\,dy \right) e_k(x)$

Es se $f \in \mathcal{L}^\infty \Rightarrow f = \bar{f} + h$ con $\int h = 0$

$$\oint f^\circ dx = \oint \bar{f}^\circ dx + \oint h\, dx \underset{\substack{\downarrow \\ \bar{f}^\circ \in V}}{=} \int f\, dx + \oint h^\circ dx$$

Def $\tilde{f}$ è la funzione t.c. $\forall u \in V$

Π_λ è una proiezione

$$\langle \tilde{f}, u \rangle = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \int f_\lambda v_\lambda \overset{v_\lambda \in V_\lambda}{=} \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \int f_\lambda \Pi_\lambda u_\lambda\, dx = \lim \int \Pi_\lambda f_\lambda u_\lambda\, dx =$$

$$= \langle \underset{\bar{f}}{\underset{\shortparallel}{\Pi f}}, u \rangle$$

Quindi la derivata

$$\langle D_i u, v \rangle = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \int \Pi(\partial_i u)_\lambda v_\lambda\, dx = \langle \tilde{\partial_i u}, v \rangle = \langle \Pi \partial_i u, v \rangle$$

Quindi $D_i = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \Pi_\lambda \partial_i$

la derivata di una funzione BV può essere una misura ma la proiezione Π_λ mi restituisce un'altra funzione.

Def u si dice di tipo distribuzione se $\exists T \in \mathcal{D}'$

$$\langle u, \varphi^\circ \rangle = \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

si dice quasi-tipo distribuzione se

$$\langle u, \varphi^\circ \rangle \sim \langle T, \varphi \rangle$$

PER IL TEO DI RIESZ IN DIM FINITA

Esempio $\langle \delta_a, v \rangle = v(a) \quad \forall a \in \Gamma$

$\forall \lambda \quad \exists \delta_{a,\lambda} : \int \delta_{a,\lambda}(x) v_\lambda(x) = v_\lambda(a)$

e $\delta_{a,\lambda}(x) = \sum_{k=1}^{\mu_\lambda} e_k(a) e_k(x)$

Mi chiedo se esiste sempre un u di tipo distribuzione tale che preso $T \in \mathcal{D}'$

$$\langle u, \varphi^\circ \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

si prende u t.c. $\forall v \in V$ $\langle v, v \rangle = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \langle T, P_\lambda v_\lambda \rangle$

Approssimazione tramite funzioni C_c^∞

dove $P_\lambda : V_\lambda \longrightarrow V_\lambda \cap \mathcal{D}$

in modo tale che $\forall \varphi \in \mathcal{D} \cap V_\lambda$ $P_\lambda \varphi = \varphi$

$$\Rightarrow \quad \langle v, \varphi^\circ \rangle = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \langle T, \varphi_\lambda \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

mi chiedo quali sono le ultrafunzioni a cui è possibile associare delle distribuzioni:

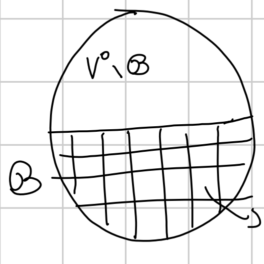
Ad esempio se α è un numero infinito $\langle \alpha \delta_a, \varphi \rangle = \alpha \varphi(a)$ non è finito

$$\text{Sia } \mathcal{B} = \{ u \in V^\circ \mid \forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle u, \varphi^\circ \rangle \text{ è finito} \}$$

$\forall u \in \mathcal{B}$ chiamo $T_u \in \mathcal{D}'$

$$\langle T_u, \varphi \rangle = st \langle u, \varphi^\circ \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle T_u, \varphi \rangle = \langle v, \varphi^\circ \rangle + \varepsilon_\varphi$$

Idea



classi di equivalenza con rapp. T_u a meno di infinitesimi.

(Teo imp. SCHWARZ)

Problema: $\nexists$ su un algebra differenziale non può mai valere la legge di L.

Però si può chiedere che ① $\text{supp}\, \sigma_a(x) \subset \text{non}(a)$ } località della derivata.

$\Rightarrow$ si ottiene $\text{supp}\, D_i(\sigma(a)) \subset \text{non}(a)$

② $D_i : V^0 \longrightarrow V^0$ (ho chiesto le funzioni a supp. cpt quindi non ho la costante)

$D_i u = 0 \iff u = 0$

$\Rightarrow D_i$ è invertibile $\ker D_i = \{0\}$

<u>Cose a caso:</u>

Sia $x \in \mathbb{R}^n$

$u(x) = \lim\limits_{\lambda \uparrow 1} u_\lambda(x)$ sia $w(x) = \begin{cases} \text{st } u(x) & \text{se } u(x) \text{ è finita} \\ 0 & \text{se } u(x) \text{ è infinita} \end{cases}$

$u(x) = \underbrace{w^0(x)}_{\text{parte funzionale di } u(x)} + \underbrace{\psi(x)}_{\text{parte singolare di } u(x)}$

<u>Esempio</u> se $u(x) = \delta_a(x) \Rightarrow w^0(x) = 0$

Caso semilineare

$$\begin{cases} u_t = -Lu + f(u) \\ u(0,x) = u_0(x) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

$$e^{Lt}(u_t + Lu) = e^{Lt} f(u)$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{Lt} u(t,x)\right) = e^{Lt} f(u)$$

$$e^{Lt} u(t,x) - u_0(x) = \int_0^t e^{Ls} f(u(s,x))\, ds$$

$$u(t,x) = e^{-Lt}\left(u_0(x) + \int_0^t e^{Ls} f(u(s,x))\, ds\right)$$

LEZIONE 19

Titolo nota 11/12/2019

Problemi di tipo parabolico

esempio: $\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } [0,T]\times\Omega \\ u_n\big|_{\partial\Omega} = 0 & \text{in } \partial\Omega\times[0,T] \end{cases}$ oppure $u_t = -Lu$ con L lineare, autoaggiunto con spettro positivo.

$\{e_k\}_{k\geq 0}$ base spettrale

$L e_k = \lambda_k e_k \qquad \lambda_k \geq 0$

$$u(t,x) = e^{-Lt} u_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda_k t} u_{0k}$$

u_{0k}: coeff di fourier di u_0

Consideriamo il problema

$$u_t = \Delta_x u + f(u) \Rightarrow \underbrace{u(t,x) = e^{-Lt} u_0 + \int_0^t e^{-L(t-s)} f(u(s,x))\,ds}_{\text{Problema di punto fisso}}$$

1) chiediamo $|f'(s)| \leq M$

$\Rightarrow$ per Lipschitz $f(u)$ è un operatore continuo da H^1 in H^1

infatti

$$\underbrace{\int |\nabla f(u)|^2}_{\| f(u)\|_{H^1}} = \int |f'(u)\nabla u|^2 \leq \int |f'(u)|^2 + \int |\nabla u|^2 < +\infty$$

perché f' è limitata e $u \in H^1$

Quindi lo spazio giusto per il problema di punto fisso è

$$C^0\left([0,T], H^1(\Omega)\right)$$

$e^{-L(t-s)}$ è continuo e lineare $\Rightarrow$ Lip.

$f(u)$ " e lip per la richiesta su $|f'| \leq M$

$\Rightarrow$ per il lemma delle contrazione trovo un punto fisso.

poi derivando in t ci si accorge che

$$u \in C^0([0,T], H^1(\Omega)) \cap C^1([0,T], L^2(\Omega))$$

Problema con i tempi negativi

$$\begin{cases} u_t = -\Delta u \\ + BC \end{cases} \Rightarrow u(t,x) = e^{Lt} u_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{e^{\lambda_k t} u_{0,k}}_{\text{questa somma diverge}}$$

quindi mi chiedo se posso avere senso come distribuzione

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle u(\cdot, t), \varphi \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{\lambda_k t} u_{0,k} \varphi_k$$

o non non abbastanza da non rendere convergente la serie.

Mi traduco il problema nelle autofunzioni

$$\begin{cases} u_t = -D^2 u \\ + BC \end{cases} \Rightarrow \text{prendo una base } \{e_k\}_{k \le \dim(V^0)}$$

se k è standard $\Rightarrow e_k$ sarà l'autofunzione standard

se k è interno $\Rightarrow e_k^0 = \tilde{e}_k$ è l'autofunzione.

$$\Rightarrow u(t,x) = e^{Lt} u_0 = \sum_{k=0}^{\dim V^0} e^{+\lambda_k t} u_{0,k}(x)$$

Poiché il problema che vogliamo affrontare con condizioni alla Cauchy (problema di evoluzione) lo spazio giusto dove affrontare le cose è

$$\mathcal{C}^1([0,T], V^0) :=$$

$$= \left\{ u|_{[0,T]^* \times \Omega} \;\middle|\; u(t,x) = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} u_\lambda(t,x) \quad u_\lambda \in C^1([0,T], V_\lambda) \right\}$$

Quindi l'equazione diventa

$\partial_t^* u = -D^2 u(a)$ $\xrightarrow{}$ ma nella griglia la derivata è come una matrice

$$= \sum_{k=1}^{\dim V^0} -(D^2)_{a,k}\, u(k) \qquad Du(a) = \sum_b D_{a,b}\, u(b)$$

con $D_{a,b} \neq 0 \iff a \sim b$ perché la derivata è una def locale.

RICORDO una legge di conservazione è una cosa del tipo: $\partial_t u = \nabla \phi(x, u, \nabla u \ldots)$

Invece di inserire le condizioni di Neumann posso scrivere l'eq. come

$$\partial_t^* u = -D[\chi_\Omega^* Du]$$

la derivata è autoaggiunta

$$\Rightarrow \quad \langle \partial_t^* u, \tilde{1} \rangle = \langle -D[\chi_\Omega^* Du], \tilde{1} \rangle =$$

0 se Ω è limitato perché $D\tilde{1} = 0$

$$= -\langle \chi_\Omega^* Du, D\tilde{1} \rangle =$$

Ma se $\int u$ si conserva e $u(t,x) \to +\infty$ cos'è che va all'infinito?

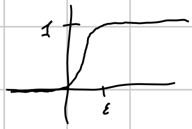
$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 \langle u, u \rangle = 2\langle u_t, u \rangle = 2\langle -D^2 u, u \rangle =$$

$$= 2\langle Du, Du \rangle > 0 \Rightarrow \text{la norma } L^2 \text{ cresce sempre.}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \lim_{|\Lambda| \to 1} \int u_1 u_1\, dx = \lim_{|\Lambda| \to 1} 2 \int (\partial_t u_1) u_1$$

Voglio essere sicuro che una soluzione non scenda nei negativi se parte da una u_0 positiva

Fisso un ε infinitesimo e $H(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u \geq \varepsilon \\ 0 & \text{se } u \leq 0 \end{cases}$



Allora la mia equazione diventa

$$\partial_t^* u = -D\left(\chi_\Omega(x)\, H(u)\, Du\right)$$ è quasi lineare.

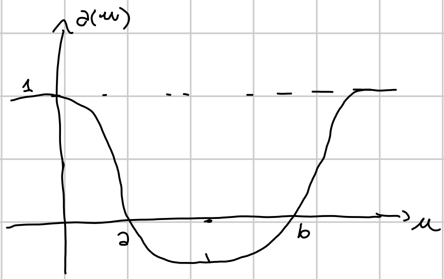
$$\frac{d}{dt}\oint u = \langle u_t, \tilde{1} \rangle = \langle -DK(x,u)\,Du, \tilde{1} \rangle =$$
$$= \langle K(x,u)\,Du, D\tilde{1} \rangle = 0$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^* \langle u, u \rangle = 2\langle u_t, u \rangle = 2\langle -DK(x,u)\,Du, u \rangle =$$
$$= \langle K(x,u)\,Du, Du \rangle \geq 0$$

$\Rightarrow$ La norma in L^1 è costante mentre in L^2 cresce sempre.

<u>OSS</u> Il problema dell'eq del calore con i tempi negativi non è interessante fisicamente, ma esistono problemi simili molto studiati

<u>Esempio</u> $\begin{cases} u_t = D[a(u)\,Du] \\ + BC \end{cases}$



<u>Idea</u> u rappresenta la densità di particelle minime

se u è grande $\Rightarrow a(u) \sim 1 \Rightarrow u_t = D^2 u$ tendono a spargersi

se u è circa 0 $\Rightarrow a(u) \sim 1 \Rightarrow$ tendono a sparpagliarsi perché non si toccano se $a \le u \le b$ $\Rightarrow$ tendono a rimissi.

Aggiungendo condizioni di N.

$$\begin{cases} u_t = D\left[a(u)\, \chi_\Omega(x)\, Du\right] \\ + BC \end{cases}$$

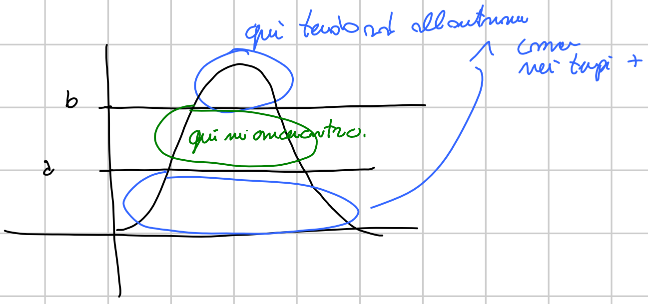
se parto da una sol. tipo

Studio il problema stazionario $D[a(u)\, \chi_\Omega(x)\, Du] = 0$

una possibile sol è preso $E \subset \Omega$

$u = b\, \chi_E(x)$

se $m^*(E) \cdot b = M = \int_\Omega u_0$



LEZIONE 20

Titolo nota 12/12/2019

sia T un operatore abbiamo visto che esiste u_T

tc

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle u_T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

derivata generalizzata

$\varphi \in \mathcal{S}$ quindi la $\partial_i = D_i$

$$\langle \partial_i T, \varphi \rangle = \langle T, \partial_i \varphi \rangle = \langle u_T, \partial_i \varphi \rangle = \langle u_T, D_i \varphi \rangle = \langle D_i u_T, \varphi \rangle$$

$$C^{-\infty} = \{ T \mid T = \partial^{k+1} f \} \quad \text{distribuzioni di SCHWARZ}$$

Il suo generalizzato è $\{ u_T \mid u_T = D^{k+1} f \}$

<u>Equazione delle onde non lineari</u>

$$u_{tt} - \Delta u + f(u) = 0 \qquad f(u) = |u|^{p-2} u \qquad p < p^*$$

Verifichiamo che c'è la conservazione dell'energia

$$u_{tt} \cdot u_t - \Delta u \, u_t + f(u) u_t = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} u_t^2 - \int \Delta u u_t + \frac{d}{dt} \int F(u) = 0$$

(supponendo u a supp. cpt in modo da poter scrivere le derivate

$$\frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} u_t^2 + \int \nabla u \nabla u_t + \frac{d}{dt} \int F(u) \, dt = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int \underbrace{\frac{1}{2} u_t^2}_{\text{en. cin.}} + \underbrace{\frac{1}{2} |\nabla u|^2}_{\text{en. el.}} + \underbrace{F(u)}_{\text{energia esterna}} \right\} = 0$$

Nel mondo delle ultrafunzioni

problem $\int |\nabla u|^2 dx$

$\langle Du, Du \rangle = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \int \Pi_\lambda \partial u_\lambda \, \Pi_\lambda \partial u_\lambda \, dx$

$\lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \int \Pi_\lambda |\nabla u_\lambda|^2 dx$

ma sono uguali solo nel caso in cui u sia regolare.

chi gli associo?

Idea: la scelta è indifferente poiché come nella teo. degli sp. di Sobolev se riesco a regolarizzare la sol. ho mostrato che davvero la scelta era indifferente.

LAPLACIANO GENERALIZZATO

$u_{tt} - \Delta u + f(u) = 0 \qquad u \in C^1([0,T]^*, V_\lambda)$

tempo rimane continuo

discretizzo lo spazio

∂t^* (è come avere un sistema dinamico Hamiltoniano)

moltiplico per u_t e integro

parte problematica

$$\frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} u_t^2 dx - \oint \Delta u \, u_t dx + \frac{d}{dt} \int F(u) dx$$

$D \to \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \Pi_\lambda \nabla$

Δu VA sostituito con $\operatorname{div} \nabla u = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \nabla \Pi_\lambda \nabla u_\lambda$

$$\Rightarrow \oint \operatorname{div} \nabla u \, u_t = \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \int \nabla \Pi_\lambda \nabla u_\lambda \, u_{\lambda t} dx =$$

$$= \lim_{\lambda \uparrow \Lambda} \int \Pi_\lambda \nabla u_\lambda \, \nabla u_{\lambda t} = \oint Du \, Du_t = \frac{d}{dt} \oint \frac{1}{2} |Du|^2$$

oppure ho un operatore D. posso usare il teo della div. per dire che div è l'operatore Duale del gradiente

$$\oint \vec{\phi} \, D\vec{v} = \oint \operatorname{div} \phi \, \vec{v}$$

Particolari eq.

eq. di diffusione

sorgente

$$u_t = \nabla\left[\phi(x,u,\nabla u)\right] + f(x,u)$$

Leggi di conservazione

$$u_t = \nabla\left[\phi(x,u)\right]$$

Caso banale $\begin{cases} u_t + c u_x = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \Rightarrow u(t,x) = \varphi(x-ct)$

Eq di Burges

$$u_t + u u_x = 0$$

Soluzioni di viscosità

$u_\varepsilon + u u_t = \varepsilon \Delta u$) eq parabolica semi lineare

quindi con i metodi di punto fisso

si possono risolvere

Problema in dimensione superiore $u_t + \nabla_x f(u) = 0$

non si riesce a sistemare.

Nelle ultrafunzioni $u_t + \nabla_x f(u) = 0$

$u_t + D f(u) = 0$

LA MASTERNO

$u_t + \operatorname{div} D f(u) = 0$

con lui infinitesimo

$$u_t + \operatorname{div} f(u) + \varepsilon_0 \operatorname{div}(\nabla u) = 0$$