A.A. 2019/2020
Equazioni Ellittiche

Antonio Tarsia

Appunti completi del corso

Matteo Stefanini

Questi appunti sono stati presi direttamente a lezione e non sono stati revisionati quindi è molto probabile che siano presenti degli errori. Se volete potete segnalarmi quelli presenti e vi manderò nel più breve tempo possibile la versione rimodificata. L'indice è stato creato copiandolo dal registro delle lezioni. Spero che vi siano d'aiuto e buono studio!

Indice

LEZIONE 01

Titolo nota 26/09/2019

DEF $A(x,D)u = \sum_{|p|\le \ell} a_p(x) D^p u(x)$ $\quad x\in\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ $\quad \ell$ = ORDINE DI UN OPERATORE

p È UN MULTI INDICE $p=(p_1,\dots,p_n)\in\mathbb{N}^n$

OPERATORE ELLITTICO

$|p| = p_1+\dots+p_n$

$D^p = \dfrac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_n^{p_n}}$

LA PARTE PRINCIPALE È $A_0(x,D) = \sum_{|p|=\ell} a_p(x) D^p u(x)$

$A(x,D)$ SI DICE ELLITTICO SE IN $\forall \xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ $\underbrace{\sum_{|p|=\ell} a_p(x)\xi^p \ne 0}$

POLINOMIO CARATTERISTICO DELLA PARTE PRINCIPALE NON SI ANNULLA MAI

$\xi^p = \xi_1^{p_1}\cdots\xi_n^{p_n}$

TEOREMA SIA $A(x,D)$ ELLITTICO IN X SE

1) $a_p(x)\in\mathbb{R}$ $\forall p$

OPPURE $\qquad\Rightarrow \ell$ È PARI

2) $n\ge 3$

DIM SUPPONIAMO VALGA 1) MI SCRIVO $\xi = (\xi', \xi_n)$ CON $\xi' = (\xi_1,\dots,\xi_{n-1})$

E SIA $p = (0,\dots,0,\ell)$

$a_p(x)\,\xi^p = a_{(0,\dots,0,\ell)}(x)\,\xi_n^\ell$ $\qquad$ CHIAMO $b_0(x) = a_{(0,\dots,0,\ell)}(x)$

POL ASSOCIATO AD A_0

ALLORA $P(x,\xi',\xi_n) = b_0(x)\xi_n^\ell + b_1(x,\xi')\xi_n^{\ell-1} + \dots + b_\ell(x,\xi')$

VEDENDO COME POLINOMIO DI ξ_n

SUPPONENDO $b_0(x)>0$ E PER ASSURDO ℓ DISPARI

$\left(\begin{array}{l} b_0(x)\ne 0 \text{ PERCHÉ PRENDO} \\ \xi=(0,\dots,0,1)\ne 0 \\ P(x,\xi) = b_0(x)\ne 0 \text{ PER IPOTESI DI ELLITTICITÀ} \end{array}\right)$

$\lim_{\xi_n\to\pm\infty} P(x,\xi',\xi_n) = \pm\infty$ $\qquad \exists\,(\xi',\xi_n)$ tc $P(x,\xi',\xi_n)=0$

PERCHÉ ANCHE SE $\xi_n \ne 0$ $\forall$ SCELTA DI ξ' HO $P(x,\xi',\xi_n)=0$

ASSURDO PERCHÉ A È ELLITTICO

CASO $n \geq 3$

SIA $P(x, \xi', \xi_n) = 0$ CALCOLIAMO LE RADICI RISPETTO A ξ_n

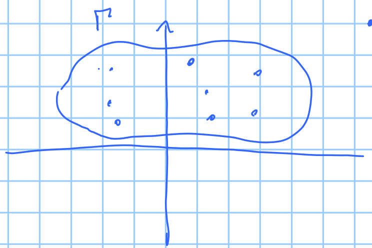
$z \in \mathbb{C}$ t.c. $p(x, \xi', z) = 0$ HA ℓ RADICI IN $\mathbb{C}$

$N^+(x, \xi')$ = n° DI RADICI CON $\mathrm{Img}(z) > 0$

$N^-(x, \xi')$ = n° DI RADICI CON $\mathrm{Img}(z) < 0$

$N^+ + N^- = \ell$

(NON CI SONO $\mathrm{Img} = 0$ PERCHÈ È ELLITTICO)



FISSATO ξ'_0 SICURAMENTE $P(x, \xi'_0, \xi_n) \neq 0$ in Γ

$\Rightarrow \exists\, U(\xi'_0) : \forall \xi' \in U(\xi'_0)$

$$|P(x, \xi'_0, \xi_n) - P(x, \xi', \xi_n)| < |P(x, \xi'_0, \xi_n)| \quad \text{in } \Gamma$$

P IN ξ' È UN POLINOMIO QUINDI CONTINUO

SIANO $P(x, \xi'_0, z) = f(z)$

$P(x, \xi', z) = g(z)$

TEO (ANA COMP)

$f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ OLOMORFE $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ TALI CHE $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$

$\forall z \in \partial B(z_0, r)$ CON $B(z_0, r) \subset \Omega$

ALLORA f e g HANNO LO STESSO NUMERO DI ZERI IN $B(z_0, r)$

ALLORA USANDO IL TEOREMA $N^+(x, \xi'_0) = N^+(x, \xi')$

IN MODO ANALOGO SI OTTIENE $N^-(x, \xi'_0) = N^-(x, \xi')$

ALLORA $\xi' \to N^\pm(x, \xi')$ È COSTANTE IN UN INTORNO DI ξ'_0 E QUINDI CONTINUA.

ALLORA PER ARBITRARIETÀ DI ξ'_0 $\xi' \to N^\pm(x, \xi')$ È CONTINUA IN $\mathbb{R}^{n-1}$

MA N^+ e N^- SONO FUNZIONI A VALORI INTERI CONTINUA È COSTANTE

SE IL DOMINIO È CONNESSO MA LO ZERO SCONNETTE SOLO SE ESCLUSO DA $\mathbb{R}$

$\Rightarrow n - 1 > 1 \Rightarrow n > 2 \Rightarrow n \geq 3$

$\Rightarrow N^+(x, \xi') = N^+(x, -\xi')$ e $N^-(x, \xi') = N^-(x, -\xi')$

$P(x, \xi', \xi_n) = \sum_{|p| = \ell} a_p(x)\, \xi^p$ È OMOGENEO

QUINDI $p(x,-\xi',-\xi_n) = (-1)^{\ell}\, p(x,\xi',\xi_n)$

$$\Rightarrow \begin{cases} N^+(x,\xi') = N^-(x,-\xi') \\ N^-(x,\xi') = N^+(x,\xi') \end{cases}$$

QUINDI $N^+(x,\xi') = N^-(x,\xi')$

E QUINDI $\ell = N^+ + N^- = 2N^+$

ESEMPI

1) OPERATORE DI CAUCHY-RIEMANN

$$A(x,D) = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$$

2) LAPLACIANO

$$A(x,D) = \Delta = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

3) BILAPLACIANO

$$\Delta^2 = \Delta\Delta$$

DEF Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ $a_p : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ DIREMO CHE $A(x,D)$ È UNIFORMEMENTE ELLITTICO SU Ω SE $\exists\, \nu > 0$ tc $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^m$ (ci vuole $\setminus\{0\}$?)

$$\sum_{|p|=\ell} a_p(x)\xi^p \geq \nu \|\xi\|^{\ell} \quad \forall x \in \Omega$$

OSS SE $a_p \in C^0(\overline{\Omega})$, Ω LIMITATO e $A(x,D)$ È ELLITTICO IN $\Omega \Rightarrow$ È UNIFORMEMENTE ELLITTICO SU Ω

DIM $F(x,\xi) = \dfrac{\sum_{|p|=\ell} a_p(x)\xi^p}{\|\xi\|^{\ell}} \overset{\text{VORREI}}{\geq} \nu > 0$ e F È CONTINUA IN x IN $\overline{\Omega}$ e IN ξ IN $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$\Rightarrow$ HA MINIMO STRETTAMENTE POSITIVO

DEF

SE $A_0(x,D)u = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} D^\alpha\left[a_{\alpha\beta}(x)\, D^\beta u\right]$ IN FORMA VARIAZIONALE O DI DIVERGENZA

INVECE $A_0(x,D) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x) D^\alpha u$ SI DICE IN FORMA NON VARIAZIONALE

ATTENZIONE DALLA FORMA VARIAZIONALE POSSO PASSARE ALLA FORMA NON VARIAZIONALE SOLO SE GLI $a_{\alpha\beta}(x)$ SUPPORTANO D^α (POSSONO ESSERE DERIVATI)

ES $\operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u$

LEZIONE 02

Titolo nota 02/10/2019

$x \in \mathbb{R}^n \quad a_p : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad , p \in \mathbb{N}^n \quad p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$

$$A(x,D)(u) = \sum_{|p| \leq \ell} a_p(x) \, D^p u(x)$$

$$A_0(x,D)(u) = \sum_{|p| = \ell} a_p(x) D^p u(x) \quad \Rightarrow \ell \in \mathbb{N} \quad \ell \text{ è pari per quanto visto}$$

- A è <u>ellittico</u> su Ω se $\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\underset{\text{pol. car.}}{A_0(x,\xi)} = \sum_{|p|=\ell} a_p(x) \xi^p \neq 0 \quad \forall x \in \Omega$$

- $A(x,D)$ è uniformemente ellittico su Ω se $\nu > 0$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$

$$\sum_{|p|=\ell} a_p(x) \, \xi^p \geq \nu \|\xi\|^p$$

<u>PROP</u> se $a_p \in C^0(\overline{\Omega})$ se $A(x,D)$ ellittico $\Rightarrow$ $A(x,D)$ (oppure $-A(x,D)$) unif. ellittico su Ω

(attenzione a giustificare bene che $\max_{\overline{\Omega}} a_p(x) \cdot \min_{\overline{\Omega}} a_p(x) > 0$ che deriva dall'ell.)

<u>DEF</u> ellitticità forte (o condizione di Legendre)

$A(x,D)$ è <u>fortemente ellittico</u> su Ω se $\nu > 0$ t.c. $\forall \{\xi^\alpha\}_{|\alpha|=m} \in \mathbb{R}^N$ e $\forall x \in \Omega$

$$\sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|=m}} \left(A_{\alpha\beta}(x) \xi^\alpha \,\middle|\, \xi^\beta \right)_{\mathbb{R}^N} \geq \nu \sum_{|\alpha|=m} \|\xi^\alpha\|^2_{\mathbb{R}^N}$$

dove $A_{\alpha\beta}$ sono matrici $N \times N$

<u>ESEMPIO</u> sistema di eq.

$$\underset{\text{convenzione usata in forma di div.}}{(-1)^m} \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|=m}} D^\alpha \left(A_{\alpha\beta}(x) D^\beta u(x) \right) = f(x) \qquad \begin{array}{l} u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N \\ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N \end{array}$$

<u>DEF</u> ellitticità (o condizione di Legendre-Hadamard)

A è ellittico in Ω se $\nu > 0$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^N$ $\forall x \in \Omega$

$$\sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|=m}} \left(A_{\alpha\beta}(x) \eta \,\middle|\, \eta \right)_{\mathbb{R}^N} \lambda^{\alpha+\beta} \geq \nu \|\lambda\|^{2m}_{\mathbb{R}^n} \|\eta\|^2_{\mathbb{R}^N}$$

PROP FORTEMENTE ELLITTICO $\Rightarrow$ ELLITTICO

DIM PRESO $\xi_i^{\alpha_i} = \lambda^{\alpha_i} \eta_i$ $i = 1, \dots, N$ e $\lambda \in \mathbb{R}^n$

DEF SE $A(x,D)$ È ELLITTICO ALLORA TUTTI GLI OPERATORI SULLA DIAGONALE PRINCIPALE SONO ELLITTICI CIOÈ $\{A_{\alpha\beta}^{hh}\}_{h=1\dots N}$ SONO ELLITTICI

DIM $\{A_{\alpha\beta}^{h,h}\}_{h=1\dots N}$ $\eta = e^h$ $\sum_{|\alpha|=|\beta|} A_{\alpha\beta}^{hh} \lambda^{\alpha+\beta} \geq \nu \|\lambda\|_{\mathbb{R}^n}^{2m-1}$

ESEMP: OPERATORI DEL SECONDO ORDINE

$$A^h(x,D)\,u = -\sum_{k=1}^{N}\sum_{i,j=1}^{m} D_i\left(A_{ij}^{hk} D_j u_k(x)\right) \qquad h = 1, \dots, N \quad u = (u_1, \dots, u_N)$$

IN QUESTO CASO FORTEMENTE ELLITTICO

$$\nu \|\tau\|^2_{\mathbb{R}^{Nm}} \leq \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{h,k=1}^{N} A_{ij}^{hk}(x)\, \tau_i^h \tau_j^k$$

ELLITTICO

$$\nu \|\xi\|_m^2 \|\eta\|_N^2 \leq \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{hk}^{N} A_{ij}^{hk}(x)\, \xi_i \xi_j \eta_h \eta_k$$

ESEMPI

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \Delta & \varepsilon D_1^2 \\ \varepsilon D_2^2 & \Delta \end{pmatrix}$$

GLI ELEMENTI NON SULLA DIAG NON SONO ELLITTICI

$|\varepsilon| < 2$ E IL SISTEMA È ELLITTICO

$$\begin{pmatrix} \Delta & \alpha(D_1^2 - D_2^2) \\ \alpha(D_1^2 - D_2^2) & \Delta \end{pmatrix}$$

$|\alpha| < 1$ IL SISTEMA È ELLITTICO.

OPERATORE DELL'ELASTICITÀ LINEARE.

$a\Delta \mathcal{U}(x) + (a+2b)\, \nabla(\mathrm{div}\, \mathcal{U}(x))$ $a>0$ $b>0$ $\mathcal{U}(x) \in \mathbb{R}^3$ $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$

VERIFICA LA CONDIZIONE DI ELLITTICITÀ MA NON QUELLA DI ELLITTICITÀ FORTE.

DEFINIZIONE DI SOLUZIONE DI UN'EQ. ELLITTICA

$A(x,D)u = f$ IN BASE ALLA REGOLARITÀ DI f COSA MI ASPETTO DA $u(x)$?

ESEMPIO $u(x,y) = (x^2-y^2)\sqrt{\left[-\log\sqrt{x^2+y^2}\right]}$ $\Omega = \{x^2+y^2 < r < 1\}$

RISOLVE $\Delta u(x,y) = f(x,y)$ su $\Omega \setminus \{(0,0)\}$

DOVE $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2-x^2}{2(x^2+y^2)} \cdot \left[\dfrac{4}{\sqrt{\left[-\log\sqrt{x^2+y^2}\right]}} + \dfrac{1}{2\sqrt{-\log^3\sqrt{x^2+y^2}}} \right] & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$f \in C^0(\overline{\Omega})$ $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega \setminus \{(0,0)\})$

MA $u \notin C^2(\overline{\Omega})$

DEF (SOLUZIONE CLASSICA)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^N)$ $A_{\alpha\beta} \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ $|\alpha| = |\beta| = m$

$u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ SI DICE CLASSICA SU Ω DI $A(x,D)u = f(x)$

SE $u \in C^{2m}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ E VERIFICA IL SISTEMA $\forall x \in \Omega$

DEF (SOLUZIONE FORTE)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$ $p > 1$, $A_\alpha \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, $|\alpha| \leq 2m$

$u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ È SOL. FORTE DI $A(x,D)u = f$ SE

$u \in H^{2m,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ E SODDISFA IL SISTEMA PER q.o. $x \in \Omega$

DEF (SOLUZIONE DEBOLE)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ $f_\beta \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $p > 1$, $|\beta| \leq m$, $A_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ $|\alpha|, |\beta| \leq m$

$u \in H^{m,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ È SOLUZIONE DEBOLE DI

$A(x,D)u = (-1)^m \sum_{|\beta| \leq m} D^\beta f_\beta$ SE $\forall \varphi \in H_0^{m,p'}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ VALE

$$\sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} \int_\Omega \left(A_{\alpha\beta}(x)\, D^\beta u(x) \,\middle|\, D^\alpha \varphi \right) dx = \int_\Omega \sum_{|\beta| \leq m} \left(f_\beta \,\middle|\, D^\beta \varphi \right) dx$$

OSS $D^\beta f_\beta \in H^{-m}(\Omega, \mathbb{R}^N)$

DEF (SOLUZIONE DISTRIBUZIONALE)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ $f \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^N) = (C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N))'$ $A_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ $|\alpha|, |\beta| \leq m$

$u \in H^{m,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ È SOL NEL SENSO DELLE DISTRIBUZIONI DI $A(x,D)u = f$

SE $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ VERIFICA:

$$< \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} (A_{\alpha\beta} D^\alpha u \mid D\varphi^\beta)_{\mathbb{R}^n} > = < f(x), \varphi(x) >$$

CONDIZIONI AL BORDO.

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ LIMITATO PER COMODITÀ

1) $A(x,D)$

2) OPERATORE DIFFERENZIALE O INTEGRALE $B(x,D)$ DEFINITO SU $\partial\Omega$

3) CLASSI DI FUNZIONI CHE DANNO SIGNIFICATO ALLE ESPRESSIONI

DEF IL PROBLEMA

$$\begin{cases} A(x,D)u = f & \text{in } \Omega \\ B(x,D)u = g & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

È BEN POSTO NEL SENSO DI HADAMARD SE AMMETTE ESISTENZA E UNICITÀ DELLA SOLUZIONE E LA SOLUZIONE DIPENDE CON CONTINUITÀ DAI DATI

ESEMPIO DI HADAMARD

in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & t > 0 \\ u(0,x) = \psi(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \varphi(x) \end{cases}$$

$u_n(t,x) = e^{-\sqrt{n}} e^{nt} \sin(nx)$ RISOLVE CON

$\varphi_n(x) = n e^{-\sqrt{n}} \sin(nx)$

$\psi_n(x) = e^{-\sqrt{n}} \sin(nx)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon \quad \sup_x |\varphi_n(x)| < \varepsilon \quad \sup_x |\psi_n(x)| < \varepsilon$

MA $\forall t_0 > 0 \quad \lim_{n \to \infty} \sup_x |u(t_0, x)| = +\infty$

LEZIONE 03

Titolo nota 03/10/2019

SIANO $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ CON $\partial\Omega$ SUFF REGOLARE

$B_J(x,D)\varphi = \sum_{|\alpha|\leq m_J} b_{J\alpha}(x) D^\alpha \varphi(x)$, FAMIGLIA DI OPERATORI SU $\partial\Omega$, $x\in\Omega$

$\varphi \in C^m(\overline{\Omega})$ (OPPURE $\varphi \in H^{m_J}(\Omega)$ MA ATTENZIONE ALLA TRACCIA)

$$\begin{cases} A(x,D)u = f & x\in\Omega \\ B(x,D)u = g & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

$B(x,D) = (B_0(x,D), \dots, B_{k-1}(x,D))$ $\quad g(x) = (g_0(x), \dots, g_{k-1}(x))$ CON $k\geq 1$

DEF IL SISTEMA $\{B_J(x,D)\}_{J=0}^{k-1}$ È NORMALE SU $\partial\Omega$ SE RISULTA:

a) $\sum_{|\alpha|=m_J} b_{J\alpha}(x)\xi^\alpha \neq 0$ $\quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, ξ È NORMALE A $\partial\Omega$ NEL PUNTO x

b) $m_J \neq m_i$ QUANDO $i\neq J$

SIA $k=m$

DEF IL SISTEMA $\{B_J(x,D)\}_{J=0}^{m-1}$ RICOPRE L'OPERATORE $A(x,D)$ (OPERATORE ELLITTICO DI ORDINE $2m$) SU $\partial\Omega$, SE $\forall x\in\partial\Omega$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, ξ TANGENTE A $\partial\Omega$ IN x, E $\forall \xi' \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ NORMALE A $\partial\Omega$ IN x, I POLINOMI NELLA VARIABILE COMPLESSA τ

$$\sum_{|\alpha|=m_J} b_{J\alpha}(x)\,(\xi+\tau\xi')^\alpha \qquad J=0,\dots,m-1$$

SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI MODULO IL POLINOMIO

$$\prod_{i=1}^{m} (\tau - \tau_i^*(x,\xi,\xi'))$$

DOVE $\tau_i^*(x,\xi,\xi')$ SONO LE RADICI CON PARTI IMMAGINARIA POSITIVE (>0) DI $A_0(x,\xi+\xi'\tau)$

IPOTESI DI LAVORO PER AVERE COSE SENSATE

1) $A(x,D)$ UNIFORMEMENTE ELLITTICO DI ORDINE $2m$ SU Ω DEFINITO SU SPAZI FUNZIONALI

2) I $B_J(x,D)$ SONO m

3) I COEFF. DI B_J IN OPPORTUNI SPAZI FUNZIONALI

4) IL SISTEMA $\{B_J(x,D)\}_{J=0}^{m-1}$ È UN SISTEMA NORMALE SU $\partial\Omega$

5) " " RICOPRE $A(x,D)$ SU $\partial\Omega$

6) L'ORDINE m_J DI B_J DEVE ESSERE $m_J \leq 2m-1$

ESEMPI: 1) LE CONDIZIONI DI DIRICHLET BASTA DARE

$$B_J = \gamma_J = \frac{\partial^J}{\partial \nu^J} \qquad J=0,\dots,m-1$$

PROBLEMA DI DIRICHLET

$$\begin{cases} A(x,D)\,u = f \\ \gamma_0 u = g_0 \\ \gamma_1 u = g_1 \\ \vdots \\ \gamma_{m-1} u = g_{m-1} \end{cases} \quad \text{su } \partial\Omega$$

2) NAVIER

$$\begin{cases} A(x,D)\,u = f \\ \gamma_0 u = g_0 \\ \Delta u = g_1 \\ \vdots \\ \Delta^{m-1} u = g_{m-1} \end{cases} \quad \text{su } \partial\Omega$$

PROP (NO DIM) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ CON FRONTIERA SUFF REGOLARE,

$$u \in H_0^m(\Omega) \iff u \in H^m(\Omega) \ \text{e} \ \gamma_0 u = \dots = \gamma_{m-1} u = 0 \ \text{su } \partial\Omega$$

QUINDI IL PROBLEMA DI DIRICHLET NEL CASO $2m$ SI RISCRIVE

$$\begin{cases} A(x,D)\,u = f \\ u \in H_0^m(\Omega) \end{cases}$$

CENNO AL CALCOLO DELLE VAR.

ES $\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega f(x)\,u(x)\,dx$

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega \\ u = \varphi & \partial\Omega \end{cases} \qquad A = \{ u : \Omega \to \mathbb{R},\ u = \varphi \text{ su } \partial\Omega,\ \mathcal{J}(u) < +\infty \}$$

ES FUNZIONALE DELLA PIASTRA SOTTILE

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\iint_\Omega \left[(\Delta u)^2 - (1-\sigma)\left(u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy}\right) - f \cdot u \right] dx\, dy$$

$$\Big\downarrow_{EL} \quad \begin{cases} \Delta\Delta u = 0 \\ u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \end{cases}$$

TEORIA DEGLI OPERATORI VICINI

DEF $A, B : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{B}$ OPERATORI

$\mathcal{H}$ è UN INSIEME E $\mathcal{B}$ UN BANACH

DIREMO CHE A è VICINO B SE $\exists$ COSTANTI $\alpha > 0$, $k \in (0,1)$ TALI CHE

$$\forall\, x_1, x_2 \in \mathcal{H} \quad \| B(x_1) - B(x_2) - \alpha\,(A(x_1) - A(x_2)) \|_{\mathcal{B}} \le k\, \| B(x_1) - B(x_2) \|_{\mathcal{B}}$$

PROP Sia A VICINO A B $\Rightarrow$ A è INIETTIVO $\Leftrightarrow$ B è INIETTIVO

DIM

$$\| B(x_1) - B(x_2) \| = \| B(x_1) - B(x_2) - \alpha[A(x_1) - A(x_2)] + \alpha[A(x_1) - A(x_2)] \| \le$$

$$\le \| B(x_1) - B(x_2) - \alpha[A(x_1) - A(x_2)] \| + \alpha \| A(x_1) - A(x_2) \| \le$$

$$\le k \| B(x_1) - B(x_2) \| + \alpha \| A(x_1) - A(x_2) \|$$

$$\Rightarrow \| B(x_1) - B(x_2) \| \le \frac{\alpha}{1-k} \| A(x_1) - A(x_2) \|$$

$$\| A(x_1) - A(x_2) \| = \frac{1}{\alpha} \| \alpha[A(x_1) - A(x_2)] \| \le \frac{1}{\alpha} \| \alpha[A(x_1) - A(x_2)] + [B(x_1) - B(x_2)] - [B(x_1) - B(x_2)] \| \le$$

$$\le \frac{1}{\alpha}(k+1) \| B(x_1) - B(x_2) \|$$

DEF sia B un operatore bigettivo posso munire $\mathcal{H}$ di una distanza

$$d_{\mathcal{H}}(x_1, x_2) = \| B(x_1) - B(x_2) \|$$

PROP $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ è uno spazio metrico completo

DIM presa $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ di Cauchy

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N}$ tc $\forall m, n \geq \nu \Rightarrow d_{\mathcal{H}}(x_m, x_n) < \varepsilon$

$\Rightarrow \quad \| B(x_n) - B(x_m) \| < \varepsilon$

$\Rightarrow y_n = B(x_n) \quad \Rightarrow \{y_n\} \subseteq \mathcal{B}$ è di Cauchy ma $\mathcal{B}$ è Banach

$\Rightarrow \exists \bar{y} \in B$ tc $y_n \to \bar{y}$ in $\mathcal{B}$ e $\bar{y} \in \mathcal{B}$. Allora per suriettività di B $\exists \bar{x} \in \mathcal{H}$ tc $B(\bar{x}) = \bar{y}$

dire che $y_n \to \bar{y} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N}$ tc $\forall n \geq \nu$

$\varepsilon > \| y_n - \bar{y} \| = \| B(x_n) - B(\bar{x}) \| = d(x_n, \bar{x}) \Rightarrow x_n \to \bar{x}$ in $\mathcal{H}$

PROP se A è vicino a B, B è bigettivo $\Rightarrow A$ è bigettivo.

DIM $\overset{\text{CLAIM}}{\forall} \ \forall f \in \mathcal{B} \quad \exists u \in \mathcal{H}$ tc $\alpha A(u) = \alpha f$

IDEA: $Bu = Bu - \alpha A u + \alpha f$

considero $\forall w \in \mathcal{H}$

(*) $B(u) = B(w) - A(w) + f$ poiché B è bigettiva

$\forall w \in \mathcal{H} \quad \exists! \, u \in \mathcal{H}$ che soddisfa (*)

$\Rightarrow$ ho costruito $\quad \mathcal{C}: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, $\ w \longmapsto \mathcal{C}(w) = u$

se mostro che $\mathcal{C}$ è una contrazione ho finito perché $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ è completo e il punto fisso u è quello che cerco.

$$d_{\mathcal{H}}(\mathcal{C}(w_1), \mathcal{C}(w_2)) \leq c \, d_{\mathcal{H}}(w_1, w_2)$$

$$d_{\mathcal{H}}(u_1, u_2) = \| B(u_1) - B(u_2) \| \overset{\text{da } (*)}{=}$$

$$= \| B(w_1) - \alpha A(w_1) + \cancel{\alpha f} - B(w_2) + \alpha A(w_2) - \cancel{\alpha f} \|$$

$$= \| B(w_1) - B(w_2) - \alpha [A(w_1) - A(w_2)] \| \leq k \| B(w_1) - B(w_2) \| = k\, d_*(w_1, w_2)$$

PER LA VICINANZA

E $k \in (0,1) \Rightarrow T$ è UNA CONTRAZIONE.

LEZIONE 04

Titolo nota 09/10/2019

RICORDIAMO $A, B \ \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{B}$ OPERATORI, $\mathcal{H}$ INSIEME $\mathcal{B}$ BANACH

A è VICINO A B SE $\exists\ \alpha, k$ $k \in (0,1)$ e $\alpha > 0$

tc $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{H}$ $\| B(x_1) - B(x_2) - \alpha (A(x_1) - A(x_2)) \| \leq k \| B(x_1) - B(x_2) \|$

PROP (VOLTA SCORSA)

SE A è VICINO A B

i) A è INIETTIVO $\iff$ B è INIETTIVO

ii) A è BIGETTIVO $\Rightarrow$ B è BIGETTIVO

PROP SE B è SURIETTIVO $\Rightarrow$ A è SURIETTIVO

DIM METTO SU $\mathcal{H}$ UNA REL DI EQ. DEL TIPO

$u \sim v \iff B(u) = B(v)$

SIA $\mathcal{H}/\sim$ DEFINISCO $A^*([u]_\sim) = A(u)$

$B^*([u]_\sim) = B(u)$

OSS A^*, B^* SONO BEN DEFINITE (RICORDANDO $\| A(u) - A(v) \| \leq \frac{k+1}{\alpha} \| B(u) - B(v) \|$)

ALLORA SE $u, v \in [u] \Rightarrow A(u) = A(v)$

INOLTRE A^* è VICINO A B^*

B^* è INIETTIVO PER COSTRUZIONE e SURIETTIVO PERCHÉ LO È B

$\Rightarrow$ B^* è BIGETTIVO $\iff$ A^* è BIGETTIVO $\Rightarrow$ A^* SURIETTIVO $\Rightarrow$ A è SURIETTIVO.

ALCUNE PROP. NON DIM

i) SE $B(\mathcal{H})$ è DENSO $\Rightarrow$ $A(\mathcal{H})$ è DENSO

ii) SE $B(\mathcal{H})$ è APERTO IN $\mathcal{B}$ $\Rightarrow$ $A(\mathcal{H})$ è UN APERTO IN $\mathcal{B}$

TEO (METODO DI CONTINUITÀ)

PRESI $\{A_t\}_{t\in[0,1]}$ $A_t : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{B}$ SUPPONIAMO CHE:

1) $\exists\ r \in [0,1]$ TALE CHE A_r È UNA BIGEZIONE TRA $\mathcal{H}$ e $\mathcal{B}$

2) $\exists\ c>0$ $\forall s,t \in [0,1]$ $\forall u,v \in \mathcal{H}$

$$\| A_s(u) - A_s(v) - [A_t(u) - A_t(v)] \| \leq c \, \| A_s(u) - A_s(v) \|_{\mathcal{B}} \, |t-s|$$

ALLORA A_t È BIGETTIVO $\forall t \in [0,1]$

DIM SIA $I = \{ t \in [0,1] \mid A_t \text{ È UNA BIGEZIONE} \}$

LA TESI SEGUE CHE I È APERTO E CHIUSO

a) $I \neq \emptyset$ PERCHÉ $r \in I$ PER 1

b) I È APERTO: SIA $s \in I$ DA 2) PRENDO L'INSIEME $J = \{ t : c \cdot |t-s| = k < 1 \} \cap I$ È UN APERTO IN I

$\Rightarrow$ $\forall t \in I$ A_t È VICINO AD A_s, POICHÉ $s \in I$ $\Rightarrow$ A_s È UNA BIGEZIONE $\Rightarrow$ A_t È UNA BIGEZIONE

c) I È CHIUSO SE $\{t_n\} \subseteq I$ E $t_n \to t_\infty$ PROVO CHE $t_\infty \in I$

(OSS SICCOME $[0,1]$ È CHIUSO $t_\infty \in [0,1]$)

SCRIVENDO 2 PER t_n E t_∞

$$\| A_{t_n}(u) - A_{t_n}(v) - (A_{t_\infty}(u) - A_{t_\infty}(v)) \| \leq c \, \| A_{t_n}(u) - A_{t_n}(v) \| \, |t_n - t_\infty|$$

$\exists\ \nu$ t.c. $\forall n \geq \nu$ $c \cdot |t_n - t_\infty| < 1$ $\Rightarrow$ A_{t_∞} È VICINO A A_{t_n} E A_{t_n} È BIGEZIONE $\forall n$ $\Rightarrow$ A_{t_∞} È UNA BIGEZIONE.

TEO

Y, Z SPAZI DI BANACH, NORMATI RISPETTIVAMENTE CON $\|\cdot\|_Y$, $\|\cdot\|_Z$

$F : \mathcal{U}(y_0) \longrightarrow Z$ $y_0 \in Y$ CON LE IPOTESI

1) $F \in C^1(\mathcal{U}(y_0))$

2) $F'(y_0)$ (DIFF DI FRECHET) È INVERTIBILE COME APP. LINEARE DA $Y \to Z$

ALLORA $\exists\, k \in (0,1)$ e $W(y_0) \subseteq \mathcal{U}(y_0)$ TALI CHE $\forall y_1, y_2 \in W(y_0)$

$$(*) \quad \| F'(y_0)(y_1 - y_2) - [F(y_1) - F(y_2)] \|_Z \leq k \, \| F'(y_0)(y_1 - y_2) \|_Z$$

OSS IL TEOREMA ~~(*)~~ DICE CHE F e $F'(y_0)$ SONO OPERATORI VICINI

MA 2) MI DICE CHE $F'(y_0) : W(y_0) \longrightarrow Z$ È LOC INVERTIBILE

$\Rightarrow$ ANCHE F LO È

RICHIAMI : 1) $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ DI BANACH. $F : \mathcal{B}_1 \longrightarrow \mathcal{B}_2$

F È DIFFERENZIABILE SECONDO FRECHÉT IN $u_0 \in \mathcal{U}(u_0) \subset \mathcal{B}_1$ INTORNO

SE $\exists\, L : \mathcal{B}_1 \longrightarrow \mathcal{B}_2$ TALE CHE

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| f(u_0 + h) - f(u_0) - L \cdot h \|_{\mathcal{B}_2}}{\| h \|_{\mathcal{B}_1}} = 0$$

$$\Rightarrow L = dF(u_0) = F'(u_0)$$

INOLTRE SE L'APPLICAZIONE CHE $u_0 \longrightarrow dF(u_0)$ È CONTINUA IN $\mathcal{U}$ AVREMO $F \in C^1(\mathcal{U})$

2) TEO (LAGRANGE SUI BANACH) (NO DIM)

$\forall u, v \in V$ t.c. IL SEGMENTO γ TRA u e v È CONTENUTO IN $\mathcal{U}$

$F \in C^1(\mathcal{U})$ ALLORA

$$\| F(u) - F(v) \|_{\mathcal{B}_2} \leq k \, \| u - v \|_{\mathcal{B}_1} \quad \text{con } k = \sup_{w \in \gamma} \| dF(w) \|_{\mathcal{L}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)}$$

SPAZIO OPERATORI LINEARI TRA $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$

3) DATA $G : [a,b] \longrightarrow Z$, Z SPAZIO DI BANACH $\Rightarrow \int_a^b G(t)\, dt$ È QUELL'ELEMENTO $z \in Z$

TALE CHE $\forall \varepsilon > 0 \; \exists\, \delta > 0$ $a = t_0 < t_1 \dots < t_m = b$ con $\delta = \max |t_{i+1} - t_i|$

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} G(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) - z \right\|_Z < \varepsilon \qquad \tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$$

INOLTRE : $\displaystyle \left\| \int_a^b G(t)\, dt \right\|_Z \leq \int_a^b \| G(t) \|_Z \, dt$

4) SIA $G : \Omega \longrightarrow Z$ $\Omega \subseteq Y$ APERTO, $G \in C^1(\Omega)$ $\forall y_1, y_2 \in \Omega$ TALI CHE

$\exists\, \gamma$ SEGMENTO CHE COLLEGA y_1 A y_2 SIA CONTENUTO IN Ω

ALLORA $\displaystyle G(y_2) - G(y_1) = \int_0^1 G'(y_1 + t y_2)(y_1 - y_2)\, dt =$

$$= \left[\int_0^1 G'(y_1 + t(y_2 - y_1))\, dt \right] (y_1 - y_2)$$

DIM (DEL TEOREMA) (SUPPONGO W CONVESSO)

$$\| F'(y_0)(y_1-y_2) - [F(y_1)-F(y_2)] \|_Z =$$

$$= \left\| F'(y_0)(y_1-y_2) - \left[\int_0^1 F'(y_2+t(y_2-y_1))\,dt\right](y_1-y_2) \right\| = \circledast$$

PER IPOTESI DI INVERTIBILITÀ DI $F'(y_0)$ $\quad I_Z = [F'(y_0)]^{-1} \circ [F'(y_0)]$

$$y_1-y_2 = I_Z(y_1-y_2) = [F'(y_0)]^{-1}[F'(y_0)](y_1-y_2)$$

$$\circledast = \left\| \left(\underbrace{I_Z}_{\substack{\text{OPERATORE}\\\text{LINEARE IN } Z}} - \underbrace{\left(\int_0^1 F'(y_2+t(y_2-y_1))\,dt\right)[F'(y_0)]^{-1}}_{\substack{\text{È UN OPERATORE DA } Z \to Z\\ \text{LINEARE}}} \right) F'(y_0)(y_1-y_0) \right\|_Z \leq$$

$$\underbrace{\left\| I_Z - \left[\int_0^1 F'(y_2+t(y_2-y_1))\,dt\right][F'(y_0)]^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(Z,Z)}}_{M(y_1,y_2)} \| F'(y_0)(y_1-y_0)\|_Z$$

RESTA DA MOSTRARE CHE $M(y_1,y_2) \leq k$ CON $k \in (0,1)$

$$M(y_1,y_2) = \| \ldots \|_{\mathcal{L}(Z,Z)} \underset{\substack{\text{DEF}\\ \text{DI NORMA}\\ \text{OPERATORIALE}}}{=} \sup_{z \in Z\setminus\{0\}} \frac{\left\| \left(I_Z - \left[\int_0^1 F'(y_2+t(y_2-y_1))\,dt\right][F'(y_0)]^{-1} \right) z \right\|_Z}{\|z\|_Z} =$$

PER INVERTIBILITÀ DI $F'(y_0)$ $\forall z \in Z\setminus\{0\}$ $\exists\, y \in Y$ t.c. $z = F'(y_0)y$

$$\sup_{y \in Y\setminus\{0\}} \frac{\left\| F'(y_0)y - \int_0^1 F'(y_2+t(y_2-y_1))\,dt \; y \right\|_Z}{\|F'(y_0)y\|_Z}$$

$$\| \underbrace{F'(y_0)y - \int_0^1 F'(y_2+t(y_2-y_1))\,dt}_{\substack{\text{SONO OPERATORI LINEARI DA } Y \text{ IN } Z\\ \text{E CONTINUI}}} \; y \|_Z \leq \left\| \int_0^1 F'(y_2+t(y_2-y_1))\,dy - F'(y_0) \right\|_{\mathcal{L}(Y,Z)} \|y\|_Y =$$

$$= \left\| \int_0^1 F'(y_2+t(y_2-y_1)) - F'(y_0)\,dt \right\|_{\mathcal{L}(Y,Z)} \|y\|_Y \leq$$

$$\leq \int_0^1 \| F'(y_2+t(y_2-y_1)) - F'(y_0) \|_{\mathcal{L}(Y,Z)} \,dt \; \|y\|_Y \leq$$

POICHÉ $F \in C^1 \Rightarrow F'$ È CONTINUO QUINDI A PATTO DI STRINGERE L'INTORNO $W(y_0)$

$\leq \quad \varepsilon \cdot \|y\|_Z \quad \leq \boxed{\frac{\varepsilon}{\delta}} \|F'(y_0)\, y\|_Z$

POICHÉ $F'(y_0)$ È LINEARE, CONTINUA e SURGETTIVA $\Rightarrow$ ANCHE LA SUA INVERSA È CONTINUA

$\delta \|y\| < \|F'(y_0)\, y\|_Z$

POSSO SCEGLIERE $\frac{\varepsilon}{\delta} = k < 1$

TEO BANACH OPEN MAP

LEZIONE 05

Titolo nota 10/10/2019

EQUAZIONI ELLITTICHE NON VARIAZIONALI

$$\begin{cases} u \in H^2 \cap H^1_0(\Omega) \\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_{ij} u(x) = f(x) \end{cases}$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO LIMITATO

$f \in L^2(\Omega)$, q.o. in Ω

DOVE $a_{ij}(x) \in L^\infty(\Omega)$

$\{a_{ij}(x)\}$ È UNIFORMEMENTE ELLITTICA SU Ω

$$\exists\, \nu > 0 \quad \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu \|\xi\|^2_n \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

PROBLEMA: DIMOSTRARE L'ESISTENZA DI SOLUZIONI FORTI

OSS L'UNIFORME ELLITTICITÀ NON GARANTISCE LA BUONA POSIZIONE DEL PROBLEMA. (PER $n \geq 3$)

VALE IL SEGUENTE CONTROESEMPIO (DI TALENTI)

SIA $\Omega = B(0,r)$

$$\sum_{ij}^{n} a_{ij}(x) D_{ij} u(x) = 0$$

$$a_{ij}(x) = \delta_{ij} + b\,\frac{x_i x_j}{\|x\|} \quad \text{DOVE } b = -1 + \frac{n-1}{1-\lambda} \qquad \lambda < 1 \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

(DEFINITE TRANNE IN 0 MA L^∞)

1) È UNIFORMEMENTE ELLITTICA

2) $u(x) = \|x\|^\lambda_n$ È SOL FORTE DELL'EQUAZIONE.

DIM

$$D_i u(x) = \lambda \|x\|^{\lambda-2}_n x_i$$

$$D_{ij} u(x) = \lambda \|x\|^{\lambda-4}\left[(\lambda-2)x_i x_j + \delta_{ij}\|x\|^2\right]$$

$D_i u(x) \in L^q(B(0,r))$ SE $q < \frac{n}{1-\lambda}$

$D_{ij} u(x) \in L^p(B(0,r))$ SE $p < \frac{n}{2-\lambda}$

SE $\lambda \to 1^-$ $q \to +\infty$ $p \to n$

SE $n > 2 \Rightarrow u \in H^{2,2}(B(0,R))$

PERÒ ANCHE $v(x) = e^{\lambda}$ È SOLUZIONE

INOLTRE $v(x) = u(x)$ $\forall x \in \partial B(0,R)$ QUINDI NON HO LA SOL UNICA.

CONDIZIONE DI CORDES

$\{a_{ij}(x)\}$ VERIFICA LA CONDIZIONE DI CORDES SE $\exists \varepsilon \in (0,1)$ t.c. PER q.o $x \in \Omega$

T.C:
$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x)\right)^2}{\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x))^2} \geq n - 1 + \varepsilon$$

PROP 1 LA CONDIZIONE DI CORDES È EQUIVALENTE ALLA CONDIZIONE A_x DI CAMPANATO

OVVERO $a(x) \in L^\infty(\Omega)$, $\sigma > 0$, $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, $\delta \geq 0$, $\gamma + \delta < 1$ TALI CHE

PER QUASI OGNI $x \in \Omega$ $\forall \{\xi_{ij}\}_{i,j=1\dots n} \in \mathbb{R}^{n^2}$ VALE

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \xi_{ii} - a(x) \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_{ij} \right| \leq \gamma \left(\sum_{i,j=1}^{n} \xi_{ij}^2 \right)^{1/2} + \delta \left| \sum_{i=1}^{n} \xi_{ii} \right|$$

PROP 2 SE $\{a_{ij}\}$ VERIFICA A_x O EQUIVALENTEMENTE ALLORA È UNIF. ELLITTICA.

ESERCIZIO PER $n \geq 3$ VERIFICARE CHE $\{a_{ij}\}$ DEL CONTROESEMPIO NON VERIFICA CORDES.

DIM PROP 2

SIA $\xi_{ij} = \eta_i \eta_j$ CON $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ LA CONDIZIONE A_x DIVENTA

$$\underbrace{\left| \sum_{i,j=1}^{n} \eta_i^2 - a(x) \sum_{i,j=1}^{n} \eta_i \eta_j a_{ij} \right|}_{\geq} \leq \gamma \left(\sum_{i,j=1}^{n} \eta_i^2 \eta_j^2 \right)^{1/2} + \delta \left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \right) =$$

$$= \gamma \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 + \delta \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 = \underbrace{(\gamma + \delta) \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2}_{b}$$

USANDO $|a| < b$ $\quad -b < a < b$, $\quad -a > -b$

$$\Rightarrow \quad a(x) \sum_{i,j=1}^{n} \eta_i \eta_j a_{ij} \geq \left[1 - (\gamma + \delta) \right] \sum_{j=1}^{n} \eta_i^2$$

SIA $M = \sup a(x) < +\infty$, DIVIDO PER M E USO $\frac{a(x)}{M} \leq 1$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \eta_i \eta_j a_{ij} \geq \underbrace{\frac{[1-(\gamma+\delta)]}{M}}_{\nu>0} \|\eta\|_n^2$$

TEO IL PROBLEMA SOPRA AMMETTE SOLUZIONE

DIM SUPPONIAMO CHE $\{a_{ij}(x)\}$ VERIFICHI LA CONDIZIONE A_x

$$a(x) \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_{ij} u(x) = a(x) f(x) \qquad u \in H^2 \cap H^1_0(\Omega)$$

$$\Delta w(x) = \Delta w(x) - a(x) \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_{ij} u(x) + a(x) f(x)$$

$w \in H^2 \cap H^1_0(\Omega)$

CERCO $u(x)$ SOL. DI

$$(*) \begin{cases} u \in H^2 \cap H^1(\Omega) \\ \Delta u = \underbrace{\Delta w}_{\in L^2} - \overbrace{a(x) \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_{ij} u(x)}^{L^2} + \overbrace{a(x) f(x)}^{\in L^2} \end{cases} \quad w \in H^2 \cap H^1_0(\Omega)$$

CON Ω CONVESSO

SIA $\mathcal{T} : H^2 \cap H^1_0 \longrightarrow H^2 \cap H^1_0$

$w \longrightarrow u$ SOL DI $(*)$

RISULTATO CHE VEDREMO: $\forall g \in L^2 \; \exists!\; u \in H^2 \cap H^1_0$ SOL. DI $\Delta u = g$

QUESTO MI DA LA BUONA POSIZIONE DEL FUNZIONALE $\mathcal{T}$.

IN $H^2 \cap H^1_0$ CHE NORMA CI METTO?

$\|u\|_{H^2 \cap H^1_0} = \|\Delta u\|_{L^2}$ DIMOSTRO CHE È EQUIVALENTE A

$$\|u\|_{H^2} = \|u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2} + \|D^2 u\|_{L^2}$$

$\|\Delta u\|_{L^2} \leq C \|u\|_{H^2}$ FACILE.

SE Ω CONVESSO VALE: $\sum_{i,j=1}^{n} \|D_{ij} u\|^2_{L^2} \leq \|\Delta u\|^2_{L^2}$ (MAGG. DI MIRANDA-TALENTI)

$C_1 \|u\|_{H^2} \leq \|\Delta u\|_{L^2}$ VALE CON IL TEO DI $\Delta u = g$ + BANACH OPEN MAP.

PERCHÉ $\Delta : H^2 \cap H^1_0 \longrightarrow L^2$ È SURIETTIVO

OPPURE USANDO MIRANDA-TALENTI

IDEA DIM. MIRANDA TALENTI : i) $\sum_{i,j=1}^{n} (D_{ij} u)^2 + \sum_{i,j=1}^{n} [D_{ii} u D_{jj} u - (D_{ij} u)^2] = (\Delta u)^2$ FACILE

DIFFICILE $\longrightarrow$ ii) $\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} D_{ii} D_{jj} u - (D_{ij} u)^2 dx = -(n-1) \int_{\partial\Omega} H(x) \sum_{i=1}^{n} (D_i u)^2 dx$

DOVE $H(x)$ È LA CURVATURA MEDIA DI $\partial\Omega$ IN x

e $H(x) \leq 0$ se Ω è CONVESSO

RESTA DA PROVARE CHE $\mathcal{T}$ È UNA CONTRAZIONE

$$\| \mathcal{T}(w_1) - \mathcal{T}(w_2) \|_{H^2 \cap H^1_0} = \| u_1 - u_2 \|_{H^2 \cap H^1_0} = \| \Delta (u_1 - u_2) \|_{L^2} =$$

$$= \| \Delta (w_1 - w_2) - a(x) \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_{ij} (w_1(x) - w_2(x)) \|_{L^2} =$$

$$= \| \sum_{i=1}^{n} D_{ii} (w_1 - w_2) - a(x) \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_{ij} (w_1(x) - w_2(x)) \|_{L^2}$$

$$= \left\{ \int_\Omega \left| \sum_{i=1}^{n} D_{ii} (w_1 - w_2) - a(x) \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_{ij} (w_1 - w_2) \right|^2 dx \right\}^{1/2} \overset{\text{uso } A_x}{\leq}$$

$$\leq \left\{ \int_\Omega \left| \gamma \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} [D_{ij} (w_1 - w_2)]^2 \right\}^{1/2} + \delta \left| \sum_{i,j=1}^{n} D_{ii} (w_1 - w_2) \right| \right|^2 dx \right\}^{1/2} \leq$$

USANDO $(\gamma a + \delta b)^2 \leq \gamma(\gamma+\delta) a^2 + \delta(\delta+\gamma) b^2$

$$\leq \left\{ \int_\Omega \gamma(\gamma+\delta) \sum_{i,j=1}^{n} [D_{ij} (w_1 - w_2)]^2 dx + \int_\Omega \delta(\gamma+\delta) \left| \sum_{i,j=1}^{n} D_{ii} (w_1 - w_2) \right|^2 dx \right\}^{1/2}$$

MA $$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} [D_{ij} (w_1 - w_2)]^2 \overset{\text{MIRANDA-TALENTI}}{\leq} \| \Delta (w_1 - w_2) \|^2_{L^2} = \int_\Omega | \Delta (w_1 - w_2) |^2$$

$$\leq \left\{ \gamma(\gamma+\delta) \int | \Delta (w_1 - w_2) |^2 + \delta(\gamma+\delta) \int | \Delta (w_1 - w_2) |^2_{L^2} \right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq (\gamma+\delta) \left(\int_\Omega | \Delta (w_1 - w_2) |^2 dx \right)^{1/2} = \underbrace{(\gamma+\delta)}_{<1} \| w_1 - w_2 \|_{H^2 \cap H^1_0}$$

QUINDI È UNA CONTRAZIONE

LEZIONE 06

Titolo nota 16/10/2019

$$\begin{cases} u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) & \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ LIMITATO} \\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, D_{ij} u(x) = f(x) & \text{q.o in } \Omega \end{cases}$$

$\{a_{ij}(x)\}_{i,j=1 \dots n}$ UNIF ELLITTICO SU Ω

$a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$

ABBIAMO VISTO CHE CON SOLO L'UNIF ELLITTICITÀ NON È BEN POSTO PER $n \geq 3$

IL PROBLEMA È BEN POSTO SE

OPZIONE a) AGGIUNGO IPOTESI DI TIPO ALGEBRICHE TIPO CORDES O EQUIVALENTEMENTE COND. A_x DI CAMPANATO

OPZIONE b) CHIEDERE REGOLARITÀ $C^{0,\alpha}(\Omega)$ AI COEFF $a_{ij}(x)$ CON $\alpha \in (0,1]$

PROP SE $n = 2$ IL PROBLEMA È BEN POSTO PERCHÈ VALE

$\{a_{ij}(x)\}$ UNIF ELLITTICO $\Leftrightarrow$ $\{a_{ij}(x)\}$ VERIFICA A_x

DIM PROP $\Leftarrow$) VISTO LA VOLTA SCORSA

OSS NON È RESTRITTIVO SUPPORRE a_{ij} SIA SIMMETRICA

DIM OSS PERCHÈ $a_{ij}(x) = \underbrace{\dfrac{a_{ij}+a_{ji}}{2}}_{a_{ij}^{+}\ \text{PARTE SIMMETRICA}} + \underbrace{\dfrac{a_{ij}-a_{ji}}{2}}_{a_{ij}^{-}\ \text{PARTE ANTISIMMETRICA}}$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{+} D_{ij} u + \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{-} D_{ij} u}_{=0}$$

$\to$ DICO CHE

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{-} D_{ij} u(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{n} a_{ij} D_{ij}(x) - a_{ji} \underbrace{D_{ij} u}$$

IN H^2 IN QUANTO COMPLETAMENTO DI C^2

VALE $D_{ij} = D_{ji}$

TORNO ALLA DIM DELLA $\Rightarrow$) DELLA PROP

SIA $A(x)=\{a_{ij}(x)\}$ SIANO $\lambda_1(x)$ e $\lambda_2(x)$ AUTOVALORI (ESISTONO SEMPRE PER L'OSS)

e SIA $I=\{\delta_{ij}\}$

SIA $a(x)\in L^\infty(\Omega)$ TALE CHE $a(x)\geq \delta>0$

SIA $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1(x) & 0 \\ 0 & \lambda_2(x) \end{pmatrix}$

$I-a(x)\Lambda$ e $I-a(x)A(x)$ HANNO GLI STESSI AUTOVALORI

ALLORA LE DUE MATRICI HANNO STESSA NORMA

$$\|I-a(x)\Lambda(x)\|_{\mathbb{R}^4} = \|I-a(x)A\|_{\mathbb{R}^4}$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 1-a(x)\lambda_1(x) \\ 1-a(x)\lambda_2(x) \end{pmatrix} \right\|_2$$

RICORDIAMO CHE LA CONDIZIONE A_x è con $\delta\geq 0$ e $0<\gamma<1$

$$\left|\sum_{i=1}^n \xi_{ii} - a(x)\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_{ij}\right| \leq \gamma\left(\sum_{i,j=1}^n \xi_{ij}^2\right)^{1/2} + \delta\sum_{i=1}^n \xi_{ii}$$

$$=$$

$$\left|(\{\delta_{ij}\}|\{\xi_{ij}\}) - a(x)(\{a_{ij}\}|\{\xi_{ij}\})\right| \leq \gamma\|\{\xi_{ij}\}\| + \delta(\{\xi_{ij}\}|\{\delta_{ij}\})$$

CERCO CON $\delta=0$

$$|(I-a(x)A|\{\xi_{ij}\})| \leq \gamma\|\xi\|$$

$$\Rightarrow \left|\left(I-a(x)A \,\middle|\, \frac{\xi}{\|\xi\|}\right)\right| \leq \gamma \quad \forall \xi$$

$\Rightarrow$ BASTA TROVARE UNA $a(x)$ e un $0<\gamma<1$

TALI CHE

$$\|I-a(x)A\|^2_{\mathbb{R}^4} \leq \gamma^2$$

$$=$$

$$\|I-a(x)\Lambda\|^2_{\mathbb{R}^4}$$

$$=$$

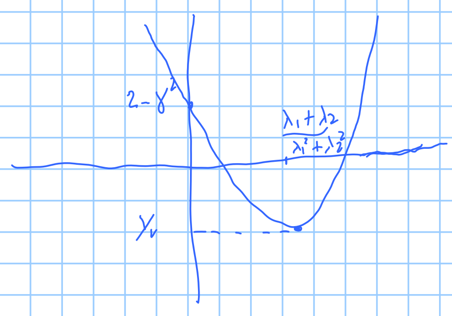
$$(1-a(x)\lambda_1(x))^2+(1-a(x)\lambda_2(x))^2 = \left\| \begin{pmatrix} 1-a(x)\lambda_1(x) \\ 1-a(x)\lambda_2(x) \end{pmatrix} \right\|^2_{\mathbb{R}^2}$$

$$=$$

$$1+a^2\lambda_1^2+2+a^2\lambda_2^2-2a\lambda_1-2a\lambda_2<\gamma^2$$

$$a^2(\lambda_1^2+\lambda_2^2)-2a(\lambda_1+\lambda_2)+2-\gamma^2<0$$

$$Y_v = 2-\gamma^2-\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}<0$$



$$2-\gamma^2 < \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}$$ TROVO UN $\gamma \in (0,1)$

OSS $m-(1-\varepsilon) < \frac{(A|I)^2}{\|A\|}$ È ANCHE LA COND. DI CORD.

CON $\gamma^2 = (1-\varepsilon)$ $\varepsilon \in (0,1)$ e $m=2$

SE $M = \max\left\{\sup_\Omega \lambda_1(x), \sup_\Omega \lambda_2(x)\right\}$

$\nu = \min\left\{\inf_\Omega \lambda_1(x), \inf_\Omega \lambda_2(x)\right\}$ (OSS ν è LA COND. DI UNIF. ELLITTICITÀ)

$\Delta > 0$ $$(\lambda_1+\lambda_2)^2 - (\lambda_1^2+\lambda_2^2)(2-\gamma^2) \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

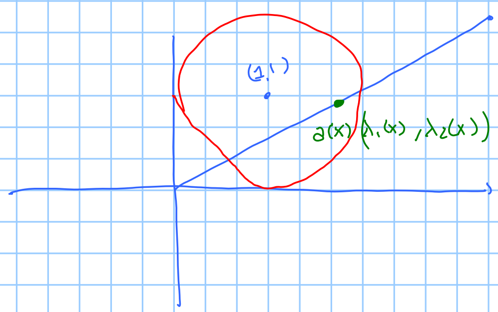
$$\frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2} \geq 1-\gamma^2$$

$$\Vert$$

$$\frac{\cancel{2}\nu^2}{2M^2} \geq 1-\gamma^2 \Rightarrow \boxed{\gamma^2 \geq 1-\frac{\nu^2}{M^2}}$$

IDEA $$\|\underset{(1,1)}{\underset{\wr\wr}{I}} - a(x)\underset{(\lambda_1(x),\lambda_2(x))}{\underset{\wr\wr}{\Lambda}}\|$$

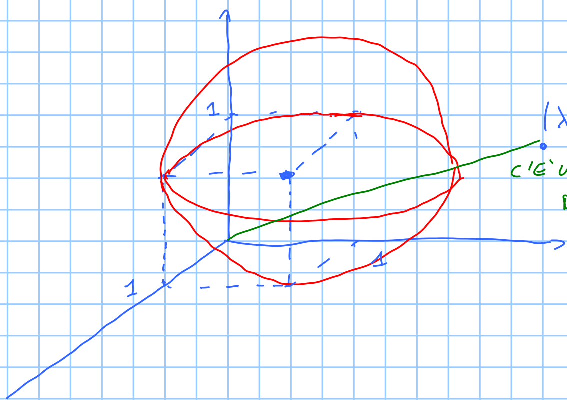
$(\lambda_1(x), \lambda_2(x)) \in I^\circ$ QUAD PER UNIF. ELLITTICO



FINISCE A DISTARE MENO DI 1 DA $(1,1)$

IN $\mathbb{R}^3$

$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in I^\circ$ OTTANTE PERCHÉ UNIF. ELLIT.



C'È UN TRATTO CHE NON FINISCE DENTRO LA SFERA ECCO PERCHÉ IN DIMENSIONE $m \geq 3$ L'UNIFORME ELLITTICITÀ NON BASTA A DARE CORDES

OSS SE VOGLIAMO SOL. IN DIM $m \geq 3$ CON COEF L^∞ CON CONDIZIONI + GENERALI DOBBIAMO PARLARE DI SOL. VISCOSE

PRINCIPI DEL MASSIMO

DEF UNA SOLUZIONE CHE SODDISFA

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} D_{ij} u(x) \geq 0 \quad (\leq 0) \quad \text{IN } \Omega$$

SI CHIAMA SOPRA-SOLUZIONE (O SOTTO SOLUZIONE) DI

$$(*) \quad \sum a_{ij} D_{ij} u(x) = 0$$

PRINCIPIO DEL MAX (MW)

SIA $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ SOTTOSOLUZIONE (SOPRASOL) DI $(*)$ CON (Ω LIMITATO?)

$a_{ij}(x) \in C^0(\bar{\Omega})$, UNIFORMEMENTE ELLITTICI SU Ω ALLORA:

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u \quad \left(\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u \right)$$

DIM SUPPONIAMO CHE $\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x) D_{ij} u(x) > 0 \ \forall x \in \Omega$ E SE PER ASSURDO

$\exists \ x_0 \in \mathring{\Omega}$ t.c. $\max_{\bar{\Omega}} u = u(x_0)$

ALLORA $H(x) = \{ D_{ij} u \}_{i,j=1 \ldots m} \Rightarrow H(x_0)$ SEMIDEFINITA NEG.

$A(x) = \{ a_{ij}(x) \}_{i,j=1 \ldots m} \Rightarrow$ è DEF POSITIVA PER COND. DI ELLITTICITÀ

$$\Rightarrow (A(x_0) \mid H(x_0)) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x_0) H(x_0) \leq 0$$

PERCHÉ

$$U^* A U = \Lambda_A$$

$$V^* H V = \Lambda_H$$

$$(A \mid H) = (U U^* A U U^* \mid V V^* H V V^*) = (U \Lambda_A U^* \mid V \Lambda_H V^*) =$$

$$= (\Lambda_A \underbrace{U^* V}_{Q} \mid \underbrace{U^* V}_{Q} \Lambda_H) = (\Lambda_A Q \mid Q \Lambda_H) =$$

$$= \sum_{i,j} \underset{\vee\!|\, 0}{a_{ii}} \ \underset{\vee\!|\, 0}{q_{ij} q_{ij}} \ \underset{\wedge\!|\, 0}{h_{jj}} \leq 0$$

SE $\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x) D_{ij} u(x) \geq 0$

$$u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon \|x\|^2 \quad \varepsilon > 0$$

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} D_{ij} u_\varepsilon(x) > 0$$

$$\Rightarrow \max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon(x) = \max_{\partial\Omega} w_\varepsilon(x)$$

$$\max_{\overline{\Omega}} (u + \varepsilon\|x\|^2) \quad \max_{\partial\Omega}(u + \varepsilon\|x\|^2)$$ PER $\varepsilon \to 0$ (TO LA TESI.

COROLLARIO

SE $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ $\quad a_{ij} \in C^0(\overline{\Omega})$ UNIF. ELLITTICO E RISOLVE

$$\sum a_{ij}(x) D_{ij} u(x) = 0$$

ALLORA $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$ e $\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$

DIM u RISPETTA SIA PRINCIPIO MAX e MIN.

PROP DATO IL PROBLEMA DI DIRICHLET (CON IPOTESI DEL COROLLARIO)

$$\begin{cases} \sum a_{ij}(x) D_{ij} u(x) = f(x) & \text{in } \Omega \\ u(x) = g(x) & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

$f \in C^0(\overline{\Omega})$ $g \in C^0$ in $\partial\Omega$ AMMETTE UNICITÀ DELLA SOLUZIONE.

DIM SE u_1 e u_2 RISOLVONO $\Rightarrow$ $V = U_1 - U_2$ RISOLVE

$$\begin{cases} \sum a_{ij} D_{ij} V(x) = 0 & \text{in } \Omega \\ V(x) = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\Rightarrow \max_{\overline{\Omega}} V(x) = \max_{\partial\Omega} u(x) = 0 \quad e \quad \min_{\overline{\Omega}} V(x) = \min_{\partial\Omega} V(x) = 0 \Rightarrow V \equiv 0 \text{ in } \Omega$$

PRINCIPIO DI MASSIMO L^∞ (ALEKSANDROV - BAKEL'MAN - PUCCI)

SIA $$A(x,D) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij}(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i D_i u(x) + c(x) u(x)$$ ELLITTICO

SIA $D(x) = \det \{ a_{ij}(x) \}$ $\quad \mathcal{D}^* = [D(x)]^{1/n}$

$\lambda(x) \leq \mathcal{D}^*(x) \leq M(x)$ $\quad \lambda, M$ PIÙ PICCOLO E GRANDE AUTOVALORE

$u^\pm(x) = \max(\pm u, 0)$ $\quad a_{ij}(x) \in L^\infty(\Omega)$, $\dfrac{b_i(x)}{\mathcal{D}^*(x)} \in L^n(\Omega)$, $\dfrac{f(x)}{\mathcal{D}^*(x)} \in L^n(\Omega)$

$b(x) = \sup\limits_{\substack{i=1\dots n \\ x \in \Omega}} |b_i(x)|$ $\quad c(x) \leq 0$

SE $A(x,D)u \geq f(x) \quad x \in \Omega$

SE $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap W^{2,n}_{loc}(\Omega)$

$$\Rightarrow \quad \sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C \left\| \frac{f(x)}{\mathcal{D}^*(x)} \right\|_{L^n(\Omega)}$$

LEZIONE 07

Titolo nota 17/10/2019

ERRATA CORRIGE ELLITTICITÀ FORTE

$\exists \nu > 0 \; : \; \forall \xi \in \mathbb{R}^{Nm}$ e $\forall x \in \Omega$

$$\nu \sum_{|\alpha|=m} \|\xi^{\alpha}\|^2_{\mathbb{R}^{Nm}} \leq \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \left(A_{\alpha\beta}(x)\, \xi^{\beta} \,\middle|\, \xi^{\alpha} \right)_{Nm}$$

con $\xi = \begin{pmatrix} \xi_{11} & & \xi_{1m} \\ \vdots & & \\ \xi_{N1} & \cdots & \xi_{Nm} \end{pmatrix} \Rightarrow \xi^{\alpha} = \begin{pmatrix} \xi_{11}^{\alpha_1} & \xi_{12}^{\alpha_2} & \cdots & \xi_{1m}^{\alpha_m} \\ \vdots & & & \\ \xi_{N1}^{\alpha_1} & \cdots & & \xi_{Nm}^{\alpha_m} \end{pmatrix}$

È VERA DIM. ELL FORTE $\Rightarrow$ ELL.

$\xi_i^{\alpha} = \lambda^{\alpha} \eta_i$ è IMPRECISO

DOVREBBE ESSERE $\xi_{ij}^{\alpha_j} = \lambda_j^{\alpha_j} \eta_i \quad i = 1 \ldots N \quad j = 1 \ldots m$

$\lambda = (\lambda_1 \ldots \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$

$\eta = (\eta_1 \ldots \eta_N) \in \mathbb{R}^N$

OBIETTIVO: (ESISTENZA E UNICITÀ DEL PROBLEMA DI DIRICHLET)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO LIMITATO

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} u(x) = f(x) & \text{in } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

PROBLEMA DI DIRICHLET

$\{a_{ij}(x)\}$ UNIFORMEMENTE CONTINUA SU Ω, cioè $\exists \; \nu > 0$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \nu \|\xi\|^2_{\mathbb{R}^n} \quad \forall x \in \Omega \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

$a_{ij}(x) \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, $\alpha \in (0,1)$ ALLORA ESISTE UNICA $u(x) \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ SOL e VALE

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \leq C \|f\|_{C^{0\alpha}}$$

ASSUMIAMO PER BUONO IL SEGUENTE TEO DI REGOLARITÀ

SOTTO LE STESSE IPOTESI PER a_{ij} e f E u È LA SOL DEL PROBLEMA DI DIRICHLET

$\Rightarrow u \in H^2 \cap H^1_0(\Omega)$ e VALE

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \leq C(\alpha, \nu, \|a_{ij}\|_{C^{0\alpha}}) \left\{ \|f\|_{C^{0\alpha}} + \sum_{i,j=1}^{n} \|D_{ij} u\|^2_{0,\Omega} \right\}$$

C È CRESCENTE RISPETTO A $\|a_{ij}\|_{C^{0,\alpha}}$

TEO

NELLE IPOTESI DEL TEO PRECEDENTE ALLORA VALE

(A ESSERE PRECISI $\exists C>0 : \forall f$ LA CORR. SOL. u VERIFICA)

$$\sum_{i,j=1}^{n} \|D_{ij} u\|^2_{0,\Omega} \leq C \|f\|^2_{C^{0,\alpha}}$$

DIM SE PER ASSURDO LA TESI FOSSE FALSA, $\exists \Omega$ APERTO LIMITATO E $\{a_{ij}\} \in C^{0,\alpha}(\Omega)$

UNIF. ELLITTICO TC $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists f_k \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ e $u_k \in H^2 \cap H^1_0(\Omega)$ SOL. DI DIR.

TC VALE

$$\underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} \|D_{ij} u\|^2_{0,\Omega}}_{=\|D^2 u\|^2_{0,2}} > k \|f_k\|^2_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \Rightarrow \underbrace{1 = \sum_{i,j=1}^{n} \|D_{ij} v_k\|^2_{0,\Omega} \geq k \|g_k\|^2_{C^{0,\alpha}}}_{(*)}$$

CHIAMO $v_k = \dfrac{u_k}{\|D^2 u\|_{0,\Omega}}$ $\qquad g_k = \dfrac{f_k}{\|D^2 u\|_{0,\Omega}}$

$\Rightarrow$ v_k RISOLVE

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} v_k(x) = g_k \\ v_k(x) = 0 \end{cases}$$

$g_k \in C^{0,2}$ (PERCHÉ È f_k DIVISO UNA COSTANTE)

QUESTO PROBLEMA È NELLE IPOTESI DEL TEO DI REGOLARITÀ

$$\sum_{i,j=1}^{n} \|D_{ij} v_k\|^2_{C^{0,\alpha}} \leq C \left\{ \|g_k\|_{C^{0,\alpha}} + \|D^2 v_k\|_{0,\Omega} \right\}$$

USANDO (*)

$$\Rightarrow \sum_{i,j=1}^{n} \|D_{ij} v_k\|_{C^{0,\alpha}} \leq C \left\{ \frac{1}{k} + 1 \right\}$$

ASCOLI-ARZELÀ

$\Rightarrow \{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ È EQUILIMITATO IN $C^{2,\alpha}(\Omega) \Rightarrow \exists v_{n_k} \to v$ in $C^2(\Omega)$

INOLTRE $g_k \to 0$ $\Rightarrow$ v RISOLVE $\begin{cases} \sum a_{ij} D_{ij} v = 0 & \Omega \\ v = 0 & \partial\Omega \end{cases}$ $\Rightarrow$ $v \equiv 0$ PER TEO UNICITÀ VOLTA SCORSA

MA QUESTO È ASSURDO PERCHÉ

$v_k \to v$ UNIF

$$1 = \|D^2 v_k\|^2_{0,\Omega} = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega |D_{ij} v_k|^2 \leq n|\Omega| \max_{ij} \sup_\Omega |D_{ij} v_k|^2 \leq$$

$$\leq 2n\,|\Omega| \max_{ij} \underbrace{\sup_{\Omega} |D_{ij} v|^2}_{\substack{|||\\ 0}} = 0 \quad \text{ASSURDO!}$$

TEO (ESISTENZA E UNICITÀ DEL PROBLEMA DI DIRICHLET)

NELLE IPOTESI DEL TEOREMA PRECEDENTE IL PROBLEMA DI DIRICHLET AMMETTE UNICA SOL $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ E $\exists c > 0$ TALE CHE

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq c\,\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}$$

DIM SI USA IL METODO DI CONTINUITÀ APPLICATO ALLA FAMIGLIA DI OPERATORI:

$$A_t u = t\,\nu\,\Delta u - (1-t)Au, \quad t \in [0,1] \ e \ Au = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij} D_{ij} u$$

PRENDENDO COME SPAZI $X = C^{2,\alpha}(\Omega)$ e $B = C^{0,\alpha}(\Omega)$

SE $t=1$ $\quad A_1 = \nu \cdot \Delta u$ È UN ISOMORFISMO TRA X e B

(VEDI PROSSIME LEZIONE)

DOBBIAMO PROVARE CHE $\exists c > 0 \ \forall u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ $\left(\underset{\forall t}{\text{ma}}\ A_t : C^{2,\alpha}(\Omega) \to C^{0,\alpha}(\Omega) \right)$

DA VERIFICARE CHE $A_t u \in C^{0,\alpha}$ GRAZIE ALL'UNIF. ELLITTICITÀ e a_{ij} HÖLDERIANI

$$\|A_t u - A_s u\|_{C^{0,\alpha}} \leq c\,|t-s|\,\|A_t u\|_{C^{0,\alpha}}$$

$$\| t\nu\Delta u - (1-t)Au - s\nu\Delta u + (1-s)Au \| =$$

⊗ OPPURE QUI.

$$= \| (t-s)\nu\Delta u - (t-s)Au \| \leq |t-s|\,\| \nu\Delta u - Au \| =$$

$$= |t-s|\, \Big\| \sum_{ij=1}^{n} (\delta_{ij}\nu - a_{ij}) D_{ij} u \Big\|_{C^{0,\alpha}} \overset{⊗}{\leq}$$

$$\leq n^2 |t-s| \left\{ \max_{ij} \|a_{ij}\|\ \|D^2 u\|_{C^0(\Omega)} + \max_{ij} \|a_{ij}\|\ \|D^2 u\|_{C^{0,\alpha}} \right\} \leq$$

$$\leq c\left(n, \|a_{ij}\|_{C^{0,\alpha}}\right) |t-s|\ \|D^2 u\|_{C^{0,\alpha}} \leq$$

LA NORMA $C^{0,\alpha}$ MAGGIORA LA NORMA C^0

$$\leq c\left(n, \|a_{ij}\|_{C^{0,\alpha}}\right) |t-s|\ \|A_t u\|_{C^{0,\alpha}}$$

CREDO QUI ⊗

$\left(\text{HA SCRITTO} \quad \|\nu\delta_{ij} t - (1-t) a_{ij}\|_{C^{0,\alpha}} \leq (1-t)\,\|a_{ij}\|_{C^{0,\alpha}} \right)$

TEO MAGGIORAZIONE DI POINCARÉ

SIA $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO LIMITATO CON $\partial\Omega$ SUFF REGOLARE

SIA $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$, $p>1$, $\exists\, C>0$ tc

$$\int_\Omega |u|^p\, dx \le C \int_\Omega \|\nabla u\|^p dx \quad \text{con} \quad c = \frac{p^p}{n^p}(d\Omega)^p$$

DIM

con $y_i \in \Omega$

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx = \int_\Omega |u(x)|^p \cdot 1\, dx = \int_\Omega |u(x)|^p D_i(x_i - y_i)\, dx =$$

$$= \underbrace{\int_{\partial\Omega} |u(x)|^p (x_i - y_i)\cdot \nu_{ext}}_{=0} - \int_\Omega D_i\left[|u(x)|^p\right](x_i - y_i)\, dx =$$

$$= -\int_\Omega p\, \mathrm{Sgn}\, u(x)\, |u(x)|^{p-1} D_i u(x)\, (x_i - y_i)$$

SOMMO SU $i = 1 \dots n$

$$\int_\Omega |u(x)|^p = -\frac{p}{n}\int_\Omega \mathrm{Sgn}(u(x))\,|u(x)|^{p-1} \underbrace{\sum_{i=1}^n D_i u \cdot (x_i - y_i)}_{=(\nabla u \mid x-y)}$$

PASSANDO AI MODULI

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx \le \frac{p}{n}\int_\Omega |u(x)|^{p-1} \left|(\nabla u \mid x-y)\right| dx \le$$

$d\Omega$ = DIAMETRO DI Ω

$$\le \frac{p}{n}\int_\Omega |u(x)|^{p-1} \|\nabla u\| \cdot \|x-y\|\, dx \le$$

$$\le \frac{p}{n} d\Omega \int_\Omega |u(x)|^{p-1} \|\nabla u\|\, dx \overset{\text{HOLDER}}{\le}$$

$$\cancel{\int_\Omega |u(x)|^p dx} \le \frac{p}{n} d\Omega \left(\int_\Omega |u(x)|^p\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega \|\nabla u\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\int_\Omega |u(x)|^p\right)^{1/p} \le \frac{p}{n} d\Omega \left(\int_\Omega \|\nabla u\|^p\right)^{1/p}$$

OSS ABBIAMO VISTO CHE IN $H^2 \cap H^1_0(\Omega)$ $\|\cdot\|_{H^2} = \|\ \|_0 + \|\ \|_1 + \|\ \|_2$

IN $H^1_0(\Omega)$ $\|\ \|_{H^1_0} = \|\cdot\|_0 + \|\cdot\|_1$

IN $H^{1,p}(\Omega)$ POSSO PRENDERE $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$

Ω LIMITATO E SUFF. REGOLARE, USO POINCARÉ

$$\|\nabla u\|_{L^p} \le \|u\|_{H^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|\nabla u\|_{L^p} \le (C+1)\|\nabla u\|_{L^p}$$

EQUIVALENTEMENTE IN $H^{2,2}$ POSSO PRENDERE $\|D^2 u\|_{L^2}$

$$\|D^2 u\|_{L^2} \le \|u\|_{H^{2,2}} \overset{\text{POINCARÉ}}{\le} C\|\nabla u\|_{L^2} + \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)}$$

MA $\|\nabla u\|^2_{L^2} = \int_\Omega (\nabla u | \nabla u) = \int_\Omega \sum_{i=1}^n D_i u\, D_i u \, dx \overset{\text{PER PARTI}}{=}$

$$= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \underbrace{D_i (D_i u \cdot u)}_{=0 \text{ AL BORDO}} - \int_\Omega \Delta u \cdot u$$

$$\|\nabla u\|^{\cancel{2}}_{L^2} = \int_\Omega |\nabla u|^2 = \int_\Omega \Delta u \cdot u \overset{\text{HÖLDER}}{\le} \left(\int_\Omega |\Delta u|^2\right)^{1/2} \left(\int_\Omega u^2\right)^{1/2} \overset{\text{POINCARÉ}}{\le} \|\Delta u\|_{L^2} \cdot C\, \cancel{\|\nabla u\|_{L^2}}$$

$$\Rightarrow \|\nabla u\|_{L^2} \le C\|\Delta u\| \le C\|D^2 u\|_{L^2}$$

IN MODO ANALOGO LO FACCIO IN $H^{2,p}(\Omega)$ CON UN PO' DI ATTENZIONE A HÖLDER.

LEZIONE 08

Titolo nota 23/10/2019

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^M$ APERTO LIMITATO, $\partial\Omega$ SUFF REGOLARE

$u \in H_0^{1,p}(\Omega)$

$\exists c>0$ tc $\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \le c \int_\Omega |\nabla u|^p$ con $c = \frac{p^p}{M^p}(d_\Omega)^p$

QUALE È LA MIGLIOR COSTANTE c?

CONSIDERIAMO $\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \\ u \in H_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\} \end{cases} \overset{\text{TEO SPETTRALE}}{\Longrightarrow} \exists \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \quad 0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots$

$\forall \lambda$ AUTOVALORE SU $u^{\neq 0}$ È L'AUTOFUNZIONE RELATIVA

$$\int_\Omega -\Delta u \cdot u = \int_\Omega \lambda u^2$$

$\shortparallel$ - SCARICO LA DERIVATA

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 = \int_\Omega \lambda u^2 \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega |\nabla u|^2 = \lambda \int_\Omega u^2$$

con λ uno dei λ_n

$$\Rightarrow \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega |u|^2} = \lambda_n$$

ALLORA LA COSTANTE MIGLIORE IN POINCARÉ

$$\frac{1}{C(\Omega,M,p)} \le \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega |u|^2} \Rightarrow \frac{1}{C} = \min\left\{ \frac{\int_\Omega \|\nabla u\|^2}{\|u\|^2_{L^2}} \, . \, u \in H_0^1(\Omega) \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C} = \lambda_0 = \text{minimo degli AUTOVALORI}$$

PROBLEMA: GLI AUTOVALORI DI $-\Delta$ DIPENDONO IN MODO PESANTE DA Ω e m

POINCARÉ PER DERIVATE SUCCESSIVE

$u \in H^{m,p}(\Omega)$

$$\sum_{|\alpha| \le m-1} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \le c(m,p,\Omega,n) \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p$$

ABBIAMO DETTO $H^{-m} = \left(H^m_0(\Omega)\right)'$ $m \geq 1$

CARATTERIZZAZIONE DI H^{-m}

$\forall F \in H^{-m}$

$F = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha f_\alpha(x)$ CON $f_\alpha \in L^2(\Omega)$ DERIVATA NEL SENSO DELLE DISTRIBUZIONI

$$\forall \varphi \in C_0^\infty \quad \langle F, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha f_\alpha(x)\, \varphi(x)\, dx = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^\alpha \int_\Omega f_\alpha(x)\, D^\alpha \varphi = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^\alpha \langle f_\alpha, D^\alpha \varphi \rangle$$

DIM CARATTERIZZAZIONE DI H^{-m}

POSSIAMO COSTRUIRE UNA CORRISPONDENZA

$$u \in H^m_0(\Omega) \longrightarrow D^\alpha u \in L^2(\Omega), \quad |\alpha| \leq m$$

$V = V_1 \times \dots \times V_k$ CON $K =$ TUTTE LE POSSIBILI DERIVATE α-ESIME

CIOÈ $\exists\, \alpha_1 \dots \alpha_k$ t.c. $|\alpha_i| \leq m$ e $V_i = \underbrace{D^{\alpha_i}\left(H^m_0(\Omega)\right)}_{V_i} \subset L^2(\Omega)$ SOTTOSPAZI

$\Rightarrow V \subset \left[L^2(\Omega)\right]^K$

VOGLIO STABILIRE

$$\left(H^{m,2}(\Omega)\right)' \longleftrightarrow \left(\left[L^2(\Omega)\right]^K\right)'$$

OGNI APPLICAZIONE LINEARE CONTINUA SU V, PUÒ ESSERE ESTESA IN MODO UNICO AD UNA LINEARE E CONTINUA SU $\left[L^2(\Omega)\right]^K$ PER IL TEOREMA DI HAN-BANACH

$\forall L : \left[L^2(\Omega)\right]^K \longrightarrow \mathbb{R}$

SI SCRIVE COME $L = L_1 + \dots + L_K$ DOVE $L_i : \underset{\supset V_i}{L^2(\Omega)} \longrightarrow \mathbb{R}$ È LINEARE E CONTINUO

MA PER IL TEOREMA DI RIESZ $\exists g_i \in L^2(\Omega)$ $L_i(v) = \int_\Omega g_i(v)\, v(x)\, dx$

E $\|L_i\|_{L^{2'}} = \|g_i\|_{L^2(\Omega)}$

ALLORA $L(\varphi) = \sum_i^K \int_\Omega g_i\, \varphi$

$L_i(\varphi)$ CON $\varphi \in V_i$ $\quad L_i(\varphi) = \int_\Omega g_i\, D^\alpha u \overset{\text{RINOMINO } g_i = g_\alpha}{=} \int_\Omega g_\alpha\, D^\alpha u$

$\Downarrow$

$\exists u \in H^m_0$, $\exists \alpha$ t.c. $D^\alpha u = \varphi$

$$\Rightarrow L(\varphi) = \sum_{i=1}^K \int_\Omega g_i\, \varphi = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega g_\alpha\, D^\alpha u = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^\alpha \langle D^\alpha g_\alpha, \varphi(x) \rangle$$

CHIAMO $(-1)^{\alpha} g_{\alpha} = f_{\alpha}$

RIVEDERE BENE

TEO ESISTENZA E UNICITÀ

$u \in H_0^1(\Omega)$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, D_i u\, D_j \varphi = \langle F, \varphi \rangle$$

$F \in H^{-1}(\Omega)$

$a_{ij}(x) \in L^{\infty}(\Omega)$, UNIF. ELLITTICO

$\exists\, \nu > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geq \nu \|\xi\|^2$

$\Rightarrow$

$\forall F \in H^{-1}(\Omega)$

$\exists$ unica $u \in H^1(\Omega)$ sol. di

$$\begin{cases} -\sum D_i\left(a_{ij} D_j u\right) = F = \sum D_i f_i \\ u = 0 \text{ su } \partial\Omega \end{cases}$$

$\forall F \in H^{-1}(\Omega)$

E VALE

$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|F\|_{H^{-1}(\Omega)}$

DOVE $\|F\|_{H^{-1}} = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^2(\Omega)} \;\middle|\; F = \sum_{i=1}^{n} D_i f_i ,\ f_i \in L^2 \right\}$

DIM

CASO PARTICOLARE $\begin{cases} -\Delta u = F \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$

$(*)$ $\sum_{i=1}^{n} \int D_i u\, D_i \varphi = \langle F, \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ sono densi in $H_0^1(\Omega)$

infatti $H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^{\infty}(\Omega)}^{H_0^1}$ (chiusura rispetto alla norma)

MA $\forall v, w \in H_0^1(\Omega)$

$(v|w)_{H_0^1} = \sum_{i=1}^{n} \int D_i v\, D_i w$ è un prodotto scalare su $H_0^1(\Omega)$ (per Poincaré $(v,v)_{H_0^1} \geq \frac{1}{c} \|v\|_{L^2}^2$)

ALLORA $(*)$ $(v|\varphi) = \langle F, \varphi \rangle \Rightarrow$ per Riesz $\exists!\, \bar{u} \in H_0^1(\Omega)$ t.c.

$$(\bar{u}, \varphi)_{H_0^1(\Omega)} = \langle F, \varphi \rangle \quad e \quad \|\bar{u}\|_{H_0^1} = \|F\|_{H^{-1}} \text{ per Riesz}$$

OSS. Questa $\bar{u}$ è una sol. debole perché in $H^1(\Omega)$ $-\Delta u$ non ha senso

OSS 2: Il teo di sopra se $a_{ij}(x)$ è simmetrica è semplice

perché in $H_0^1(\Omega)$ metto il prodotto scalare

$$(v,w)_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{i,j=1}^{n} \int a_{ij}(x)\, D_i v\, D_j w$$

e l'ellitticità

$$\|v\|_{(*)}^2 = (v|v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij} \underset{\xi_i}{D_i v}\, \underset{\xi_j}{D_j v} \geq \nu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |D_i v|^2 = \nu \|v\|_{H_0^1}$$

e questo mi dà la def. positiva

NOTIAMO

TANTO IL MODULO È SUP. PERCHÉ È POSITIVO

$$\|v\|_{(*)}^2 = \left|\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij} D_i v D_j v\right| \leq \max \|a_{ij}\|_\infty \sum_{i,j=1} \int_\Omega D_i v D_j v \leq$$

PROBLEMA HO GIÀ I CHE J

$$\leq \max_{ij} \|a_{ij}\|_{L^\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \int (D_i v)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \int |D_i v|^2\right)^{1/2} = M \|\nabla v\|_{L^2} = M \|v\|_{H_0^1}$$

QUINDI $\|F\|_{H^{-1}} = \sup_{v\neq 0} \frac{|\langle F, v\rangle|}{\|v\|_{H_0^1}} \leq M \sup \frac{|\langle F, v\rangle|}{\|v\|_*}$

QUINDI F È LINEARE E CONTINUO ANCHE RISPETTO ALLA NUOVA NORMA PERCHÉ LE NORME $\|v\|_{H_0^1}$ E $\|v\|_*$

- SE a_{ij} NON È SIMMETRICA NON HO PIÙ LA NORMA EQUIVALENTE. QUINDI MI SERVE UN RIESZ PIÙ GENERALE:

TEO (LAX–MILGRAM)

H SPAZIO DI HILBERT, $a(u,v)$ FORMA BILINEARE SU $H\times H$, $F\in H'$

SUPPONIAMO CHE

i) $\exists M>0 \quad \forall u,v\in H \quad |a(u,v)| \leq M\|u\|\cdot\|v\|$

ii) $\exists \nu>0 : \forall u\in H, \quad a(u,u) \geq \nu \|u\|_H^2$

ALLORA $\exists_1 u\in H$

$a(u,v) = \langle F, v\rangle \quad \forall v\in H$ E VALE $\|u\|_H \leq C\|F\|_{H^*}$

CONTINUANDO COL CASO NON SIMMETRICO, PRENDENDO

$a(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega a_{ij} D_i u D_j v$ È BILINEARE $\quad H = H_0^1(\Omega)$

LA ELLITTICITÀ COME SOPRA MI DÀ LA STIMA ii)

IL CONTO FATTO PRIMA CON $M = \max_{ij} \|a_{ij}(x)\|_{L^\infty}$ MI DÀ LA STIMA i)

OSS NON DIMOSTREREMO LAX-MILGRAM, DIMOSTREREMO UN CASO PIÙ GENERALE CHE È IL TEOREMA DI STAMPACCHIA.

LEZIONE 09

Titolo nota 24/10/2019

TEOREMA DI (LAX-MILGRAM GENERALIZZATO) STAMPACCHIA

$a: H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$, H HILBERT

0) $a(0,v) = 0 \ \forall v \in H$

1) $v \longrightarrow a(u,v)$ È LINEARE

2) $|a(u_1,v) - a(u_2,v)| \leq M \|u_1 - u_2\| \|v\| \quad \forall u_1, u_2, v \in H$

3) $\exists\, \nu > 0 \quad a(u_1, u_1 - u_2) - a(u_2, u_1 - u_2) \geq \nu \|u_1 - u_2\|_H^2 \quad \forall u_1, u_2, v \in H$

SE FOSSE BILINEARE $3) \Leftrightarrow a$ COERCIVITÀ

ALLORA $\forall F \in H' \ \exists u \in H$ tc $\forall v \in H$

$$a(u,v) = F(v)$$

E VALE $\quad c(\nu) \|u\|_H \leq \|F\|_{H'}$

DIM

SIA $\mathcal{A}(u)[v] = a(u,v)$, $\forall u \ \mathcal{A}(u)$ è LINEARE E CONTINUO SU $H \longrightarrow \mathbb{R}$ PER IPOTESI 0, 1 e 2

$\Rightarrow \mathcal{A}(u) \in H' \Rightarrow \mathcal{A}: H \longrightarrow H'$

SE DIMOSTRO $\mathcal{A}$ È SURGETTIVO HO FINITO

PERCHÈ $\forall F \in H' \ \exists u \in H$ tc $\mathcal{A}(u) = F$ CIOÈ $\forall v \ \mathcal{A}(u)v = F(v)$

OTTENGO LA SURGETTIVITÀ SE $\mathcal{A}$ è VICINO A $\mathcal{J}: H \longrightarrow H'$

DOVE $\mathcal{J}(u)v = (u,v)_H$

OSSERVO CHE $\mathcal{J}$ È L'INVERSO DELL'OPERATORE DI RIESZ $\mathcal{R}$

DOVE $\mathcal{R}: H' \longrightarrow H$

$\forall F \in H' \longrightarrow \mathcal{R}(F) = w \in H$ tc $w \in H$ $F(v) = (w,v)_H$

$\mathcal{J} = \mathcal{R}^{-1} \Rightarrow \mathcal{R}$ È SURGETTIVO

OSSERVO CHE

$$\underset{\substack{\parallel \\ a(u,v)}}{\mathcal{A}(u)[v]} = \left(\mathcal{R}(\mathcal{A}(u)), v\right)_H$$

$$\|\mathcal{A}(u)\|_{H'} = \sup_{v \neq 0} \frac{|\mathcal{A}(u)[v]|}{\|v\|_H} = \sup_{v \neq 0} \frac{|(\mathcal{R}(\mathcal{A}(u)), v)_H|}{\|v\|} \underset{\sup_{v\neq 0} \frac{|(w|v)|}{\|v\|}}{=} \|\mathcal{R}(\mathcal{A}(u))\|_H$$

$$\|\mathcal{J}(u)\|_{H'} = \sup_{v \neq 0} \frac{|\mathcal{J}(u)[v]|}{\|v\|} = \sup_{v \neq 0} \frac{|(u|v)_H|}{\|v\|} = \|u\|_H$$

QUINDI DEVO PROVARE CHE $\exists k\in(0,1)$, $\exists \alpha>0$ TALI CHE $\forall u_1,u_2\in H$

$$\|\mathcal{J}(u_1)-\mathcal{J}(u_2)-\alpha[\mathcal{A}(u_1)-\mathcal{A}(u_2)]\|^2_{H'} \le k\|\mathcal{J}(u_1)-\mathcal{J}(u_2)\|^2_{H'}$$

$\downarrow$ PER QUANTO VISTO SOPRA

$$\|u_1-u_2-\alpha[R(A(u_1))-R(A(u_2))]\|_H^2 =$$

$$= \|u_1-u_2\|_H^2+\alpha^2\|R(A(u_1))-R(A(u_2))\|_H^2 - 2\alpha\,(u_1-u_2\,|\,R(A(u_1))-R(A(u_2)))=$$

$$=\|u_1-u_2\|^2_H+\alpha^2\|R(A(u_1))-R(A(u_2))\|^2_H-2\alpha[a(u_1|u_1-u_2)-a(u_2|u_1-u_2)]\le \otimes$$

$$\|R(A(u_1))-R(A(u_2))\| = \sup_{v\ne0}\frac{|(R(A(u_1))-R(A(u_2))\,|\,v)|}{\|v\|} = \sup_{v\neq0}\frac{|a(u_1|v)-a(u_2|v)|}{\|v\|}\le$$

$$\le M\frac{\|u_1-u_2\|_H \cancel{\|v\|_H}}{\cancel{\|v\|_H}}$$

USANDO ANCHE 3

$$\otimes \le \|u_1-u_2\|^2_H+\alpha^2M^2\|u_1-u_2\|^2_H-2\alpha\nu\|u_1-u_2\|^2_H=$$

$$=\underbrace{(1+\alpha^2M^2-2\alpha\nu)}_{k<1}\|u_1-u_2\|^2_H$$

$$\|u_1-u_2\|^2_H = \|\mathcal{J}(u_1)-\mathcal{J}(u_2)\|^2_{H'}$$

$\Updownarrow$

$$\alpha^2M-2\alpha\nu<0$$

$$0<\alpha<\frac{2\nu}{M}$$

OSS L'UTILIZZO DELL'IPOTESI 0) È SOLO

$\mathcal{A}(u)$ È CONTINUO

$$|A(u)v| = |a(u|v)-a(0|v)| \overset{2)}{\le} M\overbrace{\|u\|}^{c}\|v\|$$

OPPURE USANDO SOLO 2 DEFINENDO $\tilde a(u|v)=a(u|v)-a(0|v)$

ESEMPIO DI APPLICAZIONE

$$\begin{cases} u\in H^1_0(\Omega) \\ -\sum_{i=1}^n D_i[a_i(x,\nabla u)]=F \quad \in H^{-1}\end{cases} \qquad \begin{cases} \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega) \\ \sum_{i=1}^n\int a_i(x,\nabla u)\,D_i\varphi(x)\,dx=\langle F,\varphi\rangle\end{cases}$$

CON 0) $a_i(x,0)=0$ q.o. in Ω

1) IPOTESI DI CARATHÉODORY $a_i(x,p)$ mis. (ELIMINATA IN x) CONTINUA q.o. in p.

2) $\exists\nu>0$, $\forall p,\bar p\in\mathbb{R}^n$ q.o. in Ω

$$\sum_{i=1}^n[a_i(x,p)-a_i(x,\bar p)](p_i-\bar p_i)\ge\nu\|p-\bar p\|$$

3) $\exists\, M > 0$ q.o. $x \in \Omega$ $\quad \forall p, \bar{p} \in \mathbb{R}^M$
$$\sum_{i=1}^{M} \left[a_i(x,p) - a_i(x,\bar{p}) \right]^2 \leq M \, \|p - \bar{p}\|^2$$

X ESERCIZIO SISTEMARE LA DIM. VOLTA SCORSA X DIM. ESISTENZA E UNICITÀ SOL

IDEA $F = \sum_{i=1}^{M} D^i f_i$ con $f_\alpha \in L^2$
$$\langle F, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{m} \int f_i \, D_i \varphi$$
$$a(u, \varphi) = \sum_{i=1}^{m} \int f_i D_i \varphi \quad \forall \varphi \in H^1_0(\Omega) \quad \text{E POI SPEZZO SUL PRODOTTO...}$$

PROBLEMA
$$\begin{cases} (-1)^m \displaystyle\sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} D^\alpha \left[A_{\alpha\beta}(x) \, D^\beta u(x) \right] = F \\ u \in H^m_0(\Omega) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} F \in H^{-m} \\ A_{\alpha,\beta} \in L^\infty(\Omega) \end{array}$$

+ ELLITTICITÀ DEBOLE DI L-H

VORREI FARE COME PRIMA.

$\Rightarrow$ CONSIDERO $\displaystyle a(u,v) = \sum_{\substack{|\alpha| = m \\ |\beta| = m}} A_{\alpha\beta}(x) \, D^\beta u \, D^\alpha u = \langle F, u \rangle$

MI SERVE LA COERCIVITÀ

OVVERO $\displaystyle \sum_{\substack{|\alpha| = m \\ |\beta| = m}} \int A_{\alpha\beta}(x) \, D^\alpha u \, D^\beta u \geq \nu \|u\|^2_{H^m_0}$ (NELLE EQUAZIONI VENIVA FACILE DALL'ELLITTICITÀ)

TEO (DISEGUAGLIANZA DI GARDING)

SUPPONIAMO CHE L'OPERATORE VERIFICHI LA CONDIZIONE DEBOLE DI H-L

$A_{\alpha\beta}$ COSTANTI, ALLORA $\forall u \in H^m_0(\Omega, \mathbb{R}^N)$
$$\int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha| = m \\ |\beta| = m}} \left(A_{\alpha\beta} \, D^\alpha u \, D^\beta u \right) dx \geq c(\nu) \, \|u\|^2_{H^m_0(\Omega, \mathbb{R}^N)}$$

QUINDI CON QUESTO USANDO LAX MILGRAM

DIM USANDO LA TRASFORMATA
$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{M/2}} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \, e^{-i(x|\xi)} \, dx \quad \xi \in \mathbb{R}^M$$

DIMOSTRO PER $u \in C^\infty_0(\mathbb{R}^M)$ E POI OTTENGO LA TESI PER DENSITÀ.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\beta|=m}} \left(A_{\alpha\beta} D^\beta u \,|\, D^\alpha u\right)_{\mathbb{R}^n} dx =$$

RICORDO PARSEVAL

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(f(x), g(x)\right)_{\mathbb{R}^n} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\hat f(\xi), \overline{\hat g(\xi)}\right)_{\mathbb{C}^n} d\xi$$

USO $A_{\alpha\beta}$ COSTANTI

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\beta|=m}} \left(A_{\alpha\beta} \widehat{D^\beta u} \,|\, \overline{\widehat{D^\alpha u}}\right)_{\mathbb{C}^n} d\xi =$$

$$\widehat{D^\alpha f}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat f(\xi)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\beta|=m}} \left(A_{\alpha\beta} (i\xi)^\beta \hat u(\xi) \,|\, \overline{\hat u(\xi)}\, \overline{(i\xi)^\alpha}\right)_{\mathbb{C}^n} d\xi$$

$$i^\alpha = i^{|\alpha|} = i^m = i^\beta$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\beta|=m}} \xi^{\alpha+\beta} \left(A_{\alpha\beta} \hat u(\xi) \,|\, \overline{\hat u(\xi)}\right)_{\mathbb{C}^n} \qquad i^m \cdot \overline{i}^m$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\beta|=m}} \left(A_{\alpha\beta} \underbrace{Re(\hat u(\xi))}_{\eta} \,|\, \underbrace{Re(\hat u(\xi))}_{\eta}\right)_{\mathbb{R}^n} \xi^{\alpha+\beta} + \left(A_{\alpha\beta} Im(\hat u(\xi)) \,|\, Im(\hat u(\xi))\right)_{\mathbb{R}^n} \xi^{\alpha+\beta} \geq$$

DERIVATE DI L-H

$$\geq \nu \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\beta|=m}} \left(\|Re(\hat u(\xi))\|^2_{\mathbb{R}^n} + \|Im(\hat u(\xi))\|^2_{\mathbb{R}^2}\right) \xi^{\alpha+\beta} =$$

$$= \nu \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\beta|=m}} \left(\hat u(\xi) \,|\, \overline{\hat u(\xi)}\right)_{\mathbb{C}^n} \xi^\alpha \xi^\beta (i)^\alpha (\overline{i})^\beta$$

$$= \nu \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\beta|=m}} \left((i\xi)^\alpha \hat u(\xi) \,|\, \overline{\hat u(\xi)(i\xi)^\beta}\right)_{\mathbb{C}^n} d\xi =$$

$$= \nu \int \sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\beta|=m}} \left(D^\alpha u \,|\, D^\beta u\right)_{\mathbb{R}^n} = \nu \|u\|^2_{H^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)}$$

LEZIONE 10

Titolo nota 06/11/2019

Richiamo disuguaglianza di Garding

$\{A_{\alpha\beta}\}$ soddisfa la condizione di L-H (ellitticità debole)

Se $A_{\alpha\beta}$ sono costanti allora $\forall u \in H_0^m(\Omega, \mathbb{R}^N)$, allora:

$$\int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|=m}} (A_{\alpha\beta} D^\beta u | D^\alpha u)\, dx \geq c(\nu) \, |u|^2_{H^m(\Omega,\mathbb{R}^\nu)}$$

Prop se $\{A_{\alpha,\beta}(x)\}$ soddisfano la cond di L-H, $A_{\alpha\beta} \in C^0(\bar{\Omega})$

Allora $\forall u \in H_0^m(B(x_0,r), \mathbb{R}^N)$ $\forall x_0 \in \Omega$ e r piccolo in modo $B(x_0,r) \subseteq \Omega$

$$\sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|=m}} \int_{B(x_0,r)} (A_{\alpha\beta}(x) D^\beta u(x) | D^\alpha u(x))\, dx \geq (c(\nu) - \omega(r)) \, |u|^2_{H^m(B(x_0,r),\mathbb{R}^\nu)}$$

dove $\omega(r) = \sup \{ \|A_{\alpha\beta}(x) - A_{\alpha\beta}(y)\| , \text{ con } \|x-y\| \leq r, \ |\alpha|=m, \ |\beta|=m \}$

modulo di continuità

Dim

$$\int_{B(x_0,r)} \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|=m}} (A_{\alpha\beta}(x) D^\beta u | D^\alpha u)\, dx =$$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|=m}} \int_{B(x_0,r)} ((A_{\alpha\beta}(x) - A_{\alpha\beta}(x_0)) D^\beta u | D^\alpha u)\, dx}_{I} + \underbrace{\sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|=m}} \int_{B(x_0,r)} (A_{\alpha\beta}(x_0) D^\beta u | D^\alpha u)\, dx}_{\geq \text{ per Garding } c(\nu) |u|_{H^m(B(x_0,r),\mathbb{R}^N)}}$$

costanti.

$$|I| \leq \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|=m}} \int_{B(x_0,r)} |((A_{\alpha\beta}(x) - A_{\alpha\beta}(x_0)) D^\beta u | D^\alpha u)|\, dx \leq$$

$$\leq \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|=m}} \int_{B(x_0,r)} \|A_{\alpha\beta}(x) - A_{\alpha\beta}(x_0)\|_{\mathbb{R}^{\nu\times\nu}} \|D^\beta u\|_{\mathbb{R}^\nu} \|D^\alpha u\|_{\mathbb{R}^\nu} \leq$$

$$\leq \sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\beta|=m}} \int_{B(x_0,r)} \omega(r)\ \|D^\alpha u\|\,\|D^\beta\|\,dx \overset{\substack{\text{somma su } \alpha=\beta\\ \downarrow}}{\leq} \omega(r)\ |u|^2_{H^m(B(x_0,r),\mathbb{R}^N)}$$

$$\Rightarrow \quad |I| \leq \omega(r)\,|u|^2_{H^m} \Rightarrow I \geq -\omega(r)\,|u|^2_{H^m} \text{ da cui la tesi}$$

Prop $\{A_{\alpha\beta}(x)\}$ soddisfa la condizione di L-H

$A_{\alpha\beta}(x) \in C^0(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto con $\partial\Omega$ loc lip

$\Rightarrow \forall u \in H_0^m(\Omega, \mathbb{R}^N)$ vale:

$$\sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\beta|=m}} \int_\Omega \left(A_{\alpha\beta}(x)\,D^\beta u \,|\, D^\alpha u\right) dx \geq c(\nu)\left[\,|U|^2_{H^m(\Omega,\mathbb{R}^N)} - \|U\|^2_{L^2(\Omega)}\right]$$

Dim Sia una famiglia $\overset{\text{con } r \text{ abb piccolo}}{\{B(x_k, r)\}}$ ricoprimento di $\overline{\Omega}$ tali che

$$c(\nu) - c(\omega) > 0$$

Sia $\{\varphi_k^2\}_{k=1\ldots h}$ la rispettiva partizione dell'unità

$$u(x) = \sum_{k=1}^h \varphi_k^2\, u(x) \qquad \operatorname{supp}\left(u\,\varphi_k^2(x)\right) \subset B(x_k, r) \quad \forall\, k=1,\ldots,h$$

$$\sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\beta|=m}} \int_\Omega \left(A_{\alpha\beta}(x)\,D^\beta u \,|\, D^\alpha u\right) = \sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\beta|=m}} \sum_{k=1}^h \int_\Omega A_{\alpha\beta}(x)\left(\varphi_k^{2}\,D^\beta u \,|\, D^\alpha u\right) dx$$

$$= \sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\beta|=m}} \sum_{k=1}^h \int_\Omega A_{\alpha\beta}(x)\left(\varphi_k\,D^\beta u \,|\, \varphi_k\,D^\alpha u\right) dx = \circledast$$

$$\varphi_k D^\alpha u = D^\alpha(\varphi_k u) - \sum_{\substack{\gamma+\eta=\alpha\\ \gamma\neq(0,0)}} \binom{\alpha}{\gamma} D^\gamma \varphi_k(x)\, D^\eta u$$

$$\varphi_k D^\beta u = D^\beta(\varphi_k u) - \sum_{\substack{\gamma+\eta=\beta\\ \gamma\neq(0,0)}} \binom{\beta}{\gamma} D^\gamma \varphi_k(x)\, D^\eta u$$

$$\circledast \overset{\substack{\text{sostituendo}\\ \downarrow}}{=} \sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\beta|=}} \sum_{k=1}^h \Bigg[\overbrace{\int_\Omega \left(A_{\alpha\beta}(x)\,D^\beta(\varphi_k u) \,|\, D^\alpha(\varphi_k u)\right)}^{I_1} - \overbrace{\int_\Omega \Big(A_{\alpha\beta}\,D^\beta(\varphi_k u) \,\Big|\, \sum_{\substack{\gamma+\eta=\alpha\\ \gamma\neq(0\ldots0)}} \binom{\alpha}{\gamma} D^\gamma \varphi_k(x)\, D^\eta u\Big)}^{I_2}$$

$$- \overbrace{\int_\Omega \Big(A_{\alpha\beta} \sum_{\substack{\gamma+\eta=\beta\\ \gamma\neq(0\ldots0)}} \binom{\beta}{\gamma} D^\gamma \varphi_k(x)\, D^\eta u \,\Big|\, D^\alpha(\varphi_k u)\Big) dx}^{I_3} +$$

$$+\int_\Omega \overbrace{\left[A_{\alpha\beta}\sum_{\substack{\gamma+\eta=\beta\\ \gamma\neq(0,\dots,0)}}\binom{\beta}{\gamma}D^\gamma\varphi_k(x)D^\eta u \,\Big|\, \sum_{\substack{\gamma+\eta=\alpha\\ \gamma\neq(0,\dots,0)}}\binom{\alpha}{\gamma}D^\gamma\varphi_k D^\eta u\right]}^{I_4}dx$$

Prop precedente

$$I_1 \geq \sum_{k=1}^h (C(\nu)-\omega(r))\sum_{|\alpha|=m}\int_\Omega |D^\alpha(\varphi_k u)|^2 \geq ⊛$$

$$|D^\alpha(\varphi_k u)|^2 = \Big\|\varphi_k D^\alpha u + \sum_{\substack{\gamma+\eta=\alpha\\ \gamma\neq(0,\dots,0)}}\binom{\alpha}{\gamma}D^\gamma\varphi_k D^\eta u\Big\|^2 =$$

$$= \varphi_k^2\|D^\alpha u\|^2 + \underbrace{\Big\|\sum\binom{\alpha}{\gamma}D^\gamma\varphi_k D^\eta u\Big\|^2}_{\geq 0} + 2\Big(\varphi_k D^\alpha u \,\Big|\, \sum\binom{\alpha}{\gamma}D^\gamma\varphi_k D^\eta u\Big)$$

$$\geq ⊛ \; [C(\nu)-\omega(r)]\int_\Omega\sum_{|\alpha|=m}\|D^\alpha u\|^2 + \underbrace{\sum_{k=1}^h\sum_{|\alpha|=m}\int_\Omega 2(\quad|\quad)}_{\text{devo maggiorare questo}}$$

$$\Big|\sum_{k=1}^h\sum_{|\alpha|=m}\int_\Omega(\quad|\quad)\Big| \leq \sum_{k=1}^h\sum_{|\alpha|=m}\int_\Omega\|\varphi_k D^\alpha u\|\,\Big\|\sum_{\gamma+\eta=\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}D^\gamma\varphi_k D^\eta u\Big\| \leq$$

applico

$$\int a_k b_k \leq \left(\int a_k^2\right)^{1/2}\left(\int b_k^2\right)^{1/2}$$

$$\leq \sum_{k=1}^h\sum_{|\alpha|=m}\left(\int_\Omega\|\varphi_k D^\alpha u\|^2\right)^{1/2}\left(\int_\Omega\Big\|\sum\binom{\alpha}{\gamma}D^\gamma\varphi_k D^\eta u\Big\|^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\sum a_k b_k \leq \left(\sum a_k^2\right)^{1/2}\left(\sum b_k^2\right)^{1/2}$$

$$\leq \sum_{|\alpha|=m}\left(\sum_{k=1}^h\int_\Omega\|\varphi_k D^\alpha u\|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^h\int_\Omega\Big\|\sum\binom{\alpha}{\gamma}D^\gamma\varphi_k D^\eta u\Big\|^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \sum_{|\alpha|=m}\left(\int_\Omega\|D^\alpha u\|^2\right)^{1/2} h\cdot M\left(\int_\Omega\Big\|\sum_{|\eta|\leq m-1}D^\eta u\Big\|^2\right)^{1/2} \leq$$

chiamo

$$M = \max_{k=1\dots h}\max_{\substack{\gamma\neq 0\\ \gamma\leq\alpha}}\sup|D^\gamma\varphi_k|\binom{\alpha}{\gamma}$$

uso $\left(\sum_{|\eta|\leq m-1} c_\eta\right)^2 \leq c(m)\sum c_\eta^2$

$$\leq \sum_{|\alpha|\leq m}\left(\int_\Omega\|D^\alpha u\|^2\right)^{1/2} h\cdot M\left(\int_\Omega\sum_{|\eta|\leq m-1}\|D^\eta u\|^2\right)^{1/2} \leq \|u\|_{H^m(\Omega,\mathbb{R}^N)}\, h\cdot M\,\|u\|_{H^{m-1}(\Omega,\mathbb{R}^N)} \leq ⊠$$

Lemma (J.L. Lions) (dimostrazione dopo)

Siano X, Y, Z spazi di Banach $X \underset{cont}{\hookrightarrow} Y \underset{cont}{\hookrightarrow} Z$

e $X \hookrightarrow Y$ è anche compatta allora:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ C(\varepsilon), \ \forall u \in X \quad \|u\|_Y \leq \varepsilon \|u\|_X + C(\varepsilon)\|u\|_Z$

Usando $X = H_0^m(\Omega, \mathbb{R}^N) \quad Y = H^{m-1}(\Omega, \mathbb{R}^N) \quad Z = L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$

$X \hookrightarrow Y$ è compatta per il teo di Rellich

$$\|u\|_{H^{m-1}(\Omega,\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon |u|_{H_0^m(\Omega,\mathbb{R}^N)} + C(\varepsilon)\|u\|_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^N)}$$

$$\underset{\boxed{*}}{\leq} C(n,M,m)\, |U|_{H_0^m(\Omega,\mathbb{R}^N)} \left(\varepsilon |u|_{H_0^m(\Omega\mathbb{R}^N)} + C(\varepsilon)\|u\|_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^N)} \right) =$$

$$C(h,M,m)\varepsilon |U|^2_{H_0^m(\Omega,\mathbb{R}^N)} + C(\varepsilon)\, C(h,M,m) \underbrace{|U|_{H_0^m(\Omega,\mathbb{R}^N)}}_{a} \underbrace{\|U\|_{L^2}}_{b} \leq \quad ab \leq \frac{\varepsilon'}{2}a^2 + \frac{2}{\varepsilon} b^2$$

$$\leq C(h,M,m)\left(\varepsilon + \frac{\varepsilon'}{2}C(\varepsilon)\right)|U|^2_{H_0^m} + \frac{2}{\varepsilon'} C(\varepsilon)\, C(h,M,m)\, \|U\|^2_{L^2}$$

$$\Rightarrow I_1 \geq \left[C(\nu) - \omega(R) - C_1\varepsilon - C_2\varepsilon' \right] |U|^2_{H^m} - C(\varepsilon', \varepsilon \ldots)\, \|U\|^2_{L^2}$$

Per gli altri integrali la cosa è simile. (finire per esercizio)

$|I_2|$ maggiori il sup degli $A_{\alpha\beta}$ e $D^\alpha(\varphi_R u)$ e Σ come prima

$|I_3|$ Analogo a I_2 scambiando α e β

$|I_4|$ Porto fuori $D^\alpha \varphi_R$ e $D^\beta \varphi_R$ con M e rimane

$$\left(\sum_{|m| \leq m-1} D^m u \ \Big| \ \Sigma D^m u \right) = \|u\|^2_{H^{m-1}} \leq \varepsilon |U|^2_{H^m} + C(\varepsilon)\|u\|_{L^2}$$

Dim (Lemma J.L. Lions)

Per assurdo $\exists \varepsilon > 0 : \forall c_n \to +\infty \ \exists u_n \in X$

$$\|u_n\|_Y > \varepsilon \|u_n\|_X + c_n \|u_n\|_Z$$

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_X} \Rightarrow \|v_n\|_Y > \varepsilon + c_n \|v_n\|_Z \iff \frac{1}{c_n}\|v_n\|_Y > \frac{\varepsilon}{c_n} + \|v_n\|_Z \iff^{*}$$

Poiché $\|v_n\|_X = 1$ a meno di sottosucc. $\exists v \in Y$ $v_n \to v$ in Y ($X \hookrightarrow Y$ cpt)

$$\|v_n\|_Y \leq c\|v_n\|_X = c \in \mathbb{R}$$

+ $X \hookrightarrow Y$ continua

$$\iff \frac{c}{c_n} > \|v_n\|_Z$$

$$\Downarrow$$

$$\|v_n\|_Z \to 0$$

osservo che $v = 0$ perché $\|v\|_Z \leq \|v - v_n\|_Z + \|v_n\|_Z \leq$

$$c\underbrace{\|v - v_n\|_Y}_{\downarrow \text{ in } Y \atop 0} + \underbrace{\|v_n\|_Z}_{\downarrow \atop 0}$$

$$\Rightarrow \|v_n\|_Y \to 0$$

!!

Ma $\|v_n\|_Y > \varepsilon + c_n\|v_n\|_Z \geq \varepsilon \Rightarrow \|v_n\|_Y \not\to 0$

Prop Se $A(x,D) = (-1)^m \sum_{|\alpha| \leq m \atop |\alpha| \leq m} D^\alpha\left(A_{\alpha\beta}(x)\, D^\beta u(x)\right)$ soddisfa L-H

se $A_{\alpha\beta} \in C^0(\Omega)$ se $|\alpha| = |\beta| = m$

inoltre $A_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega)$ se $|\alpha|\,|\beta| < m^2$

$\forall u \in H^m_0(\Omega, \mathbb{R}^N)$ vale

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m \atop |\beta| \leq m} \left(A_{\alpha\beta} D^\beta u \,\middle|\, D^\alpha u\right) dx \geq c(\nu, m, n, N)\left[\|u\|^2_{H^m(\Omega,\mathbb{R}^N)} - \|u\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^N)}\right]$$

Dim $\sum_{|\alpha| \leq m \atop |\beta| \leq m} \int_\Omega \left(A_{\alpha\beta} D^\beta u \,\middle|\, D^\alpha u\right) dx =$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\beta|=m}} \int_\Omega \left(A_{\alpha\beta} D^\beta u \,\middle|\, D^\alpha u\right) dx}_{\text{vale il lemma sopra}} + \sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\beta|<m}} \int_\Omega \left(A_{\alpha\beta} \overbrace{D^\beta u}^{m-1} \,\middle|\, \overbrace{D^\alpha u}^{m}\right) dx \; +$$

$$\sum_{\substack{|\alpha|<m\\|\beta|=m}} \int_\Omega \left(A_{\alpha\beta} \overbrace{D^\beta u}^{m} \,\middle|\, \overbrace{D^\alpha u}^{m-1}\right) dx + \underbrace{\sum_{\substack{|\alpha|<m\\|\beta|<m}} \int_\Omega \left(A_{\alpha\beta} \overbrace{D^\beta u \,\middle|\, D^\alpha u}^{m-1}\right) dx}_{\|u\|^2_{H^{m-1}} \le \varepsilon |u|^2_{H^m} + C(\varepsilon)\|u\|^2_{L^2}}$$

come sopra con $|u|_{H^m}$ $\|u\|_{H^{m-1}}$

e i conti sono analoghi a sopra

Lezione 11

Titolo nota 07/11/2019

Teorema (Esistenza globale)

$\{A_{\alpha,\beta}\}$ che verifica $L-H$ (ell. debole)

$A_{\alpha,\beta}$ costanti:

Allora $\forall F \in H^{-m}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ $\exists!\, u \in H^m_0(\Omega, \mathbb{R}^N)$ sol di $A(x,D)u = F$

e vale

$$\|u\|_{H^m_0(\Omega,\mathbb{R}^N)} \leq c\, \|F\|_{H^{-m}(\Omega,\mathbb{R}^N)}$$

dove $A(x,D)u = \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|=m}} D^\alpha (A_{\alpha\beta} D^\beta u)$

Dim sia $a: H^m_0(\Omega,\mathbb{R}^N) \times H^m_0(\Omega,\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|=m}} (A_{\alpha\beta} D^\beta u \mid D^\alpha v)\, dx \quad \text{bilineare}$$

Sia $L(v) = F(v)$ $\forall v \in H^m_0(\Omega,\mathbb{R}^N)$

Per le stime viste si ha $\exists c>0$ $\forall u \in H^m_0(\Omega,\mathbb{R}^N)$ vale

$$a(u,u) \geq c\, \|u\|^2_{H^m_0(\Omega,\mathbb{R}^N)}$$

Allora per il teorema di Lax-Milgram (Stampacchia)

$\forall F \in H^{-m}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ $\exists!\, u \in H^m_0(\Omega,\mathbb{R}^N)$ $a(u,v) = F(v)$ $\forall v \in H^m_0(\Omega,\mathbb{R}^N)$

e vale la stima

Teo

Sia $A(x,D)u = (-1)^m \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ |\beta|\leq m}} D^\alpha (A_{\alpha\beta}(x) D^\beta u)$ con

se $|\alpha| = |\beta| = m \Rightarrow A_{\alpha\beta} \in C^0(\overline{\Omega})$

se $|\alpha+\beta| < 2m \Rightarrow A_{\alpha\beta}\ L^\infty(\Omega)$

Sia $\gamma > 0$ suff grande, allora $\forall F \in H^{-m}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ $\exists!\, u \in H^m_0(\Omega,\mathbb{R}^N)$ t.c.

$$A(x,D)u + \gamma u = F$$

Oppure stesso risulto $\forall \gamma > 0$ e d_Ω suff piccolo

Dim prese $a(u,v) = \int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} (A_{\alpha\beta} D^\beta u \,|\, D^\alpha v)\, dx$

l'equazione $A(x,D)u + \gamma u = F$ in forma debole

$$\tilde{a}(u,v) := a(u,v) + \gamma \int_\Omega u \cdot v = \langle F, v\rangle \quad \forall v \in H^m_0(\Omega, \mathbb{R}^N)$$

Ricordando $a(u,u) \geq c\left(|u|^2_{H^m_0} - \|u\|^2_{L^2}\right)$

per γ grande.

$$\tilde{a}(u,u) \geq c\,|u|^2_{H^m_0} - c\,\|u\|^2_{L^2} + \gamma \|u\|^2_{L^2} \geq c\,|u|^2_{H^m_0(\Omega,\mathbb{R}^N)}$$

$\Rightarrow$ $\tilde{a}$ è coercivo e concludo con Lax-Milgram

Il caso d_Ω piccolo lo risolvo con Poincaré:

$$\|u\|_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^N)} \leq c(m)\, \|\nabla u\|_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^N)}\, d_\Omega \quad \forall u \in H^m_0(\Omega,\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \quad \|u\|_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^N)} \geq -c(m)\, d_\Omega\, |u|_{H^m_0}$$

Quindi $\tilde{a}(u,u) \geq \underbrace{c\,|u|^2_{H^m_0} - c\,c(m)\,d_\Omega\,|u|^2_{H^m_0}}_{\text{se } d_\Omega \text{ è piccolo } > 0} + \gamma \|u\|^2_{L^2}$

Esempio
$$\begin{cases} u \in H^m_0(\Omega) \\ -\Delta u + \lambda u = F & F \in H^{-m}(\Omega) \end{cases}$$

$$\underbrace{\int_\Omega \nabla u \nabla v + \lambda \int u \cdot v}_{a(u,v)} = \langle F, v\rangle$$

se $\lambda > 0$ $\quad a(u,u) \geq c\,|u|^2_{H^m_0(\Omega)} \Rightarrow$ è coercivo

Se $\lambda < 0$ $\quad a(u,u) = \int_\Omega \|\nabla u\|^2 + \lambda \int_\Omega \|u\|^2\, dx =$

$$= \int_\Omega \|\nabla u\|^2\,dx - |\lambda| \int_\Omega \|u\|^2 dx \underset{\text{Poincaré}}{\geq} \int_\Omega \|\nabla u\|^2 dx - |\lambda| c(m) d_\Omega \int_\Omega \|\nabla u\|^2 dx$$

Se $|\lambda| \cdot c(m)$ è piccolo

Teo considerimmo $A(x,D)u$ come nel teorema precedente

Sia
$$P : H^m_0(\Omega, \mathbb{R}^N) \longrightarrow H^{-m}(\Omega, \mathbb{R}^N)$$
$$Pu = A(x,D)u$$

Allora $\dim(\operatorname{Ker} P) < +\infty$ e $\operatorname{Img}(P)$ è chiusa.

Lemma (di Peetre)

Dati E, Φ, G spazi di Banach riflessivi, $E \hookrightarrow \Phi$ in modo continuo e cpt

Sia $C : E \longrightarrow G$ lineare e continua

Allora sono equivalenti

i) $\operatorname{Img}(C)$ è chiusa in G e $\dim(\operatorname{Ker} C) < +\infty$

ii) $\exists c > 0 : \forall u \in E \quad \|u\|_E \leq c\left\{ \|Cu\|_G + \|u\|_\Phi \right\}$

Dim teo prendo $E = H^m_0(\Omega, \mathbb{R}^N)$ $\quad \Phi = L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$

$E \hookrightarrow \Phi$ cpt per il teo di Rellich

$G = H^{-m}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ come $C = P$

da prima $\quad a(u,u) \geq c\,|u|^2_{H^m_0} - c\,\|u\|^2_{L^2}$

$$c\,\|u\|^2_{L^2} + a(u,u) \geq c\,|u|^2_{H^m_0}$$

Ma $\quad a(u,u) = \langle \underset{P(u)}{F}, u \rangle \overset{!}{=} \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} (f_\alpha | D^\alpha u)$ $\quad$ caratterizzazione duale $\quad f_\alpha \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$

$$|a(u,u)| \underset{\text{Holder}}{\leq} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega \|f_\alpha\|^2_{L^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2} \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \underbrace{\frac{2}{\varepsilon}\sum_{|\alpha|\leq m}\|f_\alpha\|^2_{L^2}}_{\text{devo stimarlo con } \|F\|} + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{|\alpha|\leq m}\|D^\alpha u\|^2_{L^2}$$

Ricordando $\|F\|_{H^{-m}} = \sup_{v\neq 0}\frac{\langle F,v\rangle}{\|v\|^2_{H^m_0}}$

Se $F=\sum_{|\alpha|\leq m} D^\alpha f_\alpha \Rightarrow \|F\|_{H^{-m}} \simeq \inf_{\substack{\{f_\alpha\}\\ \text{Rapp. di } F}} \left\{ \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{d_\Omega^{m-j}} \int_\Omega \sum_{|\alpha|=j}\|f_\alpha\|^2_{L^2} \right\}$

Torniamo all'esempio $-\Delta u+\lambda u = F$

La stima $a(u,u) \geq \int_\Omega \|\nabla u\|^2 - |\lambda| \int_\Omega \|u\|^2$

$$a(u,u) + |\lambda| \int_\Omega \|u\|^2 \geq \int_\Omega \|\nabla u\|^2$$

$$\underset{\|F\|^2_{H^{-1}}}{\overset{\geq|}{}} + |\lambda|\ \|u\|^2_{L^2} \geq \|u\|^2_{H^1}$$ Mi da la stima.

<u>Dim Lemma</u>

ii) $\Rightarrow$ i) Sia $E_0=\mathrm{Ker}(C)$, la palla di E_0 è compatta in Φ e dunque anche in E perché preso $\|u_n\|_E\leq R$ con $\{u_n\}\subseteq E_0$ allora $\exists\{u_{n_k}\}, u\in\Phi$ $u_{n_k}\to$ in Φ

allora $\{u_{n_k}\}$ è di Cauchy in Φ allora per la maggiorazione è di Cauchy in in E infatti

$$\|u_{m_k}-u_{m_h}\|_E \leq C\{\|\underset{\underset{0}{\shortparallel}}{Cu_{m_k}}-\underset{\underset{0}{\shortparallel}}{Cu_{m_h}}\|_G + \|u_{m_k}-u_{m_h}\|_\Phi\}$$

$u_{m_k}\in E_0=\mathrm{Ker}\,C$

Allora $u_{m_k}\to u$ in E e $C\,u_{m_k}\equiv 0 \Rightarrow$ per continuità di C $u=0 \Rightarrow u\in E_0$

Allora ogni succ. in E_0 limitata, ha una sottosucc convergente

<u>Teo (no dim)</u> Uno spazio di Banach tc ogni insieme limitato sia relativamente sequenzialmente compatto è dimensione finita. (compatto per successioni limitato)

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}\,C) < +\infty$

Scompongo $E = E_0 \oplus E_1$ in modo che $C|_{E_1}$ sia iniettiva

e quindi $\forall u \in E_1$ ancora che vale $\|u\|_E \leq c\,\|Cu\|_G$

se così non fosse $\exists \{u_n\} \subset E_1$ e $c_n \to +\infty$

$$\|u_n\|_E > c_n \|Cu_n\|_G$$

Normalizzo $\quad v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_E} \quad \|v_n\|_E = 1 > c\,\|Cv_n\|_G$

$$\frac{1}{c_n} > \|Cv_n\|_G \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|Cv_n\|_G = 0$$

$\|v_n\|_E = 1 \Rightarrow \exists\ v_{n_k} \to v$ debole in E

$v_{n_k} \to v$ forte in $\phi \Rightarrow$ è di Cauchy in ϕ

$\Rightarrow Cv_{n_k}$ è di Cauchy in $G \Rightarrow$ per (ii) $\{v_{n_k}\}$ è di Cauchy in E

$\Rightarrow v_{n_k} \to v$ forte in $E \Rightarrow v \in E_1$ (perché $u_n \in E_1$)

$C(v_n) \to C(v) = 0 \quad v \in \ker C = E_0 \quad \Rightarrow v = 0$!! $\|v_n\| = 1$

Da quella stima si ottiene che $\operatorname{Img} C$ è chiuso perché presa $w_n \in \operatorname{Img} C$

$w_n \to w$ dimostro che $w \in \operatorname{Img} C$

Siano $u_n \in E$ tc $C(u_n) = w_n \quad u_n = v_n + z_n \quad v_n \in E_0 \ z_n \in E_1$

$C(u_n) = C(z_n)$

$$\|z_n\|_E \leq c\,\|C(z_n)\|_G = c\,\|w_n\|_G$$

ma $w_n \to w \Rightarrow$ è di Cauchy in $G \Rightarrow z_n$ è di Cauchy in E

$\Rightarrow \exists\, z \in E$ tc $z_n \to z$ e $C(z_n) \to C(z) = w$

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\qquad E = E_0 \oplus E_1$

$C|_{E_1}$ è chiuso, quindi per il teorema del grafico chiuso

(Teo grafico chiuso
Se un'app lineare è chiusa è continua dove operi)

vale che $\|v\|_E \leq c_1 \|Cv\|_G \quad \forall v \in E_1$

$\forall w \in E_0$ vale $\|w\|_E \leq C_2 \|w\|_\phi$ (si vede dopo)

Quindi $\forall u \in E$ $u = v + w$ $v \in E_1$ $w \in E_0$

$$\|u\|_E \leq \|v\|_E + \|w\|_E \leq C_1 \|C(v)\|_G + C_2 \|w\|_\phi =$$
$$\underset{w \in E_0}{\|}$$
$$= C_1 \|C(u)\|_G + C_2 \|w\|_\phi = \qquad E \hookrightarrow \phi$$
$$= C_1 \|C(u)\|_G + C_2 \|w+v\|_\phi + C_2 \|v\|_\phi \leq$$
$$\leq C_1 \|C(u)\|_G + C_2 \|u\| + C_2 C \|v\|_E \leq$$
$$\leq \quad " \qquad " \quad + C_2 C C_1 \|C(v)\|_G$$
$$\underset{C(u)}{\|}$$

dimostrazione dis di sopra: Supponiamo per assurdo $\exists\, w_n$ e $c_n \to +\infty$

$$\|w_n\|_E > c_n \|w_n\|_\phi \quad \text{normalizzo} \quad y_n = \frac{w_n}{\|w_n\|_E}$$

$$\Rightarrow \|y_n\|_E = 1 > c_n \|y_n\|_\phi \Rightarrow y_n \to 0 \text{ in } \underline{\phi}$$

ma $\{y_n\} \subseteq E_0$ $\|y_n\|_E = 1 \Rightarrow \exists \{y_{n_k}\}$ $y \in E_0$ $y_{n_k} \to y$ in E

$\|y\|_E = 1$ ma $y = 0$!!

LEZIONE 12

Titolo nota 13/11/2019

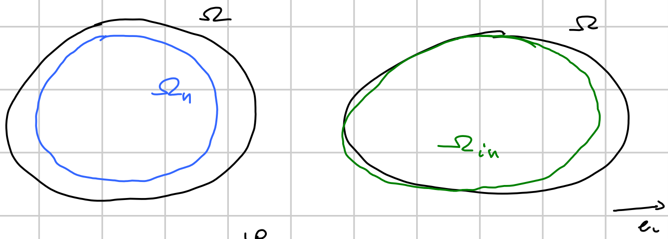
Oss Nella dim del Lemma di Pete se B è un banach riflessivo dimostrare che E_1 è sp. vettoriale chiuso senza l'ortogonalità andrebbe scritto bene.

REGOLARITÀ IN SPAZI DI SOBOLEV

Def $\tau_{ih}\, u(x) = \dfrac{u(x+he_i)-u(x)}{h}$, $i=1\dots n$ $\{e_i\}$ base di $\mathbb{R}^n$, $x\in\mathbb{R}^n$

$\Omega_h = \{ x\in\Omega \mid dist(x,\partial\Omega) > |h| \}$

$\Omega_{ih} = \{ x\in\Omega : x+he_i \in\Omega \}$



Prop (i) Se $v\in H^{1,p}(\Omega) \Rightarrow \tau_{ih} v(x) \in H^{1,p}(\Omega_{ih})$

(ii) $\dfrac{\partial \tau_{ih} u(x)}{\partial x_j} = \tau_{ih}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right)(x)$

(iii) Se $v\in L^p(\Omega)$, $w\in L^{p'}(\Omega)$ se $supp\, v\subset\Omega_h \vee supp\, w\subset\Omega_h$

$$\Rightarrow \int_\Omega v(x)\,\tau_{ih} w(x)\,dx = -\int_\Omega \tau_{i,-h}(v(x))\,w(x)\,dx$$

(iv) (LEIBNIZ) $\tau_{ih}(v(x)w(x)) = \tau_{ih}(v(x))\,w(x) + v(x+he_i)\tau_{ih}(w(x))$

Dim (Vedi dispense non svolte a lezione)

Lemma 1 (Nirenberg)

$u \in W^{1,q}(B(0,\sigma))$, $q \geq 1$, $t \in (0,1)$, $|h| < (1-t)\sigma$

$$\Rightarrow \quad \|\tau_{ih} u(x)\|_{L^q(B(0,t\sigma))} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^q(B(0,\sigma))} \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

Dim

$$\tau_{ih} u(x) = \frac{1}{h} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} u(x + she_i)\, ds =$$

Nel prodotto $\langle \nabla u, \frac{\partial}{\partial s}(x+she_i) \rangle$ sopravvive solo $\frac{\partial}{\partial x_i} u$

$$= \frac{1}{\cancel{h}} \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x_i}(x + she_i)\, \cancel{h}\, ds$$

applico S-Hölder

$$\int_{B(0,t\sigma)} \left| \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x+she_i)\, ds \right)^{q \cdot \frac{1}{q}} \right|^q dx \leq$$

Fubini-Tonelli

$$\leq \int_{B(0,t\sigma)} \left(\int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x+she_i) \right|^q ds \right) dx =$$

$y = x + she_i$

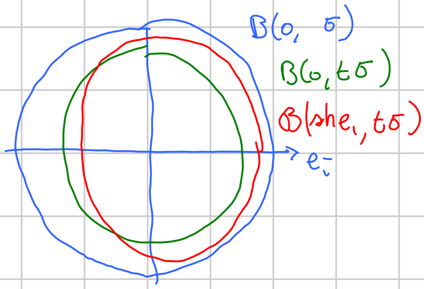
$$= \int_0^1 \int_{B(0,t\sigma)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x+she_i) \right|^q dx\, ds =$$

$$= \int_0^1 \int_{B(she_i,\, t\sigma)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(y) \right|^q dy\, ds \leq$$

non c'è più dipendenza di s

$$\leq \int_0^1 \underbrace{\int_{B(0,\sigma)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^q}\, ds =$$

$$= \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^q_{L^q(B(0,\sigma))}$$



Perché

$\|x + she_i\| \leq \|x\| + s|h| \leq$
$\leq t\sigma + s(1-t)\sigma \leq$
$\leq \sigma$

s al max è 1

Lemma 2 (Nirenberg)

$u \in \mathcal{L}^q(B(0,\sigma))$, $1<q<+\infty$, $M>0$ tali che

$\forall\ |h|<(1-t)\sigma$, $t\in(0,1)$ si abbia

$$\|\tau_{ih}u(x)\|_{\mathcal{L}^q(B(0,t\sigma))} \le M \qquad i=1\dots n$$

$\Rightarrow$ $u\in W^{1,q}(B(0,\sigma))$ (quindi $u\in H^{1,q}(B(0,\sigma))$ per Meyer-Serrin)

e vale $\|D_i u\|_{\mathcal{L}^q(B(0,\sigma))}\le M$

Dim Fissiamo i, $1\le i\le n$

Sia $\{h_k\}\xrightarrow[k\to+\infty]{}0$

$$\|\tau_{ih_k}u(x)\|_{\mathcal{L}^q(B(0,t\sigma))}\le M \Rightarrow \tau_{ih_k}u(x) \text{ sono equilimitate in } \mathcal{L}^q$$

e con $1<q<+\infty \Rightarrow \mathcal{L}^q$ è riflessivo

Quindi le palle sono deb compatte $\Rightarrow \exists\, v_i\in\mathcal{L}^q(B(0,t\sigma))$ t.c.

$$\tau_{ih_k}u(x)\longrightarrow v_i \quad \text{in } \mathcal{L}^q(B(0,t\sigma))$$

cioè

$$\int_{B(0,t\sigma)}\tau_{ih_k}u(x)\,\varphi(x)\longrightarrow\int_{B(0,t\sigma)}v_i(x)\,\varphi(x)\,dx \qquad \forall\varphi\in C_c^\infty(B(0,t\sigma))$$

$\|\!\!\to$ scrivo la derivata τ_{ih_k} $\qquad\qquad$ $\|$

$$-\int_{B(0,t\sigma)}u(x)\,\tau_{i,-h_k}\varphi(x)\xrightarrow{k\to+\infty}-\int_{B(0,t\sigma)}u(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\,dx$$

uso Lebesgue

usando Lagrange su φ

per q.o. $x\in B(0,s\sigma)$ $\quad |u(x)\,\tau_{i,-h_k}\varphi(x)|\le C\,\underbrace{|u(x)|}_{\text{la palla è limitata}}\,\|D_i\varphi(x)\|_\infty$

$\Rightarrow |u(x)|$ è integrabile

Quindi $v_i(x)$ è derivata direzionale debole di $u(x)$

Resta da vedere che vale la stima

$$\left|\int_{B(0,\sigma t)}\tau_{ih_k}u(x)\,\psi(x)\right|\le\|\tau_{i,h_k}u(x)\|_{\mathcal{L}^q(B(0,\sigma t))}\|\psi\|_{\mathcal{L}^{q'}(B(0,\sigma t))}\le M\,\|\psi\|_{\mathcal{L}^{q'}(B(0,t\sigma))}$$

Passando al limite

$$\forall \psi \in L^{q'}(B(0,t\sigma)) \quad \left| \int_{B(0,t\sigma)} D_i u(x)\, \psi(x)\, dx \right| \leq M \, \|\psi\|_{L^{q'}(B(0,t\sigma))}$$

Passo al sup sulle ψ $\quad \sup\limits_{\psi} \dfrac{\left| \int_{B(0,t\sigma)} D_i u(x)\, \psi(x) \right|}{\|\psi(x)\|_{L^{q'}}} = \|D_i u(x)\|_{L^q(B(0,t\sigma))}$

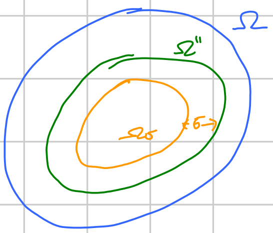
$\forall t \in (0,1) \Rightarrow$ vale su $B(0,\sigma)$

Teorema

Sia $\{a_{ij}(x)\}_{i,j=1,\dots,n}$ unif ellittica su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato $a_{ij} \in C^1(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, allora $\forall$ coppia di aperti $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subsetneq \Omega$ si ha $u \in H^2(\Omega')$ e vale

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \leq C \left\{ \|f\|_{L^2(\Omega'')} + \|u\|_{H^1(\Omega'')} \right\}$$

Dim Sia $\Omega_\sigma = \{ x \in \Omega'' \mid dist(x, \partial\Omega'') > \sigma \}$



Sia $\vartheta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\quad \vartheta(x) = \begin{cases} 1 & \text{su } \Omega''_\delta \\ 0 & \text{fuori di } \Omega''_{\frac{2}{3}\delta} \end{cases}$

dove $\delta = dis(\partial\Omega', \partial\Omega'') > 0$

$$\sum_{ij} \int_\Omega a_{ij}(x)\, D_j u(x)\, D_i \varphi(x) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx \quad \forall \varphi(x) \in H_0^1(\Omega)$$

Consideriamo le $\varphi(x) = \vartheta(x)\psi(x) \quad \forall \psi \in H^1(\Omega)$

$$D_i \varphi(x) = \vartheta(x) D_i \psi(x) + \underbrace{\psi(x)\, D_i \vartheta(x)}_{\text{lo porto a dx alle '='}}$$

$$\sum_{ij} \int_\Omega a_{ij}(x)\, D_j u\, \vartheta(x) D_i \psi(x) = \underbrace{\int_\Omega f(x)\psi(x)\vartheta(x) - \sum_{ij}\int_\Omega a_{ij}(x)\, D_j u(x)\, \psi(x) D_i \vartheta(x)}_{\text{|| – chiamo } \int_\Omega F(x)\,\psi(x)\,dx}$$

Chiamo $\mathcal{U}(x) = u(x)\,\vartheta(x)$

$$\Rightarrow D_J u\, \vartheta = D_J\left(\mathcal{U}(x)\right) - u(x)\, D_J\, \vartheta(x)$$

questo lo portiamo a dx

$$\circledast \quad \sum_{iJ} \int_\Omega a_{iJ}\, D_J\left(\mathcal{U}_J\right) D_i\, \psi(x) = \int_\Omega F(x)\psi(x) - \sum_{iJ} \int_\Omega a_{iJ}(x)\; D_J \vartheta(x)\; D_i\, \psi(x)\, u(x)\,dx$$

Considero le $\psi \in H^1_0\left(\Omega''_{\frac{\delta}{2}}\right)$ prolungata a 0 fuori

Scelto $|h| < \frac{\delta}{2}$

$$\tau_{r,-h}\, \psi(x) = \frac{\psi(x - h e_r) - \psi(x)}{-h} \quad \text{Per le scelte di } h$$

$$\tau_{r,-h}\, \psi(x) \in H^1_0\left(\Omega''\right)$$

Sostituisco in $\circledast$ $\psi(x)$ con $\tau_{r,-h}\,\psi(x)$

$$\sum_{iJ} \int_{\underset{\text{supp } \tau_{r-h}\psi}{\Omega''}} a_{iJ}\, D_J\left(\mathcal{U}(x)\right) \underbrace{D_i\left(\tau_{r,-h}\,\psi(x)\right)}_{\tau_{r,-h}\left[D_i\,\psi(x)\right]} dx = \int_{\Omega''} F(x)\,\tau_{r-h}\,\psi(x) - \sum_{iJ} \int_{\Omega''} a_{iJ}\, D_J \vartheta_J\, D_i\left(\tau_{r,-h}\,\psi(x)\right) u(x)$$

$$\parallel$$

$$-\sum_{iJ} \int_{\Omega''} \tau_{r,h}\left(a_{iJ}(x) D_J\left(\mathcal{U}(x)\right)\right) D_i\,\psi(x)$$

$$\parallel$$

$$= -\sum_{iJ} \int_{\Omega''} a_{iJ}(x + h e_r)\, \tau_r h\left(D_J\,\mathcal{U}(x)\right) D_i\,\psi(x) - \sum_{iJ} \int_{\Omega''} \tau_{r,h}\, a_{iJ}(x)\; D_J\left(\mathcal{U}(x)\right) D_i\,\psi(x)$$

$$\underbrace{\sum_{iJ} \int_{\Omega''} a_{iJ}(x + h e_J)\, \tau_{r,h}\left(D_J\,\mathcal{U}(x)\right) D_i\,\psi(x)}_{I} = -\int_{\Omega''} F(x)\,\tau_{r,-h}\,\psi(x) - \sum_{i,J=1}^{m} \int_{\Omega''} a_{iJ}\, D_J \vartheta(x)\, D_i\left(\tau_{r,-h}\psi\right) u(x)$$

$$- \sum_{i,J=1}^{m} \int_{\Omega''} \tau_{r,h}\left(a_{iJ}(x)\right) D_J\left(\mathcal{U}(x)\right) D_i\,\psi(x)$$

$$= I_1 + I_2 + I_3$$

OSS I lemmi 1 e 2 sono dimostrati su palle solo per comodità ma valgono per aperti

$$|I_1| \le \|F(x)\|_{L^2(\Omega'')} \|\tau_{r,-h}\psi(x)\|_{L^2(\Omega'')} \le \|F(x)\|_{L^2(\Omega)} |\psi|_{H^1(\Omega'')} \le \circledast$$

$$\|F(x)\|_{L^2} = \| f(x)\theta(x) - \sum_{ij} a_{ij}(x) D_j u(x) D_i(\theta(x))\|_{L^2(\Omega'')} \le$$

$$\le \|f\|_{L^2(\Omega'')} + C\left(\|a_{ij}\|_{\infty,\Omega''}, \|\nabla\theta\|_{\Omega''}, \mu\right)\|u\|_{H^1(\Omega'')}$$

$$\Rightarrow \quad \circledast \le C\left\{\|f\|_{L^2(\Omega'')} + |u|_{H^1(\Omega'')}\right\} |\psi|_{H^1(\Omega'')}$$

Holder $D_i(\tau_{r,-h}\psi)\cdot u$

$$|I_2| \le C\left(\|a_{ij}\|_\infty, \|\nabla\theta\|_\infty, \mu\right)\|D_i\tau_{r,-h}\psi\|_{L^2(\Omega'')}\|u\|_{L^2(\Omega'')}$$

uso $a_{ij}\in C^1$ quindi i r-i le posso vedere come derivate vere.

$$|I_3| \le C\left(\|D a_{ij}\|_\infty, \mu\right) |u(x)|_{H^1(\Omega'')} |\psi(x)|_{H^1(\Omega'')}$$

uso $\psi = \tau_{r,h} u$

$$|I| = \left|\sum_{ij}\int_{\Omega''} a_{ij}(x+he_r)\,\tau_{r,h}D_j u(x)\,\tau_{r,h}u(x)\right| \le$$

$$\le \underbrace{C\left\{\|f\|_{L^2} + |u|_{H^1}\right\}|\tau_{r,h}u|_{H^1(\Omega'')}}_{I} + \underbrace{C|u|_{H^1}|\tau_{r,h}u|_{H^1(\Omega'')}}_{I_3} + \underbrace{C|\tau_{r,h}u|_{H^1(\Omega)}}_{\text{dovrebbe venire da } I_2 \text{ ma non ci risisteremo}}$$

LEZIONE 13

Titolo nota 14/11/2019

Sistemazione conti dimostrazione lezione precedente.

Oss 1 in I all'ultimo passaggio posso mettere $\underset{ij}{a}(x)$ al posto di $a_{ij}(x+he_r)$ per unif continuità.

Il problema era $I_2 = \displaystyle\int_{\Omega''} \sum_{ij} a_{ij} D_j \vartheta\, D_i \left[\tau_{r,-h} \psi \right] u(x)\, dx$

Se voglio sostituire $\psi = \tau_{r,h} \mathcal{U}$ verrebbero delle derivate terze

Scarico $\tau_{r,-h}$ negli altri termini

$$\left| I_2 \right| = \left| -\sum_{ij} \int_{\Omega''} \tau_{r,h} \left(a_{ij}\, D_j \vartheta \right) D_i \psi\, u(x) - \sum_{ij} \int_{\Omega} a_{ij} D_j \vartheta D_i \psi\, \tau_{r,h} u(x)\, dx \right| \leq$$

Adesso metto $\psi = \tau_{r,h} \mathcal{U}$

$$\leq C\left(\|a_{ij}\|_{C^1(\bar\Omega)},\ \|D^2 \vartheta\|_{\infty}, M \right) \left[\|u\|_{L^2(\Omega'')} \sum \|\tau_{r,h} D_i \mathcal{U}\|_{L^2(\Omega'')} + \|\tau_{r,h} u\|_{L^2(\Omega'')} \sum \|\tau_{r,h} D_i \mathcal{U}\|_{L^2} \right.$$

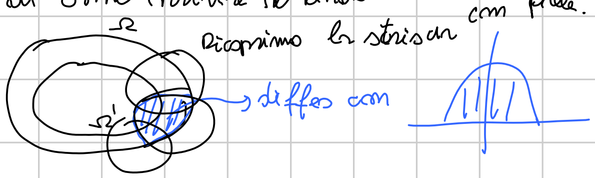
Abbiamo ottenuto $\displaystyle\int_{\Omega''} \left| \tau_{h,r} D_i \mathcal{U} \right|^2 \leq M$

$\Downarrow$ Nirenberg 1

$$\int_{\Omega'} |D_j D_i u|^2 \underset{\uparrow}{\leq} \int_{\Omega''} |D_j D_i \mathcal{U}|^2 \leq M$$

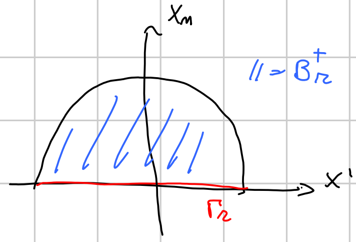
$\mathcal{U} = \vartheta u$ e $u = \mathcal{U}$ in $\Omega' \subset\subset \Omega''$

Idea di come arrivare al bordo



Teorema

Data $-\sum_{ij} D_i\left[a_{ij} D_j u\right] = f(x) \quad x \in B_r^+$



$u(x) = 0$ su Γ_r e $u \in H^1(B_r^+)$

$B_r^+ = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r,\ x_n > 0 \}$

$x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$

$\Gamma_r = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r,\ x_n = 0 \}$

$\{a_{ij}\}$ unif ellittica $\quad a_{ij} \in C^1(\overline{B_r^+}),\ f \in L^2(B_r^+)$

$\Rightarrow \ \exists\, u \in H^2(B_\rho^+) \quad \forall\, \rho \in (0, r)$

$$|u|_{H^2(B_\rho^+)} \leq C(a_{ij}, n) \left\{ \|f\|_{L^2(B_r^+)} + \|u\|_{H^1(B_r^+)} \right\}$$

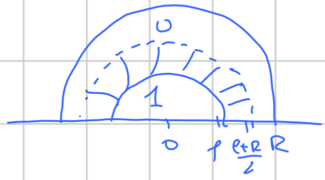
Dim Sia $W^1_{\Gamma_r}(B_r^+) = \{ u \in W^1(B_r^+) \mid u = 0 \text{ su } \Gamma_r \}$

Scriviamo l'eq in forma debole

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{B_r^+} a_{ij}(x)\, D_j u(x)\, D_j \varphi(x)\, dx = \int_{B_r^+} f(x)\, \varphi(x)\, dx \quad \forall\, \varphi(x) \in W_0^1(B_r^+)$$

Preso $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \theta \leq 1$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \in B_\rho^+ \\ 0 & x \notin B^+_{\frac{r+\rho}{2}} \end{cases}$$



Preso $\varphi = \theta \psi$ dove $\psi \in W^1_{\Gamma_r}(B_r^+)$

$$\sum_{ij} \int_{B_r^+} a_{ij} D_j u(x) \underset{\shortparallel}{D_i}(\vartheta(x)\psi(x))dx = \int_{B_r^+} f(x)\vartheta(x)\psi(x)\,dx$$

$$\sum_{ij} \int_{B_r^+} a_{ij} D_j u(x) \underset{\shortparallel}{D_i}\psi(x)\vartheta(x) = \int_{B_r^+} f(x)\vartheta(x)\psi(x) - \sum_{ij}\int_\Omega a_{ij} D_j u(x) D_i\vartheta(x)\psi(x)$$

$$\sum_{ij}\int_{B_r^+} a_{ij} D_j(u(x)\vartheta(x)) D_i\psi(x) - a_{ij}(x)u(x)D_j(\vartheta(x))D_i\psi(x)$$

chiamando $U(x) = u(x)\vartheta(x)$

$$\Rightarrow \underset{\otimes}{} \sum_{ij}\int_{B_r^+} a_{ij} D_j(U(x))D_i\psi(x) = \overbrace{\int_{B_r^+} f(x)\vartheta(x)\psi(x)}^{I_2} - \sum_{ij}\overbrace{\int_{B_r^+} a_{ij} D_j u D_i\vartheta(x)\psi(x)}^{I_2} +$$

$$+ \sum_{ij}\overbrace{\int_{B_r^+} a_{ij}(x)u(x)D_j(\vartheta(x))D_i\psi(x)}^{I_3}$$

Se i r. incrementali li faccio solo nelle direzioni $x_1 \dots x_{n-1}$ per non uscire da B_r^+

quindi presa $\tau_{r,-h}\psi$ al posto di ψ con $|h| <$ opportuna $c(f, r)$

Quindi otteniamo le stime solo per $n-1$ derivate (conti analoghi lez prec)

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{n-1}\int_{B_r^+}|D_r D_i u|^2 dx \le c(\nu, f, r, n, a_{ij})\left\{\|f\|^2_{L^2(B_r^+)} + \|u\|_{H^1(B_r)}\right\}$$

Sistemiamo la derivata mancante

Ripartiamo da $\otimes$ $\displaystyle\int_{B_r^+}\sum_{ij} a_{ij} D_j U D_i\psi =$

$$= \int_{B_r^+} a_{nn}(x) D_n U D_n\psi + \underbrace{\sum_{i+j\neq 2n} a_{ij} D_j U D_i\psi}_{I_4}$$

$\hookrightarrow$ lo porto all'altro membro

Prendo $\psi(x) = \dfrac{\xi(x)}{a_{nn}(x)}$ con $\xi(x) \in C_0^\infty(B_\rho^+)$

$$D_n \psi(x) = \frac{D_n \xi(x)\, a_{nn}(x) - \xi(x)\, D_n(a_{nn}(x))}{[a_{nn}(x)]^2}$$

per unif ellitticità $a_{nn}(x) >> 1$

Sostituendo $\psi(x)$

$$\int_{B_r^+} D_n u\, D_n \xi(x) - \underbrace{\int_{B_r^+} D_n u\, \xi\, \frac{D_n a_{nn}}{a_{nn}}}_{\to \text{ lo porto al secondo membro } I_5}$$

Considero "I_3" $\displaystyle\sum_{i,j=1} \int_{B_r^+} a_{ij} D_j \theta\, D_i \psi u\, dx \underset{\downarrow}{=} -\sum_{ij} \int_{B_r^+} D_i (a_{ij} D_j \theta\, u)\, \psi\, dx$

Poiché $\psi = 0$ su Γ_r
e $\theta = 0$ su ∂B_r^+
Posso spostare la derivata

Considero "I_5" $\displaystyle\sum_{i+j\neq 2n} \int_{B_r^+} D_i [a_{ij} D_j u]\, \psi =$

Problema: 2 derivate?

$$= \sum_{i+j\neq 2n} \int_{B_r^+} D_i a_{ij}\, D_j u\, \psi + a_{ij} \left[D_i D_j u\right] \psi$$

ma non sono mai entrambe $= n$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-1} D_i D_j u + \sum_{i=1}^{n-1} D_i D_n u$$

(non arriva a n; non arriva a n)

quindi poiché le derivate fino a $n-1$ in entrambe le somme le otteniamo prima.

Quindi $I_1 + I_2 + \ldots + I_5 = \displaystyle\int_{B_r^+} \psi(x) \cdot G(x)$ con $G(x) \in L^2(B_r^+)$

$$\Rightarrow \int_{B_\rho^+} D_n u\, D_n \xi = \int_{B_\rho^+} \frac{\overbrace{G(x)}^{\text{è ancora } L^2 \text{ perché } a_{nn} \in C^1(\overline{B_r^+}) \text{ e } a_{nn} \neq 0}}{a_{nn}(x)}\, \xi(x) \quad \forall \xi \in C_0^\infty(B_\rho^+)$$

$\Rightarrow$ Questa è la def. di derivata n-esima Debole per Du

$\Rightarrow \quad \exists\, D_{nn} \mathcal{U} \in L^2(B_\rho^+)$

ma su B_ρ^+ $\mathcal{U} = u \Rightarrow D_{nn} \in L^2(B_\rho^+)$

$D_{nn} u = -\dfrac{G(x)}{a_{nn}}$ e con questo si fanno le solite stime.

Teo
$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) & \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ aperto limitato} \\ -\sum_{ij} a_{ij} \, D_i(a_{ij} u D_j u) = f(x) \end{cases}$$

$\{a_{ij}\}$ unif. ellittica, $\{a_{ij}\} \in C^1(\bar\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$

allora $u \in H^2(\Omega)$ e vale

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \le c \left\{ \|f\|_{L^2} + \|u\|_{H^1(\Omega)} \right\}$$

Dim Siano $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subsetneq \Omega$ $\quad dist(\partial\Omega', \partial\Omega'') = \delta > 0$

$U_e \supseteq V_e$ intorni di $x_e \in \partial\Omega$ $\quad e = 1, \dots, m$

$\partial\Omega \subset \bigcup_{e=1}^m V_e$ e $\Omega \subsetneq \bigcup V_e \cup \Omega'$

$\Phi_e(U_e \cap \Omega) \subset \{y_n > 0\}$

$\Phi_e(U_e \cap \partial\Omega) = \{y_n = 0\}$

ed esiste ψ_e t.c. Φ_e si scrive $\quad \Phi_{e,1,\dots,n-1}(x) = x_i \qquad \det|\mathrm{Jac}\, \phi_e| = 1$

$\Phi_{e,n}(x) = x_n - \psi_e(x') \qquad$ e $u = \tilde{u} \circ \Phi_e$

$$\Rightarrow \sum_{ij} \int_{\Omega \cap U_\ell} a_{ij}(x)\, D_j u(x)\, D_i \varphi(x) = \int_{\Omega \cap U_\ell} f(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in H^1_0(\Omega \cap U_\ell)$$

$$D_i u = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_k} \left(\frac{\partial \Phi_{\ell,k}}{\partial x_i}\right) \phi_{\ell, ks} \qquad a_{ij} = \tilde{a}_{ij} \circ \Phi_\ell$$

$$\sum_{ij} \int_{\tilde{\Omega}_\ell} \tilde{a}_{ij}(x)\, D_k \tilde{u}(y)\, \Phi_{\ell kj}(y)\, D_j \tilde{\varphi}\, \Phi_{\ell hi}(y) = \int_{\tilde{\Omega}_\ell} \tilde{f}\, \tilde{\varphi}$$

Punto cruciale

$$A_{kh} = \sum_{ij=1}^{n} \tilde{a}_{ij}(x)\, \Phi_{\ell kj}\, \Phi_{\ell, hi} \text{ è unif ellittica su } \tilde{\Omega}_\ell$$

LEZIONE 14

Titolo nota 20/11/2019

Teo (volta scorsa)

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} D_i\left(a_{ij}(x)\, D_j u(x)\right) = f(x) \\ u \in H^1_{\Gamma_R}(B_R^+) = \{u \in H^1(B_R^+) \mid u = 0 \text{ su } \Gamma_R\} \end{cases}$$

$x = (x', x_n)$ $\qquad x \in B_R^+ = \{x \mid \|x\| < R,\ x_n > 0\}$

$\Gamma_R = \{x \mid \|x\| < R,\ x_n = 0\}$

$a_{ij}(x) \in C^1(\overline{B_R^+})$, unif ellittici, $f(x) \in L^2(B_R^+)$

$\Rightarrow u \in H^2(B_\rho^+)$ con $\rho < R$

Teo Sia $u \in H^1_{\Gamma_R}(B_R^+)$ dell'equazione sopra, se $a_{ij} \in C^{k+1}(\overline{B_R^+})$

a_{ij} unif ellittica, e $f \in H^k(B_R^+)$

Se $u \in H^{k+1}(B_R^+) \Rightarrow u \in H^{k+2}(B_\rho^+)$ e vale

$$\|u\|_{H^{k+2}(B_\rho^+)} \lesssim c(a_{ij}, n, R)\left\{\|u\|_{H^{k+1}(B_R^+)} + \|f\|_{H^k(B_R^+)}\right\}$$

Dim

$$\|D^\alpha D_{ij} u\|_{L^2(B_R^+)} \leq c(\_\_)\left\{\|\ \|_{H^{k+1}}\right\}$$

$|\alpha| = k \quad \forall i,j = 1 \dots n$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, h)$

Se $h = 0$ posso fare le derivate perché sono "tutte tangenziali"

Derivando l'eq. α-volte

$$-\sum_{i,j} D^\alpha D_i\left(a_{ij} D_j u\right) = \overbrace{D^\alpha f}^{\in L^2}$$

$\shortparallel$

$$-\sum_{ij} D_i\left(a_{ij}\, D^\alpha D_j u\right) = D^\alpha f + G(x)$$

$$G(x) = D_i \sum_{\substack{\gamma\le\alpha \\ \gamma\neq 0}} \binom{\alpha}{\gamma} D^\gamma a_{ij}\, \underbrace{D^{\alpha-\gamma} D_j u}_{\text{ordine } k}$$

se $w = D^\alpha u \in H^2(B^+_\rho)$ con $h=0$

Facciamo induzione su h

$(h \Rightarrow h+1)$ se $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}, h)$ con $|\alpha| = k$

Scrivo l'equazione in forma debole e so che valgono le stime

$$\sum_{ij} \int_{B^+_2} a_{ij}(x)\, D_j u(x)\, D_i \varphi(x)\, dx = \int_{B^+_2} f(x)\varphi(x)\, dx \qquad \varphi(x) \in C^\infty_0(B^+_2)$$

poiché ψ è supp. compatto prendo sezione la derivata α e non ho termini di bordo

$$\sum_{ij} \int_{B^+_2} a_{ij}(x)\, D_j u(x)\, D_i D^\alpha \psi(x)\, dx = \int_{B^+_2} f(x)\, D^\alpha \psi(x)\, dx$$

$$\sum_{ij} \int_{B^+_2} D^\alpha\left[a_{ij}(x)\, D_j u(x)\right] D_i \psi(x) = \int_{B^+_2} D^\alpha f(x) \cdot \psi(x)\, dx$$

isoliamo il termine n,n e gli altri li porto di là

$$\sum_{ij=1}^{n} D^\alpha\left[a_{ij}(x)\, D_j u(x)\right] = D^\alpha\left[a_{nn}(x)\, D_n u(x)\right] + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} D^\alpha\left[a_{ij}(x) D_j u\right]$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} D^\alpha\left[a_{in}(x)\, D_n u\right] + \sum_{j=1}^{n-1} D^\alpha\left[a_{nj}\, D_j u\right]$$

$$D^\alpha\left[a_{nn}\, D_n u(x)\right] = \underbrace{a_{nn}\, D^\alpha D_n u(x)}_{\text{conservo solo questo a sinistra}} + \sum_{\substack{\gamma\le\alpha \\ \gamma\neq 0}} \binom{\alpha}{\gamma} D^\alpha a_{nn}(x)\, D^{\alpha-\gamma} D_n u$$

$$\int_{B_R^+} a_{nn}(x)\, D_n D^\alpha u(x)\, D_n \varphi(x)\, dx = \int_{B_R^+} D^\alpha f(x)\, \varphi(x) + \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R^+} G_i(x)\, D_i \varphi(x)$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \int_{B_R^+} D_i G_i(x)\, \varphi(x)}$$

in questo pezzo le uniche derivate "preoccupanti" sono $D^\alpha D_n u$

$$D^\alpha D_n u = \underbrace{D^{(\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}, h_n)}}_{k+1 \text{ derivate}} D_n u \qquad \Rightarrow D_i G_i(x) \in L^2$$

(Vedi dispense: ma si conclude con $\varphi(x) = \dfrac{\xi(x)}{a_{nn}(x)}$)

<u>Caso equazione completa</u>

<u>Teo</u> Preso $\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} D_i \left(a_{ij}(x) D_j u(x) \right) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) D_i u(x) + a_0 u(x) = f(x), \ x \in \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$

$\{a_{ij}\} \in C^1$, $\{a_i\}$ e $a_0 \in L^\infty$, $f \in L^2$

$\Rightarrow u \in H^2(\Omega)$

<u>Dim</u> portando i termini di primo ordine e ordine 0 a destra ho un termine $L^2(\Omega)$ e uso il teorema di sopra

<u>Generalizzando</u> se $u \in H_0^{k+1}(\Omega)$ $\forall f \in H^k(\Omega)$, $a_{ij} \in C^{k+1}(\Omega)$ $a_i, a_0 \in C^k(\Omega)$

$\Rightarrow u \in H^{k+2}(\Omega)$

<u>Dim</u> Come sopra.

SPAZI DI MORREY

Def $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato, $\delta = \operatorname{diam} \Omega$

Sia $\Omega(x,\rho) = B(x,\rho) \cap \Omega$

diremo che Ω è di tipo A se vale

$\forall x \in \overline{\Omega}$, $\forall \rho \in (0,\delta) \Rightarrow |\Omega(x,\rho)| > A \rho^n$ (la frontiera è abb. bella)

Esempio

Sia $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, \ 0 < y < x^2\}$ non è di tipo A

mentre $[a,b]^n$ sì

Def (Spazio di Morrey)

$L^{p,\lambda}(\Omega)$, Ω di tipo A, $1 \le p < +\infty$, $\lambda \ge 0$ il sottoinsieme di $L^p(\Omega)$

delle u tc

$$\|u\|^p_{L^{p,\lambda}(\Omega)} = \sup_{\substack{x \in \Omega \\ \rho \in (0,\delta)}} \frac{1}{\rho^\lambda} \int_{\Omega(x,\rho)} |u(y)|^p \, dy < +\infty$$

Ex $L^{p,\lambda}(\Omega)$ è uno spazio di Banach con la norma definita subito

Che $\|u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}$ è una norma segue abb. facilmente.

mostriamo che è un Banach

Sia $u_n \in L^{p,\lambda}(\Omega)$ tc $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \nu \in \mathbb{N}$ tc $\forall n, m \ge \nu$

$$\|u_n - u_m\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} < \varepsilon$$

$$\sup_\rho \frac{1}{\rho^\lambda} \int_{\Omega(x,\rho)} |u_n - u_m|^p \, dx < \varepsilon$$

$\Downarrow$ (se vale per il sup vale anche per $\rho = \delta$)

$$\frac{1}{\delta^\lambda} \int_\Omega |u_n - u_m|^p \, dx < \varepsilon \Rightarrow u_n \text{ è di Cauchy in } L^p(\Omega)$$

$\Rightarrow \exists u \in L^p(\Omega)$ tc $u_n \to u$ in $L^p(\Omega)$

inoltre $\{u_n\}$ è limitata in $L^{p,\lambda}(\Omega)$ perché di Cauchy ovvero $\exists c>0$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$\forall x\in\Omega$ $\forall \rho\in[0,\delta]$ $\displaystyle\frac{1}{\rho^\lambda}\int_{\Omega(x,\rho)}|u_n(y)|^p < c$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\rho^\lambda}\int_{\Omega(x,\rho)}|u(y)|^p < c$$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists\nu$ tc $\forall n,m>\nu$ $\forall\rho\in(0,\delta)$, $\forall x\in\Omega$

$$\frac{1}{\rho^\lambda}\int_{\Omega(x,\rho)}|u_n-u_m|^p\,dx<\varepsilon$$

$$\Big\downarrow_{m\to+\infty}$$

$$\frac{1}{\rho^\lambda}\int_{\Omega(x,\rho)}|u_n-u|^p\,dx<\varepsilon$$

<u>Prop</u> (i) $L^{p,0}(\Omega)\simeq L^p(\Omega)$

(ii) $L^{p,n}(\Omega)\simeq L^\infty(\Omega)$

(iii) $L^{p,\lambda}(\Omega)\simeq\{0\}$ se $\lambda>n$

(iv) se $1\le p\le q<+\infty$ e $\displaystyle\frac{\lambda-n}{p}\le\frac{\mu-n}{q}$

$$\Rightarrow L^{q,\mu}(\Omega)\subset L^{p,\lambda}(\Omega)$$

<u>Dim</u> (ii) $L^\infty\subset L^{p,n}$ perché

$$\frac{1}{\rho^n}\int_{\Omega(x,\rho)}|u(y)|^p\le|\Omega(x,\rho)|\sup_\Omega|u(y)|^p\frac{1}{\rho^n}\le$$

$$\le\omega_n\cancel{\rho^n}\frac{1}{\cancel{\rho^n}}\sup_\Omega|u(y)|^p<+\infty$$

$L^{p,n}\subset L^\infty$. Se per assurdo $L^\infty\subsetneq L^{p,n}$ $\exists$ $u\in L^{p,n}$ e $u\notin L^\infty$

$$|u(x)|^p = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{1}{\rho^n} \int_{\Omega(x,\rho)} |u(y)|^p\, dy \qquad \forall x \in \Omega \cap \{\text{punti di Leb di } \Omega\}$$

Teo di Leb

$$\leq \sup_{\substack{x\in\Omega \\ \rho\in(0,\delta)}} \frac{1}{\rho^n} \int_{\Omega(x,\delta)} |u(0)|^p\, dy < +\infty$$

se $u \notin L^\infty$ $\quad \sup_\Omega |v| = +\infty$

preso $S(u,\delta) = \{x\in\Omega \mid |u(x)| > \delta\}$

$\Rightarrow \forall t>0 \quad |S(u,t)| > 0$

$\forall x \in \mathcal{L}(u,x) \cap S(u,t) \quad t\to |u(x)|^p > t^p$

assurdo

(iii) $\forall x \quad \mathcal{L}(u,\Omega)$

$$|u(x)|^p = \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\rho^n} \int_{\Omega(x,\rho)} |u(y)|^p\, dy =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\rho^\lambda} \rho^{\lambda-n} \int_{\Omega(x,\rho)} |u(x)|^p dy \leq$$

$$\leq \|u\|^p_{L^{p,\lambda}(\Omega)} \lim_{\rho\to 0} \rho^{\lambda-n} \overset{\rho>n}{=} 0$$

(iv) $u \in L^{q,\mu}(\Omega) \Rightarrow u \in L^{p,\lambda}(\Omega)$

$$\|U\|^p_{L^{p,\lambda}(\Omega)} = \sup_{\substack{x\in\Omega \\ \rho\in(0,\delta]}} \frac{1}{\rho^\lambda} \int_{\Omega(x,\rho)} |U(y)|^p dy \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{x\in\Omega \\ \rho\in(0,\delta)}} \frac{1}{\rho^\lambda} \left(\frac{\rho^\mu}{\rho^\mu} \int_{\Omega(x,\rho)} |U(y)|^q \right)^{\frac{p}{q}} |\Omega(x,\rho)|^{1-\frac{p}{q}} \leq$$

$$\leq \sup \frac{1}{\rho^\lambda} \rho^{\mu\frac{p}{q}} \cdot \|u\|^p_{L^{q,\mu}(\Omega)}\ \omega_n^{1-\frac{p}{q}} \rho^{n\left(1-\frac{p}{q}\right)} \leq C\cdot\delta^{>0}$$

Lezione 15

Titolo nota 21/11/2019

Spazi di Morrey - Campanato

$$u \in L^{p,\lambda}(\Omega) \iff \sup_{\substack{x\in\Omega \\ \rho\in(0,\delta)}} \frac{1}{\rho^\lambda} \int_{\Omega(x,\rho)} |u(y)|^p dy < +\infty$$

Def

$$u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) \iff \overbrace{\sup_{\substack{x\in\Omega \\ \rho\in(0,\delta)}}}^{[u]^p_{p,\lambda}} \frac{1}{\rho^\lambda} \int_{\Omega(x,\rho)} |u(y) - u_{x,\rho}|^p dy < +\infty$$

$$u_{x,\lambda} = \frac{1}{|\Omega(x,\rho)|} \int_{\Omega(x,\rho)} u(y)\, dy$$

è un seminorm

$\Rightarrow \quad \|u\|^p_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)} = \|u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} + [u]^p_{p,\lambda}$ questa è una norma

ed è uno spazio di Banach (dim. tipo quella di ieri)

<u>Proprietà</u>
1. Se $0 \le \lambda < n$ $\quad \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) \simeq L^{p,\lambda}(\Omega)$ se Ω è di tipo A
2. Se $n < \lambda \le n+p$ $\quad \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) \simeq C^{0,\alpha}(\Omega)$ con $\alpha = \frac{\lambda - n}{p}$ se Ω è di tipo A
3. Se $\lambda > n+p$ $\quad \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) = \{\text{costanti}\}$
4. Se $\lambda = n$ $\quad \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) \simeq BMO(\Omega)$

funzioni a oscillazione controllata

spazio di John-Nirenberg

(2) = Teorema di Campanato (no dim)

Prop $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) \iff u \in L^p(\Omega)$ e $\sup_{\substack{x\in\Omega \\ \rho\in(0,\delta)}} \frac{1}{\rho^\lambda} \inf_{c\in\mathbb{R}} \int_{\Omega(x,\rho)} |u(y)-c|^p \, dy < +\infty$

$\| u\|^p_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)} \longrightarrow$ è una seminorma.

Dim $\Leftarrow$ $\quad \|u\|^p_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)} \leq [U]^p_{p,\lambda} < +\infty$

$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p+b^p)$

$$\Rightarrow \int_{\Omega(x,\rho)} |u(y)-u_{x,\rho}|^p \leq \int_{\Omega(x,\rho)} \left(|U(y)-c| + |c-u_{x,\rho}|\right)^p dy \leq$$

$$\leq 2^{p-1} \int_{\Omega(x,\rho)} |u(y)-c|^p + \int_{\Omega(x,\rho)} |c-u_{x,\rho}|^p \, dy = \otimes$$

$$|c-u_{x,\rho}|^p = \left| c - \frac{1}{|\Omega(x,\rho)|} \int_{\Omega(x,\rho)} u(y)\,dy \right|^p = \left| \frac{\int_{\Omega(x,\rho)} U(y)-c}{|\Omega(x,\rho)|} \right|^p$$

$$\otimes \leq 2^{p-1} \left\{ \int_{\Omega(x,\rho)} |U(y)-c|^p + \int_{\Omega(x,\rho)} \frac{1}{|\Omega(x,\rho)|^p} \left| \int_{\Omega(x,\rho)} U(y)-c \right|^p dy \right\} \leq$$

SCHWARZ-HOLDER (sistemare il conto)

$$\leq 2^{p-1} \cdot C(p,\delta,n) \int_{\Omega(x,\delta)} |U(y)-c|^p \, dy < +\infty$$

(5) Vale come ieri $1 \leq p \leq q < +\infty$ $\quad \frac{\lambda - n}{p} \leq \frac{\mu - n}{q} \Rightarrow \mathcal{L}^{q,\mu}(\Omega) \subseteq \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$

Dim (1)

Dalla prop. segue che $L^{p,\lambda}(\Omega) \subset \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$

segue da $\inf_{c\in\mathbb{R}} \int_{\Omega(x,\rho)} |u(y)-c|^p \, dy \leq \int_{\Omega(x,\delta)} |u(y)|^p \, dy$

Lemma algebrico

Siano $\varphi, \phi : (0,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ non negative

ϕ non decrescente, A α, β costanti positive con $\beta < \alpha$

Supponiamo che $\forall\ t \in (0,1)$ e $\forall\ \sigma\ (0,\delta]$

$$\varphi(t\sigma) \leq A t^{\alpha} \varphi(\sigma) + \sigma^{\beta} \phi(\sigma)$$

allora $\forall\ \varepsilon \in (0, \alpha-\beta]$ e $\forall\ t \in (0,1)$, $\forall \sigma \in (0,d]$ vale

$$\varphi(t\sigma) \leq A t^{\alpha-\varepsilon} \varphi(\sigma) + K(A)\,(t\sigma)^{\beta} \phi(\sigma) \quad \text{e} \quad K(\xi) = \frac{(1+\xi)^{\frac{2\alpha}{\varepsilon}}}{(1+\varepsilon)^{\frac{\alpha\beta}{\varepsilon}} - \xi}$$

Torno a dimostrare $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) \subset L^{p,\lambda}(\Omega)$, chiamo $\rho = t\sigma$

$$\int_{\Omega(x,t\sigma)} |u(y)|^p\,dy = \int_{\Omega(x,t\sigma)} |u(y) - u_{x,\sigma} + u_{x,\sigma}|^p \leq$$

$$\leq 2^{p-1} \left\{ \int_{\Omega(x,t\sigma)} |u(y) - u_{x,\sigma}|^p\,dy + \int_{\Omega(x,t\sigma)} |u_{x,\sigma}|^p\,dy \right\} \overset{\text{uso } t\sigma < \sigma,\ t \in (0,1)}{\leq}$$

$$2^{p-1} \left\{ \int_{\Omega(x,\sigma)} |u(y) - u_{x\sigma}|^p\,dy + |\Omega(x,t\sigma)| \frac{1}{|\Omega(x,\sigma)|^p} \left| \int_{\Omega(x,\sigma)} u(y)\,dy \right|^p \right\} \leq$$

$$\overset{\text{SCHWARZ-HOLDER}}{\leq} 2^{p-1} \left\{ \int_{\Omega(x,\sigma)} |u(y) - u_{x\sigma}|^p\,dy + |\Omega(x,t\sigma)| \int_{\Omega(x,\sigma)} |u(y)|^p\,dy \frac{1}{|\Omega(x,\sigma)|^p} |\Omega(x,\sigma)|^{p-1} \right\} =$$

$$= 2^{p-1} \left\{ \int_{\Omega(x,\sigma)} |u(y) - u_{x\sigma}|^p\,dy + \int_{\Omega(x,\sigma)} |u(y)|^p\,dy \frac{|\Omega(x,t\sigma)|}{|\Omega(x,\sigma)|} \right\} \overset{\Omega \text{ di tipo } A}{\leq}$$

$$\leq 2^{p-1} \left\{ \frac{\sigma^{\lambda}}{\sigma^{\lambda}} \int_{\Omega(x,\sigma)} |u(y) - u_{x\sigma}|^p\,dy + \frac{\omega_n t^n \cancel{\sigma^n}}{A \cancel{\sigma^n}} \int_{\Omega(x,\sigma)} |u(y)|^p\,dy \right. \leq$$

col sup $\sigma\in(0,\delta)$ $x\in\Omega$ nel primo pezzo

$$\leq 2^{p-1}\sigma^{\lambda}[u]^p_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)} + c(n,A)t^n\int_{\Omega(x,\sigma)}|u(y)|^p\,dy$$

$\beta=\lambda$ $\quad \alpha=n$ $\quad \phi(\sigma)=[u]^p_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)}$ $\quad \varphi(\sigma)=\int_{\Omega(x,\sigma)}|u(y)|^p dy$

$$\Rightarrow \varphi(t\sigma)=\int_{\Omega(x,t\sigma)}|u(y)|^p dy \leq C(n,A,p)t^n\varphi(\sigma)+\delta^{\lambda}\phi(\sigma)$$

$\Rightarrow$ usando il Lemma

$$\varphi(t\sigma)\leq C(n,A,p)t^{n-\varepsilon}\varphi(\sigma)+K(-)(t\sigma)^{\lambda}\phi(\sigma) \qquad \varepsilon<n-\lambda$$

$$\frac{1}{\sigma^{\lambda}t^{\lambda}}\varphi(t\sigma)\leq C(n,A,p)\frac{t^{\overset{>0}{n-\varepsilon-\alpha}}}{\sigma^{\lambda}}\varphi(\sigma)+K(\ )\phi(\sigma) \qquad \leq 1$$

$$\frac{1}{(\sigma t)^{\lambda}}\int_{\Omega(x,t\sigma)}|u(y)|^p\leq C(n,A,p)\frac{1}{\sigma^{\lambda}}\varphi(\sigma)+K(\ )\phi(\sigma)\leq \text{costante perché } u\in\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$$

<u>Dim Lemma</u> Fissato $\varepsilon>0$ sia $\tau\in(0,1)$ t.c. $(1+A)\tau^{\varepsilon}=1$

Se $\tau\leq t<1 \Rightarrow \varphi(t\sigma)\leq At^{\alpha-\varepsilon}t^{\varepsilon}\varphi(\sigma)+\sigma^{\beta}t^{\beta}\frac{1}{t^{\beta}}\phi(\sigma)\leq$

$$\leq At^{\alpha-\varepsilon}\varphi(\sigma)+(\sigma t)^{\beta}\frac{1}{\tau^{\beta}}\phi(\sigma)$$

Se $0<t\leq\tau \Rightarrow \exists h\in\mathbb{N}$ $\tau^{h+1}\leq t<\tau^h$

$$\varphi(t\sigma)\leq A\tau^{\alpha}\varphi(\sigma)+\sigma^{\beta}\phi(\sigma) \quad (i)$$

$$\varphi(t^2\sigma)\leq\varphi(t(t\sigma))\overset{\text{uso (i)}}{\leq} A\tau^{\alpha}\varphi(t\sigma)+(t\sigma)^{\beta}\phi(t\sigma)\overset{\text{uso (i) e } \phi \text{ non decr.}}{\leq}$$

$$\leq A\tau^{\alpha}\left(A\tau^{\alpha}\varphi(\sigma)+\sigma^{\beta}\phi(\sigma)\right)+(t\sigma)^{\beta}\phi(\sigma)=$$

$$=A^{2}\tau^{2\alpha}\varphi(\sigma)+A\tau^{\alpha}\sigma^{\beta}\phi(\sigma)+(t\sigma)^{\beta}\phi(\sigma)\overset{t\leq\tau}{\leq}$$

$$\leq A^{2}\tau^{2\alpha}\varphi(\sigma)+(\tau\sigma)^{\beta}\left[A\tau^{\alpha-\beta}+1\right]\phi(\sigma)\quad(ii)$$

$$\varphi(t^{3}\sigma)=\varphi(t(t^{2}\sigma))\overset{(i)}{\leq}A\tau^{\alpha}\varphi(t^{2}\sigma)+(t^{2}\sigma)^{\beta}\phi(t^{2}\sigma)\overset{(ii)+\phi(t^{2}\sigma)\leq\phi(\sigma),\ t^{2}\leq\tau}{\leq}$$

$$\leq A\tau^{\alpha}\left(A^{2}\tau^{2\alpha}\varphi(\sigma)+(\tau\beta)^{\beta}\phi(\sigma)\left[A\tau^{\alpha-\beta}+\right]\right)+(\tau\sigma)^{\beta}\phi(\sigma)\leq$$

msob anelog

$$\dots\leq A^{3}\tau^{3\alpha}\varphi(\sigma)+(\tau^{2}\sigma)^{\beta}\phi(\sigma)\left[A^{2}\tau^{2(\alpha-\beta)}+1\right]$$

iterando fino a (sistemare t e τ dalle dispense)

$$\varphi(\tau^{h}\sigma)\leq A^{h}\tau^{h\alpha}\varphi(\sigma)+(\tau^{h-1}\sigma)^{\beta}\phi(\sigma)\sum_{J=0}^{h-1}(A\tau^{\alpha-\beta})^{J}\quad(n)$$

$$\varphi(t\sigma)=\varphi\left(\frac{t}{\tau^{h}}(\tau^{h}\sigma)\right)\overset{\text{Rec.}}{\leq}A\frac{t^{\alpha}}{\tau^{h\alpha}}\varphi(\tau^{h}\sigma)+(\tau^{h}\sigma)^{\beta}\phi(\sigma)\overset{(n)}{\leq}$$

dato $\tau^{h}\sigma\leq\sigma$

$$\leq\frac{A\,t^{\alpha}}{\tau^{h\alpha}}\left(A^{h}\tau^{h\alpha}\varphi(\sigma)+(\tau^{h-1}\sigma)^{\beta}\phi(\sigma)\sum_{J=0}^{h-1}(A\tau^{\alpha-\beta})^{J}\right)+(\tau^{h}\sigma)^{\beta}\phi(\sigma)$$

$$=A^{h+1}t^{\alpha}\varphi(\sigma)+A\,t^{\alpha}\frac{\tau^{(h-1)\beta}}{\tau^{h\alpha}}\sigma^{\beta}\phi(\sigma)\sum_{J=0}^{h-1}(A\tau^{\alpha-\beta})^{J}+(\tau^{h}\sigma)^{\beta}\phi(\sigma)$$

$$=A^{h+1}t^{\alpha}\varphi(\sigma)+t^{\alpha}\tau^{\beta-\alpha}\frac{\tau^{(h-1)\beta}}{\tau^{h\alpha}}\sigma^{\beta}\phi(\sigma)A\tau^{\alpha-\beta}\sum_{J=0}^{h-1}(A\tau^{\alpha-\beta})^{J}+(\tau^{h}\sigma)^{\beta}\phi(\sigma)=$$

$$=A^{h+1}t^{\alpha}\varphi(\sigma)+t^{\alpha}\tau^{\beta-\alpha}\frac{\tau^{(h-1)\beta}}{\tau^{h\alpha}}\sigma^{\beta}\phi(\sigma)\sum_{J=1}^{h}(A\tau^{\alpha-\beta})^{J}+(\tau^{h}\sigma)^{\beta}\phi(\sigma)\leq$$

$$\boxed{\frac{\tau^{h\beta}}{\tau^{h\alpha}}\ \frac{t^{\alpha}}{\tau^{\alpha}}}\overset{t\leq t^{h}}{\leq}\frac{\cancel{\tau^{\alpha h}}\,\tau^{h\beta}}{\cancel{\tau^{h\alpha}}\,\tau^{\alpha}}=\frac{1}{\tau^{\alpha+\beta}}\underbrace{\tau^{\beta}\tau^{h\beta}}_{<1}<\frac{1}{\tau^{\alpha+\beta}}$$

$$\leq A^{h+1}t^{\alpha}\varphi(\sigma)+\frac{\sigma^{\beta}}{\tau^{\alpha+\beta}}\phi(\sigma)\sum_{J=1}^{h}(A\tau^{\alpha-\beta})^{J}+(\tau^{h}\sigma)^{\beta}\phi(\sigma)$$

$$\leq A^{h+1} t^{\alpha} \varphi(\sigma) + \sigma^{\beta} \phi(\sigma) \frac{1}{\tau^{\alpha+\beta}} \sum_{j=0}^{h} (A\tau^{\alpha-\beta})^{j} \leq$$

è il +1 del raccoglimento

$$\leq A^{h+1} t^{\alpha} \varphi(\sigma) + \frac{\sigma^{\beta} \phi(\sigma)}{\tau^{\alpha+\beta}} \frac{1}{1 - A\tau^{\alpha-\beta}}$$

resta da dirne fuori il t

oss $\varepsilon < \alpha - \beta$

$(1+A)\tau^{\varepsilon} = 1$

$\Rightarrow \alpha \, 1 - A\tau^{\varepsilon} = \tau^{\varepsilon} < \tau^{\alpha-\beta}$

$$A^{h+1} t^{\alpha} = A t^{\alpha-\varepsilon} A^{h} t^{\varepsilon} \leq$$

$$\leq A t^{\alpha-\varepsilon} A^{h} \tau^{h\varepsilon} \leq$$

$$\leq A t^{\alpha-\varepsilon} [\underbrace{(1+A)\tau^{\varepsilon}}_{=1}]^{h}$$

LEZIONE 16

Titolo nota 04/12/2019

Teorema (Maggiorazione tipo Poincaré)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto connesso e limitato, $\partial\Omega \in C^{0,1}$

allora esiste $c(n,p,\Omega) > 0$ tale che $\forall u \in H^{1,p}(\Omega)$ $1 \le p < +\infty$

valga

$$\int_\Omega |u - u_\Omega|^p \le c(n,p,\Omega) \int_\Omega \|\nabla u\|^p dx$$

dove $u_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int u(y)\, dy$

Dim Per Assurdo non è restrittivo considerare $u_\Omega = 0$

$\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists u_m \in H^{1,p}(\Omega)$ tc

$$\begin{cases} \|u_m\|_{L^p(\Omega)} = 1 \\ u_{m,\Omega} = 0 \\ 1 = \int_\Omega |u_m|^p dx > m \int_\Omega \|\nabla u_m\|^p dx \Rightarrow \int_\Omega \|\nabla u_m\|^p dx < \frac{1}{m} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ u_m è limitata in $H^{1,p}(\Omega)$ $\Rightarrow$ per il teorema di Rellich esiste una sottosucc. u_{m_k} e una funzione $u \in H^{1,p}(\Omega)$

$$u_{m_k} \to u \text{ in } L^p(\Omega)$$

$\Rightarrow$ $\|u\|_{L^p} = 1$ e $u_\Omega = 0$

Dalla conv. forte

$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \int_\Omega u_{m_k} D_i\varphi = \int_\Omega u\, D_i\varphi\, dx$ $\forall i = 1,\dots,n$

$$\| $$

$$\lim_{k\to\infty} - \int_\Omega (D_i u_{m_k})\, \varphi = 0$$ (perché tutte le norme del gradiente tendono a 0)

$\Rightarrow \int_\Omega u \, D_i \varphi \, dx = 0 \Rightarrow D_i u = 0$ per def di derivata debole $\forall i = 1 \dots n$

$\Rightarrow$ u è costante $\Rightarrow u \equiv 0$ perché a media nulla $\Rightarrow$ assurdo $\|u\|_{L^p} = 1$

Teorema (maggiorazione tipo Poincaré)

Sia $u \in H^{1,p}(B_R)$ con $1 \le p < +\infty$ allora esiste una costante $C(p,n) > 0$ tale che

$$\int_{B_R} |u(x) - u_{B_R}| \, dx \le C(p,n) \, R^p \int_{B_R} \|\nabla u\|^p \, dx$$

Dim Sia $v(y) = u(r y)$ $\quad \|y\| \le 1$

$v \in H^{1,p}(B_1)$

$$\int_{B_1} |v(y) - v_{B_1}|^p \le C(n,p) \int_{B_1} \|\nabla v(y)\|^p \, dy$$

$$v_{B_1} = \frac{1}{\omega_n} \int_{B_1} v(y) \, dy \overset{x = ry}{=} \frac{1}{\underbrace{\omega_n r^n}_{|B_r|}} \int_{B_R} u(x) \, dx = u_\Omega$$

$$\frac{\partial v}{\partial y_i}(y) = \frac{\partial u(ry)}{\partial y_i} = r \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$$

$$= \quad \|\nabla v\|^p = r^p \|\nabla u\|^p$$

$$\Rightarrow \int_{B_r} |u(x) - u_{B_r}|^p \, dx \le C(n,p) \, r^p \int_{B_r} \|\nabla u\|^p \, dx$$

OSS Gli $\frac{1}{r^n}$ si semplificano da entrambe le parti

Teorema

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato connesso, $\partial\Omega \in C^{0,1}$ se $u \in H^{1,p}(\Omega)$

$D_i u \in L^{p,\lambda}(\Omega)$ $\forall i = 1, \dots, n$ $0 \leq \lambda < n \Rightarrow u \in \mathcal{L}^{p,\lambda+p}(\Omega)$

e

$$[u]_{\mathcal{L}^{p,p+\lambda}(\Omega)} \leq c(p,n,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{è la costante di Lip di } \partial\Omega, \text{ o quella della def. di } \Omega \text{ di tipo A (sono equivalenti)}}}{A}) \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}$$

Se $\lambda + p < n$

$$\|u\|_{L^{p,\lambda+p}(\Omega)} \leq c(n,p,A,\lambda)\left[\sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}\right]$$

Se $\lambda + p > n$, $\gamma = 1 - \frac{n-\lambda}{p}$

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\Omega)} \leq c(n,p,A)\sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}$$

Dim Sia $x_0 \in \Omega$ e $\Omega(x_0,\sigma) = B(x_0,\sigma) \cap \Omega$

$$\int_{\Omega(x_0,\sigma)} |u - u_{\Omega(x_0,\sigma)}|^p \overset{\text{dim. di prima per le palle}}{\leq} c(n,p,A)\frac{\sigma^{p+\lambda}}{\sigma^\lambda} \int_{\Omega(x_0,\sigma)} \|\nabla u\|^p dy \leq$$

(la dimostrazione si basava sull'omotetia quindi la ripeto su $\Omega(x_0,1)$)

$$\leq c(p,n,A)\,\sigma^{\lambda+p} \sup_{\substack{x_0\in\Omega\\ 0\leq\sigma<d_\Omega}} \left[\frac{1}{\sigma^\lambda}\int_{\Omega(x_0,\sigma)} \|\nabla u\|^p dy\right]$$

$\forall x_0 \in \Omega$ $\forall \sigma \in (0, d_\Omega)$

$$\frac{1}{\sigma^{\lambda+p}} \int_{\Omega(x_0,\sigma)} |u(x) - u_{\Omega(x_0,\sigma)}|^p dy \leq c(n,p,A)\, \|\nabla u\|^p_{L^{p,\lambda}(\Omega)}$$

Ricordando $\mathcal{L}^{p,n}(\Omega) \cong BMO(\Omega)$

Def Se $u \in L^1(Q_0)$ diremo che $u \in BMO(Q_0)$ se

cubo con lati paralleli agli assi

$$[u]_{BMO(Q_0)} = \sup \int_Q |u(x) - u_Q|\, dx < \quad Q \subset Q_0$$

oss $\mathcal{L}^{1,n}(Q_0) \cong BMO(Q_0)$

Def $u \in \mathcal{E}_0(Q_0)$ (SPAZIO DI JOHN E NIRENBERG) se $\exists\, H, \beta > 0$ tali che

$\forall \sigma > 0 \quad \forall Q \subset Q_0$

$$|S(\sigma, Q)| \leq H e^{-\beta\sigma} |Q|$$

con $S(\sigma, Q) = \{x : x \in Q,\ |u(x) - u_Q| > \sigma\}$

Prop (semplice) se $u \in \mathcal{E}_0(Q_0) \Rightarrow u \in \mathcal{L}^{p,n}(Q_0) \quad 1 \leq p < +\infty$

Dim

$$\int_Q |u - u_Q(x)|^p dx = p \int_0^{+\infty} \sigma^{p-1} |S(\sigma, Q)|\, d\sigma \leq$$

$$\leq |Q| p H \int_0^{+\infty} \sigma^{p-1} e^{-\beta\sigma} = \frac{H|Q|}{\beta^p} p \underbrace{\int_0^1 |\log t|^{p-1} dt}_{< +\infty}$$

Ricorda $\Gamma(q+1) = \int_0^1 |\log t|^q dt$

Γ di Eulero.

L'altra inclusione non è banale e si mostra facendo vedere che

$$\forall Q \subset Q_0 \qquad |S(\sigma, Q)| \leq H e^{\frac{-\alpha\sigma}{[u]_{p,n}}} |Q|$$

oss Fissato n $\quad \mathcal{L}^{p,n}(Q_0) \cong \mathcal{L}^{q,n}(Q_0) \quad \forall\, 1 \leq p, q < +\infty$

Prop sia $1 \le p < q < +\infty$, $u \in \mathcal{L}^{p,m}(Q_0)$

allora $\frac{\alpha}{H^{\frac{1}{q}}[\Gamma(q+1)]^{1/q}}[u]_{q,m} \le [u]_{q,u} \le [u]_{q,m}$

OSS $BMO(\mathbb{R}^n) \subsetneq \bigcap_{1 \le p < +\infty} L^p(\mathbb{R}^n)$

OSS $BMO(\mathbb{R}^n) \not\subseteq L^\infty(\mathbb{R}^n)$ perché $\log\|x\| \in BMO$

MAGGIORAZIONE DI CACCIOPOLI (caratterizzante le eq ellittiche)

$\{a_{ij}(x)\}_{i,j=1\dots n}$ unif ellittico su B_R

$a_{ij}(x) \in \mathcal{L}^\infty(B_R)$, sia $u(x) \in H^1(B_R)$ sol debole dell'eq

$$\sum_{i,j=1}^n D_i[a_{ij} D_j u] = \sum_{i=1}^n D_i f_i(x) \quad x \in B_R \quad f_i \in L^2(B_R)$$

Allora $\exists\ C(n,\nu,M) \ge 0$ tale che $\forall \rho \in (0,R)$ $\forall\ s, s_1, \dots, s_n$

$$\sum_{i=1}^n \int_{B_\rho} |D_i u(x)|^2 dx \le C(n,\nu,M)\left\{\frac{1}{(R-\rho)^2}\int_{B_R}|u(x)-s|^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_{B_R}|f_i(x)-s_i|^2 dx\right\}$$

e $M = \max_{i,j=1\dots n} \sup_{B_R} |a_{ij}|$

Dim mi scrivo l'eq in forma debole
$\forall \varphi \in H^1_0(B_R)$

$$\sum_{ij}\int_{B_R} a_{ij}(x)\, \underset{D_j(u-s)}{\underbrace{D_j u}}\, D_i \varphi(x)\, dx = \sum_{i=1}^n \int_{B_R} f_i(x) D_i \varphi(x)\, dx$$

costante

$\varphi(x) = \theta^2(x)(u(x)-s)$ $\quad \theta(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\quad$ 1 se $x \in B_\rho$, 0 se $x \notin B_R$

$\Downarrow$

$$D_i \varphi(x) = D_i\left(\vartheta^2 (u(x)-s)\right) = \qquad D_i \vartheta \le \frac{c}{(R-\rho)}$$

$$= D_i(\vartheta(x))\,[\vartheta(x)(u(x)-s)] + \vartheta(x) D_i(\vartheta(x)(u-s))$$

SOSTITUENDO

$$\sum_{ij} \int_{B_R} \overbrace{a_{ij}(x) D_j[u-s]\, D_i[\vartheta(x)]\,(\vartheta(x)(u(x)-s))}^{\text{porto al secondo membro}} + a_{ij}\, \overbrace{\underline{D_j[u-s]\,\vartheta(x)}\, D_i\left[\vartheta(x)(u(x)-s)\right]} =$$

perché $\int_{B_R} D_i\varphi\, dx = 0$ perché φ è a supp. cpt in B_R

$$= \sum_{i=1}^{m} \int_{B_R} (f_i - s_i)\, D_i \varphi(x)\, dx =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \int_{B_R} (f_i - s_i)\, D_i(\vartheta(x))(\vartheta(x)(u-s)) + (f_i - s_i)\,\vartheta(x)\, D_i(\vartheta(x)(u-s))}$$

$$D_j(u-s)\vartheta(x) = D_j[\vartheta(x)(u-s)] - (u-s) D_j \vartheta(x)$$

$$\sum_{ij} \int_{B_R} a_{ij} D_j[\vartheta(x)(u-s)]\, D_i[\vartheta(x)(u-s)] \underbrace{- a_{ij}(x)(u-s) D_j \vartheta(x)\, D_i[\vartheta(x)(u-s)]\, dx}_{\text{porto al secondo membro}}$$

$$\sum_{ij} \int_{B_R} a_{ij} D_j[\vartheta(x)(u-s)]\, D_i[\vartheta(x)(u-s)] = \overbrace{\int \sum_{ij} a_{ij}(x)(u-s) D_j\vartheta(x)\, D_i[\vartheta(x)(u-s)]\, dx}^{I_1} +$$

$$\overbrace{- \sum_{ij}^{m} \int_{B_R} a_{ij} D_j(u-s)\, D_i(\vartheta(x))\,[\vartheta(x)(u-s)]}^{I_2} + \underbrace{I_3 + I_4}$$

uso l'unif ellitticità $\ge \nu \sum_{i=1}^{m} \int_{B_R} |D_i[\vartheta(x)(u-s)]|^2 dx$

abbiamo ottenuto

$$\nu \sum_{i=1}^{m} \int_{B_R} |D_i[\vartheta(x)(u-s)]|^2 dx \le I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

Conclusione delle stime a domani.

LEZIONE 17

Titolo nota 05/12/2019

Continuo dimostrazione Caccioppoli:

$$\nu \sum_{i,j=1}^{m} \int_{B_r} \left| D_i \left[\theta(x)(u(x)-s) \right] \right|^2 \leq I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

$$|I_3| \leq \int_{B_r} \sum_{i=1}^{m} \underbrace{|f_i - s_i|\, |D_i\theta(x)|}_{\downarrow \text{ SCHWARZ-HÖLDER}} |\theta(x)(u(x)-s)| \leq$$

$$\leq \int_{B_r} \left\{ \sum_{i=1}^{m} |f_i - s_i|^2 \right\}^{1/2} \underbrace{\left\{ \sum_{i=1}^{m} |D_i \theta(x)|^2 \right\}^{1/2}}_{\leq\, \sup_{B_r} \|\nabla\theta\|} \left\{ |\theta(x)(u(x)-s)|^2 \right\}^{1/2} dx \leq$$

$$a \cdot b \leq \frac{a^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} b^2$$

$$\leq \sup_{B_r} \|\nabla\theta\| \left(\int_{B_r} \sum_{i=1}^{m} |f_i - s_i|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{B_r} |\theta(x)(u(x)-s)|^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \left(\int_{B_r} \sum_{i=1}^{m} |f_i - s_i|^2 \right) + \sup_{B_r} \frac{\|\nabla\theta\|^2}{2} \int_{B_r} |\theta(x)(u(x)-s)|^2 \leq$$

$\downarrow$ Def di θ

$$\leq \frac{1}{2} \int_{B_r} \sum_{i=1}^{m} |f_i - s_i|^2 + \frac{C}{(r-\rho)^2} \int_{B_r} |u(x)-s|^2$$

$$|I_4| \leq \int_{B_r} \sum_{i=1}^{m} |f_i - s_i|\, \underbrace{|\theta(x)|}_{\leq 1}\, |D_i(\theta(x)(u(x)-s))| \leq$$

$$\leq \int_{B_r} \left\{ \sum_{i=1}^{m} |f_i - s_i|^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{i=1}^{m} |D_i(\theta(x)(u(x)-s))|^2 \right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\int_{B_R} \sum_{i=1}^{n} |f_i - s_i|^2\right)^{1/2} \left(\int_{B_R} \sum_{i=1}^{n} |D_i(\vartheta(u-s))|^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\varepsilon} \int_{B_R} \sum_{i=1}^{n} |f_i - s_i|^2 + \underbrace{\frac{\varepsilon}{2} \int_{B_R} \sum_{i=1}^{n} |D_i(\vartheta(u-s))|^2}$$

$ab \leq \frac{a^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} b^2$

con ε piccolo questo sparisce si porta al primo membro

$$|I_1| \leq \int_{B_R} \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|\, |u-s|\, |D_j \vartheta(x)|\, |D_i[\vartheta(x)(u(x)-s)]| \leq$$

$$\sum_{ij=1}^{n} a_{ij} b_j c_i \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right)^{1/2} c_i \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{ij}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right)^{1/2}$$

$$\int_{B_R} \underbrace{\left(\sum_{ij} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}}_{\leq} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} (D_j \vartheta)^2\right)^{1/2}}_{=} \left(\sum_{i=1}^{n} |D_i(\vartheta)(u-s)|\right)^{1/2} |u-s|\, dx\,.$$

$\max_{ij} \sup_{B_R} |a_{ij}| = M$ perché a_{ij} sono L^∞

$\|\nabla(\vartheta)\| \leq \frac{c}{(R-\rho)}$

$$\leq n^2 M \frac{C}{(R-\rho)} \int_{B_R} \left(\sum_{i=1}^{n} |D_i(\vartheta)|u-s||^2\right)^{1/2} \{|u-s|^2\}^{1/2} \leq$$

$$\leq n^2 M \underbrace{\frac{C}{(R-\rho)} \left(\int_{B_R} |u-s|^2\right)^{1/2}}_{a} \cdot \underbrace{\left(\int_{B_R} \sum_{i=1}^{n} |D_i \vartheta |u-s||^2\right)^{1/2}}_{b} \leq$$

$$\leq n^2 M \quad \frac{a^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} b^2$$

$$|I_2| \leq \int_{B_R} \sum_{ij} |a_{ij}|\, \underbrace{|D_j(u-s)|\,|D_i\vartheta|\, |\vartheta(x)(u-s)|}\, dx =$$

$$\left(D_j(u-s)\cdot\vartheta(x)\right)(u(x)-s) =$$
$$= D_j\left[(u-s)\,\vartheta(x)\right](u(x)-s) - (u-s)^2 D_j(\vartheta(x))$$

$$\leq \underbrace{\int_{B_R} \sum_{ij} |a_{ij}|\,|D_i\vartheta(x)|\left(\left| D_j((u-s)\vartheta(x))(u(x)-s)\right|\right.}_{\text{Analogo a sopra (scambiando } i \text{ e } j)} + |u-s|^2 |D_j(\vartheta(x))|\Big)\, dx$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}\int_{B_R}\sum_{i=1}^{m} |D_i\vartheta(x)(u(x)-s)|^2 + \frac{m^2 M c^2}{2\varepsilon(R-\rho)^2}\int_{B_R} |u(x)-s|^2 dx + \int_{B_R} m^2 M \frac{c^2}{(R-\rho)^2} |u-s|^2$$

Si prende $\varepsilon > 0$ in modo tale che la somma di tutti gli ε sia $< \nu$ in modo da portare i termini con $|D_i\vartheta(x)(u-s)|^2$ al primo membro.
Allora abbiamo

$$C(\nu)\sum_{i=1}^{m}\int_{B_R} \left|D_i(\vartheta(x)(u(x)-s))\right|^2 dx \leq \ldots$$
$$\vee\!/$$
$$C(\nu)\sum_{i=1}^{m}\int_{B_\rho} |D_i(\underset{\substack{\| \\ 1 \text{ su } B_\rho}}{\vartheta(x)}(u(x)-s)|^2 dx$$

CONTROESEMPIO ALL'ESISTENZA DEI SISTEMI DEBOLMENTE ELLITTICI

$$Au = \sum_{i,j=1}^{m} D_i \left(A_{ij}(x) D_j u(x) \right)$$

Se fosse ben posto il problema

$$\begin{cases} Au = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$ tra gli spazi $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \longrightarrow H^{-1}(\Omega, \mathbb{R}^N)$

Se fosse ben posto $\Rightarrow \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}$

Se $u \in H^1(\Omega)$ $\quad A(\theta u) \in H^{-1}(\Omega)$

$$\|\theta u\|_{H^1(B_r)} \leq c \|A(\theta u)\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

$\Downarrow$

una maggiorazione tipo Caccioppoli

Ma se A è un operatore debol. ellittico vale il controesempio di Giaquinta - Lančen

Sia $B(0, e^{-2}) \subseteq \mathbb{R}^3$

$$A_{ij}^{rs} = \delta_{rs}\delta_{ij} + \left(\frac{1}{\log^2 \|x\|} - \frac{9}{2} \right) \varepsilon_{rst}\, \varepsilon_{ijk} \frac{x_t x_k}{\|x\|} \qquad x = (x_1, x_2, x_3)$$

presa $u(x) = \left(\|x\|^{1/2} \log \|x\| \right)^{-1} \dfrac{x}{\|x\|} \in H^1\left(B(0, e^{-2}), \mathbb{R}^3\right)$

e risolve $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{r,s=1}^{3} D_r \left(A_{ij}^{rs} D_s u^i \right) = 0$ ma non è verificata la magg. di Caccioppoli.

Maggiorazioni fondamentali all'interno (Campanato)

Lemma $\{a_{ij}\}$ matrice ellittica con $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (costante)

Sia $u \in C^\infty(\overline{B_R})$ soluzione di

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} u(x) = 0 \quad \text{in } B_R$$

Allora $\exists\, c(n,\nu) > 0 \quad \forall \rho \in (0,R]$

$$\int_{B_\rho} |u(x)|^2\, dx \le c(\nu,n) \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \int_{B_R} |u(x)|^2\, dx$$

Dim Applico Caccioppoli con $f_i = 0$, $s = 0$ $\forall \sigma \in (0,R)$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{B_\sigma} |D_i u(x)|^2\, dx \le c(\nu,n) \frac{1}{(R-\sigma)^2} \int_{B_R} |u(x)|^2\, du$$

Poiché a_{ij} è costante $u \in C^\infty$ e l'eq è $=0$ $\Rightarrow$

$\forall \alpha$ multiindice $\Rightarrow$ anche la derivata α è soluzione

quindi verifica Caccioppoli.

Sia $k \ge 1$ $k \in \mathbb{N}$ applico Caccioppoli diverse volte $\underbrace{\frac{R}{2} < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_{k-1} < R}_{\text{suppongo equidistanti}}$

$$\sum_{|\alpha|=k-1} \sum_{i=1}^{n} \int_{B_{\frac{R}{2}}} |D_i D^\alpha u|^2 \le \frac{c(\nu,n)}{(\sigma_1 - \frac{R}{2})^2} \sum_{|\alpha|=k-1} \int_{B_{\sigma_1}} |D^\alpha u|^2 dx \le$$

$$\le \frac{c(\nu,n)}{(\sigma_1 - \frac{R}{2})^n} \frac{1}{(\sigma_2-\sigma_1)^n} \sum_{|\beta|=k-2} \int_{B_{\sigma_1}} |D^\beta u|^2 dx \le \dots \le$$

$$\leq C(\nu, n, r, k) \int_{B_r} |u(x)|^2 dx$$

Teorema di Sobolev se $k > \frac{n}{2} \Rightarrow H^{k,2}(B_r) \hookrightarrow L^\infty(B_r)$

in particolare $\|u\|_{\infty, B_{r/2}} \leq C(n,r) \underbrace{\|u\|_{H^{k,2}(B_{r/2})}}_{\text{ci sono tutte le derivate k-esime}} \overset{\text{per la stima sopra}}{\leq}$

$$\leq C(n,r,k) \|u\|_{L^2(B_r)}$$

Considero $\rho \in (0, \frac{r}{2})$

$$\int_{B(0,\rho)} |u(x)|^2 dx \leq \rho^n \omega_n \|u\|^2_{\infty, B_\rho} \leq \rho^n \omega_n \|u\|^2_{\infty, B_{\frac{r}{2}}} \leq$$

$$\leq C(n, r, k)\, \rho^n \int_{B_r} |u(x)|^2 dx$$

voglio capire la dipendenza di C da r

Sia $s > 0$ $\quad V(x) = u(sx) \in C^\infty(B_{r/s})$

$\sum a_{ij} D_{ij} V(x) = 0$ in $B_{r/s}$ è soluzione.

$\Rightarrow$ Se $s = r$ $\quad \frac{\rho}{r} < 1$ perché $\rho < r$

$$\int_{B_{\frac{\rho}{r}}} |V(x)| dx \leq C(n,k) \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int_{B_1} |V(x)|^2 dx$$

$y = sx$

$$\int_{B_\rho} |u(y)| \leq C(n,k) \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int_{B_r} |u(x)|^2 \, dx$$

nel caso $\rho \geq \frac{r}{2}$

$$\int_{B_\rho} |u(x)|^2 dx \overset{|u(x)|^2 \geq 0}{\leq} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \underbrace{\left(\frac{r}{\rho}\right)^n}_{\leq 2^n} \int_{B_r} |u(x)|^2 \leq 2^n \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int_{B_r} |u(x)|^2 dx$$

$\Rightarrow \forall \rho \in (0,r) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad$ (perché $D^\alpha v$ è soluzione)

$$\int_{B_\rho} |D^\alpha u|^2 \leq C(n,v) \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int_{B_r} |D^\alpha v(x)|^2 dx$$

LEZIONE 18

Titolo nota 11/12/2019

VISTO LA VOLTA SCORSA

$$\sum_{ij=1}^{n} a_{ij} D_{ij} u = 0 \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}, \ \{a_{ij}\} \text{ è ellittica}, \ u \in C^\infty(\overline{B_R})$$

$\Rightarrow \exists\, c(\nu, n)$ tc $\forall \rho \in (0, R]$

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n \qquad \int_{B(0,\rho)} |D^\alpha u|^2 dx \le c(\nu, n) \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \int_{B_R} |D^\alpha u|^2 dx$$

<u>Prop</u> vale anche $\exists\, c(n, \nu) > 0$ $\forall \rho \in (0, R]$ $\forall s \in \mathbb{R}$

$$\int_{B_\rho} |u(x) - u_{B_\rho}|^2 dx \le c(n, \nu) \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2} \int_{B_R} |u(x) - s|^2 dx$$

<u>Dim</u> per le immersioni di Sobolev

$\forall \ k > \frac{n}{2} + 1 \qquad H^k(B_R) \hookrightarrow C^1(B_R)$

$$\sup_{B_R} \sum_{i=1}^{n} |D_i u| \le c(n, R) \, \|u\|_{H^k(B_R)}$$

osserviamo che se u è sol dell'equazione $\Rightarrow$ anche $u - s$ è sol.

$$\Rightarrow \sup_{B_R} \sum_{i=1}^{n} |D_i (u-s)| \le c(n, R) \, \|u - s\|_{H^k(B_R)}$$

dimostr $\rho < \frac{R}{2} < \sigma_1 \ --- \ \sigma_k < R$

$$\Rightarrow \sup_{B_{R/2}} \sum_{i=1}^{n} |D_i (u-s)| \le c(n, R) \, \|u - s\|_{H^k(B_{R/2})} \overset{\text{uso } k\text{-volte Caccioppoli}}{\le} ---$$

$$\le c(n, \nu) \, \|u - s\|_{L^2(B_R)}$$

adesso $\forall x \in B_\rho$

uso Lagrange

$$|u(x) - u(0)|^2 \leq c(n)\, \rho^2 \sum_{i=1}^n \sup_{B_{r/2}} |D_i u|^2$$

inoltre ricordando

$$\int_{B_\rho} |u - u_{B_\rho}|^2 dx = \inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{B_\rho} |u - c|^2 dx$$

$c = u(0)$

$$\Rightarrow \int_{B_\rho} |u(x) - u_{B_\rho}|^2 dx \leq \int_{B_\rho} |u - u(0)|^2 dx \leq$$

$$\leq c(n)\, \rho^n \sup_{x \in B_r} |u(x) - u(0)|^2 \leq c(n, r)\, \rho^{n+2} \int_{B_{r/2}} |u - s|^2 ds$$

con omotetia si rimuove la dip. da r

e con lo stesso trucco della volta scorsa si rimuove $\rho \geq \frac{r}{2}$

<u>Prop</u> Sia $u \in H^{1,2}(B_r)$ sol debole di

$$A(x, D) = \sum_{i,j=1}^n D_i \left(a_{ij}(x) D_j u \right) = \sum_{i=1}^n D_i f(x) \quad x \in B_r$$

$f \in L^2(B_r)$, $a_{ij} \in C^0(\overline{B_r})$, $\{a_{ij}\}$ unif ellittica su B_r

$\exists\ c(\nu) > 0 \quad \forall \rho \in (0, r]$

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{B_\rho} |D_i u|^2 dx \leq c(\nu) \left\{ \left[\left(\frac{\rho}{r} \right)^n + \omega^2(r) \right] \sum_{i=1}^n \int_{B_r} |D_i u|^2 + \sum_{i=1}^n \int_{B_r} |f_i|^2 dx \right\}$$

Dim si usa l'artificio di Korn

$$A(0,D) = [A(0,D) - A(x,D)] + \sum_{i=1}^{n} D_i f_i$$

sia $u = v + w$

dove w è $\boxed{la}$ sol di

$$\begin{cases} w \in H^{1,2}(B_r) \\ A(0,D)w = [A(0,D)u - A(x,D)u] + \sum_{i=1}^{n} D_i f_i \end{cases}$$ esiste per Lax-Milgram

v è una sol di di

$$\begin{cases} v \in H^{1,2}(B_r) \\ A(0,D)v(x) = 0 \end{cases}$$ (Posso usare le stime anche se $v \notin C^\infty$ perchè se è sol. con bootstrap $v \in C^\infty$)

$\Rightarrow \forall \rho \in (0, r]$

$$\int_{B_\rho} |D_i v|^2 dx \leq C(n,\nu) \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \sum_{i=1}^{n} \int_{B_r} |D_i v(x)|^2 dx$$

il termine $A(0,D)w = \sum_{j\,i=1}^{n} D_i \underbrace{\left[\left(a_{ij}(0) - a_{ij}(x)\right) D_j u\right]} + \sum_{i=1}^{n} D_i \underbrace{f_i}$

nel te di Lax milg. $A(\cdot\ )w = \sum D_i f_i$

$\|w\| \leq \|f_i\|_{L^2}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \int_{B_r} |D_i w|^2 dx \leq C(\nu,n) \sum_{ij}^{n} \int_{B_r} |a_{ij}(x) - a_{ij}(0)|^2 |D_j u|^2 + \sum_{i=1}^{n} \int_{B_r} |f_i|^2 \leq$$

$$\leq c(\nu,n)\,[\omega(r)]^2 \sum_{j=1}^{n} \int_{B_r} |D_j u|^2 + c(n,\nu) \sum_{i=1}^{n} \int_{B_r} |f_i(x)|^2$$

Ricordando $u = v + w$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \int_{B_\rho} |D_i u|^2 dx \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{B_\rho} |D_i v|^2 dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{B_r} |D_i w|^2 dx \leq$$

posso mettere B_r tanto $|D_i w|^2 \geq 0$

$$\leq c(n,\nu) \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \sum_{i=1}^{n} \int_{B_r} |D_i v|^2 + \underbrace{c(n,\nu)[\omega(r)]^2 \sum_{i=1}^{n} \int_{B_r} |D_i u|^2 + c(n,\nu) \sum_{i=1}^{n} \int_{B_r} |f_i(x)|^2 dx}$$

$$|D_i v| = |D_i u - D_i w| \leq |D_i u| + |D_i w|$$

$$\leq c(n,\nu) \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \sum_{i=1}^{n} \int_{B_r} |D_i u| + c(n,\nu) \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \sum_{i=1}^{n} \int_{B_r} |D_i w|^2 + \quad '' \quad \leq$$

$$\shortparallel$$

$$\Big\{ c(n,\nu) \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \omega^2(r) + c(n,\nu) \underbrace{\left(\frac{\rho}{r}\right)^n}_{\leq 1} \Big\} \sum \int_{B_r} |D_i u|^2$$

e poi scelgo $\omega^2(r)$

Prop Nelle ip. del teo precedente $\exists\, c(n,\nu) > 0$ tale che $\forall \rho \in (0, r]$ $\forall \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ $i = 1 \dots n$

Vale:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{B_\rho} |D_i u - \{D_i u\}_{B_\rho}|^2 dx \leq c(\nu,n) \Big\{ \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \sum_{i=1}^{n} \int_{B_r} |D_i u - \beta_i|^2 dx +$$
$$\omega^2(r) \sum_{i=1}^{n} \int |D_i u|^2 + \sum_{i=1}^{n} \int_{B_r} |f_i(x) - \alpha_i|^2 dx \Big\}$$

Dim Applico l'artificio di Korn e spezzo $u = v + w$ come prima

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{B_\rho} |D_i v - \{D_i v\}_{B_\rho}|^2 dx \leq C(\nu,n) \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2} \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R} |D_i v - \beta_i|^2 dx$$

$\forall \rho \in (0,R]$ $\forall \beta_i \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{B_R} |D_i w|^2 dx \leq C(\nu,n) [\omega(R)]^2 \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R} |D_i u|^2 + C(n,\nu) \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R} |f_i|^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{B_\rho} |D_i u - \{D_i u\}_{B_\rho}|^2 dx \overset{\text{dis triang } u = v+w}{\leq}$$

$$\leq 2\left(\sum_{i=1}^{n} \int_{B_R} |D_i v - \{D_i v\}_{B_R}|^2 dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{B_\rho} |D_i w - \{D_i w\}_{B_\rho}|^2 dx \right) \leq$$

$\Uparrow$ uso $\int_{B_\rho} |u - u_{B_\rho}|^2 = \inf \int_{B_\rho} |u - c|$

metto $c = 0$ e aumento ρ a R

$$\leq 2\left(\text{''} + \sum_{i=1}^{n} \int_{B_\rho} |D_i w|^2 dx \right) \leq$$

$\Downarrow$ uso le 2 maggiorazioni sopra

$$\leq C(n,\nu) \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2} \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R} |D_i v - \beta_i|^2 dx + C(n,\nu)\, \omega^2(R) \sum \int_{B_R} |D_i u|^2 + C(\nu,n) \sum_{i=1}^{n} \int_{B_R} |f_i|^2$$

$\wedge$ uso $v = u - w$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{B_R} |D_i u - \beta_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} \int |D_i w|^2 \text{ e riuso la magg.}$$

per ottenere gli α_i si osserva che $D_i f_i = D_i (f_i - \alpha_i)$

REGOLARITÀ DELLE DERIVATE PRIME ALL'INTERNO

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato di $\mathbb{R}^n$

$$\sum_{i,j=1}^{n} D_i \left(a_{ij}(x) D_j u(x) \right) = \sum_{i=1}^{n} D_i f_i(x) \quad x \in \Omega$$

$\{a_{ij}\}$ unif ellittica su Ω

Sia $u \in H^{1,2}(\Omega)$ sol debole dell'eq., $a_{ij} \in C^0(\overline{\Omega})$
$f_i \in \mathcal{L}^{2,\lambda}(\Omega)$ $\lambda \in (0,n)$ (Spazi di Morrey)

$\Rightarrow \nabla u \in \mathcal{L}^{2,\lambda}(\Omega_0)$ $\forall \Omega_0 \subset\subset \Omega$ $u \in H^{1,2,\lambda}(\Omega_0)$

OSS se $\nabla u \in \mathcal{L}^{2,\lambda}(\Omega) \Rightarrow u \in \mathcal{L}^{2,\lambda+2}(\Omega_0)$
$\Rightarrow u \in C^{0,\alpha}(\Omega_0)$ $\alpha = \frac{\lambda+2-n}{2}$ se $\lambda+2-n>0$ se $\lambda > n-2$

Dim Sia $d_0 = \text{dist}(\overline{\Omega_0}, \Omega^c)$, $\overline{B(x_0,R)} \subset \overline{\Omega_0}$ $R < \frac{d_0}{2}$

$\Rightarrow \forall \rho \in (0,R]$ vale

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{B(x_0,\rho)} |D_i u|^2 \, du \le C(\nu) \left\{ \left[\left(\frac{\rho}{R}\right)^n + \omega^2(x_0,R) \right] \sum_{i=1}^{n} \int_{B(x_0,R)} |D_i u|^2 + R^\lambda \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R^\lambda} \int_{B(x_0,R)} |f_i|^2 dx}_{\substack{\wedge\!| \text{ facendo sup} \\ \sup_{x_0 \in \Omega} \frac{1}{R^\lambda} \int |f_i|^2 = \\ = \|f_i\|^2_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\Omega_0)}}} \right\}$$

$\omega(x_0,R) = \max_{ij} \sup_{B(x_0,R)} |a_{ij}(x) - a_{ij}(x_0)|$

$$\le C(\nu) \left\{ \ldots \ldots \ldots + R^\lambda \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{\mathcal{L}^{2,\lambda}(\Omega_0)} \right\}$$

Sia $\varphi(r) = \sum_{i=1}^{n} \int_{B_r} |D_i u|^2 dx$

$B = \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^{2,\lambda}(\Omega)}$

$\Rightarrow$ La stima di sopra si scrive

$$\varphi(\rho) \le \left[c \left(\frac{\rho}{r}\right)^n + \omega(x_0, r)^2 \right] \varphi(r) + r^\lambda B$$

LEMMA ALGEBRICO

φ, ω funzioni non negative definite su $(0, d]$

date c, B, α, β costanti > 0 con $\beta < \alpha$

e supponiamo $\lim_{\sigma \to 0^+} \omega(\sigma) = 0$, e valga $\forall \rho \in (0, r]$ $0 < r < d$

$$\varphi(\rho) \le \left[c \left(\frac{\rho}{r}\right)^\alpha + \omega(r) \right] \varphi(r) + r^\beta B$$

$\Rightarrow$ $\forall \varepsilon \in (0, \alpha - \beta)$ $\exists d_\varepsilon \in (0, d]$ t.c. $\forall \rho \in (0, r]$ e $\forall r \in (0, d_\varepsilon]$

$$\varphi(\rho) \le K_1(\alpha, \beta, \varepsilon, c) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha - \varepsilon} \varphi(r) + \rho^\beta K_2(\alpha, \beta, \varepsilon, c) B$$

(Dim simile all'altro lemma algebrico)

uso il lemma algebrico

come $\alpha = n$ $\varepsilon = \frac{n - \lambda}{2}$ $\beta = \lambda$.

$$\varphi(\rho) \le K_1 \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{n+\lambda}{2}} \varphi(r) + K_2 \rho^\lambda B$$

$$\frac{1}{\rho^\lambda} \varphi(\rho) \le K_1 \frac{1}{r^{\frac{n+\lambda}{2}}} \rho^{\frac{n-\lambda}{2}} \varphi(r) + K_2 B \overset{\rho \le r}{\le}$$

$$\leq \boxed{K_1 \frac{1}{r^{\lambda}} \varphi(r) + K_2 B}$$

costante

$$\Rightarrow \sup_{\rho} \frac{1}{\rho^{\lambda}} \varphi(\rho) < +\infty \Rightarrow \nabla u \in L^{2,\lambda}(Q_0)$$

LEZIONE 19

Titolo nota 12/12/2019

Riassunto: sia $u \in H^1(\Omega)$ sol debole di

$$\sum_{i,j=1}^{n} D_i\left(a_{ij} D_j u(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} D_i f_i(x) \qquad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ aperto limitato}$$

Se $a_{ij} \in C^0(\overline{\Omega})$ e $\{a_{ij}\}$ è unif ellittica su Ω

$f_i \in L^{2,\lambda}(\Omega) \quad 0 < \lambda < n$

$\Rightarrow \nabla u \in L^{2,\lambda}(\Omega_0) \quad \Omega_0 \subset\subset \Omega$

$$\sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|^2_{L^{2,\lambda}(\Omega_0)} \leq C(n, \nu, \Omega_0) \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{L^{2,\lambda}(\Omega)} \right\}$$

Teorema: siano $a_{ij} \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\alpha \in (0,1]$, $\{a_{ij}\}$ unif ellittica su Ω

e $f_i \in \mathcal{L}^{2,n}(\Omega)$ allora $\nabla u \in \mathcal{L}^{2,n}(\Omega_0)$, $u \in H^{1,2,n}(\Omega_0)$

$\Omega_0 \subset\subset \Omega$ e vale

$$\sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_{\mathcal{L}^{2,n}(\Omega_0)} \leq C\left(\nu, n, \|a_{ij}\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}\right) \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{\mathcal{L}^{2,n}} \right\}$$

Dim $\quad \delta_0 = \operatorname{dis}(\overline{\Omega_0}, \Omega^c) > 0$, $\Omega_0 \subseteq \Omega_1 \subset\subset \Omega$

Ω_1 tale che $\operatorname{dist}(\overline{\Omega_0}, \Omega_1^c) = \operatorname{dist}(\overline{\Omega_1}, \Omega^c) = \frac{\delta_0}{2}$

prendendo $\lambda = n - 2\alpha$ (in modo che sia > 0)

$$\mathcal{L}^{2,n}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{L}^{2,n-2\alpha}(\Omega)$$

immersione continua

Allora applicando il teo di ieri con $\lambda = n - 2\alpha$

$$\sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_{\mathcal{L}^{2,n-2\alpha}(\Omega_1)} \leq C(\alpha,\nu,\Omega_1)\left\{\sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{\mathcal{L}^{2,n-2\alpha}(\Omega)}\right\} \leq$$

$$\circledast \quad \underset{\substack{\text{usando}\\ \text{l'inclusione}\\ \text{continua}}}{\leq} C(\alpha,\nu,\Omega_1)\left\{\sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{\mathcal{L}^{2,n}(\Omega)}\right\}$$

Abbiamo visto che vale

$\exists\, c(n,\nu) > 0 \quad \forall \rho \in (0,R] \quad \forall \alpha_1 \dots \alpha_n \quad \beta_1 \dots \beta_n \in \mathbb{R} \quad x_0 \in \Omega_0$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{B(x_0,\rho)} |D_i u - \{D_i u\}_{B(x_0,\rho)}|^2 dx \leq c(\nu,n)\left\{\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2} \sum_{i=1}^{n} \int_{B(x_0,R)} |D_i u - \beta_i|^2 + \omega^2(R) \sum_{i=1}^{n} \int_{B(x_0,R)} |D_i u|^2 + \sum_{i=1}^{n} \int_{B(x_0,R)} |f_i - \alpha_i|^2\right\}$$

Come $\beta_i = \{D_i u\}_{B(x_0,R)} \quad \alpha_i = \{f_i\}_{B(x_0,R)}$

e $\omega(R) = \max_{i,j=1\dots n} \sup_{B(x_0,R)} |a_{ij}(x) - a_{ij}(x_0)|$

poiché a_{ij} $C^{0,\alpha}$ $\quad \omega(R) \leq C(\|a_{ij}\|_{C^{0,\alpha}})\, R^{\alpha}$

$$\Rightarrow \omega^2(R) \int_{B(x_0,R)} |D_i u|^2 \leq C(\|a_{ij}\|_{C^{0,\alpha}})\, R^{2\alpha}\, R^{n-2\alpha} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R^{n-2\alpha}} \underbrace{\int_{B(x_0,R)} |D_i u|^2}_{\text{per } \circledast \text{ sta in } \mathcal{L}^{2,n-2\alpha}} \leq$$

passo al sup su R nella somma e allungo l'integrale $\quad \circledast$

$$\leq C(\|a_{ij}\|_{C^{0,\alpha}})\, R^{n} \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|^2_{\mathcal{L}^{2,n-2\alpha}(\Omega_1)} \leq$$

$$\leq c(n,\nu,\alpha)\, R^{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right\}$$

al pezzo

$$r^n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r^n}\int_{B(x_0,r)} \left| f_i - \{f_i\}_{B(x_0,r)} \right|^2 \overset{f_i \in \mathcal{L}^{2,n}}{\leq} r^n \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{\mathcal{L}^{2,n}(\Omega)}$$

Quindi $\forall \rho \in (0,r)$, $r < \frac{d_0}{2}$ $\forall x_0 \in \overline{\Omega}$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \int_{B(x_0,\rho)} \left| D_i u - \{D_i u\}_{B(x_0,\rho)} \right|^2 dx}_{\varphi(\rho)} \leq C(n,\nu) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \sum_{i=1}^{n} \int_{B(x_0,r)} |D_i u - \{D_i u\}_{B(x_0,r)}| +$$

$$+ \underbrace{C(n,\nu,\alpha) r^n \underbrace{\left\{ \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{\mathcal{L}^{2,n}(\Omega)} \right\}}_{\text{costante.}}}_{B}$$

$$\varphi(\rho) \leq C \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \varphi(r) + r^n B$$

$\alpha = n+2$ $\beta = n$ $\beta < \alpha$ $\varepsilon = 1 \in (0,2)$

Allora per il lemma algebrico

$$\varphi(\rho) \leq K_1 \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+1} \varphi(r) + K_2 \rho^n B$$

$$\frac{1}{\rho^n} \varphi(\rho) \leq K_1 \frac{\rho}{r^{n+1}} \varphi(r) + K_2 B \overset{0<\rho<r}{\leq}$$

$$\leq K \frac{1}{r^n} \varphi(r) + K_2 B$$

$$\frac{1}{\rho^n} \int_{B(x_0,\rho)} \left| D_i u - \{D_i u\}_{B(x_0,\rho)} \right|^2 dx \overset{\text{fisso } r = \frac{d_0}{2}}{\leq} K_1 \frac{2^n}{d_0^n} \underbrace{\int_{B(x_0,r)} |D_i u - \{D_i u\}_{B(x_0,r)}|^2}_{\substack{\text{solita idea che la } \| \|_{\mathcal{L}^{2,n}} \\ \text{è l'inf al variare delle costanti}}} + K_2 B$$

prendo $c = 0$

$$\leq \int_{B(x_0,r)} \sum_{i=1}^{n} |D_i u|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Prop Se $u \in H^{1,2}(\Omega)$ è sol della solita eq.
$\{a,s\} \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ $\quad \alpha \in (0,1]$, $f_i \in \mathcal{L}^{2,n+\alpha}(\Omega) \simeq C^{0,\frac{\lambda-n}{2}}(\Omega)$, $\frac{\lambda-n}{2} = \alpha/2$
allora $\forall \Omega_0 \subset\subset \Omega$ $\quad \nabla u \in L^\infty(\Omega_0)$ e vale

$$\sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|^2_{\infty,\overline{\Omega_0}} \leq C(a_{ij}, \nu, \Omega_0) \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{\mathcal{L}^{2,n+\alpha}(\Omega)} \right\}$$

Dim $\quad d_0 = \operatorname{dist}(\overline{\Omega_0}, \Omega^c) \qquad \Omega_0 \subset\subset \Omega_1 \subset\subset \Omega$

$$\operatorname{dis}(\overline{\Omega_0}, \Omega_1^c) = \operatorname{dis}(\overline{\Omega_1}, \Omega^c) = \frac{d_0}{2}$$

Riapplico la maggiorazione con $\beta_i = \{D_i u\}_{B(x_0,R)}$ e $\alpha_i = \{f_i\}_{B(x_0,R)}$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{B(x_0,\rho)} |D_i u - \{D_i u\}_{B(x_0,\rho)}|^2 \leq C(n,\nu) \left\{ \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2} \sum_{i=1}^{n} \int_{B(x_0,R)} |D_i u - \{D_i u\}_{B(x_0,R)}|^2 + \omega^2(R) \sum_{i=1}^{n} \int_{B(x_0,R)} |D_i u|^2 + \sum_{i=1}^{n} \int_{B(x_0,R)} |f_i - \{f_i\}| \right\}$$

ma $\quad \omega^2(R) \leq C(\alpha)\, R^{2\alpha}$

$$\Rightarrow \quad \omega^2(R) \sum_{i=1}^{n} \int_{B(x_0,R)} |D_i u|^2 \leq R^{2\alpha} R^{n-\alpha} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R^{n-\alpha}} \int_{B(x_0,R)} |D_i u|^2 dx \leq$$

$$\leq R^{n+\alpha} \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_{\mathcal{L}^{2,n-\alpha}(\Omega_1)} \leq C(\alpha, n, \nu)\, R^{n+\alpha} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{L^2(\Omega)} \right\}$$

mentre $\quad R^{n+\alpha} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R^{n+\alpha}} \int_{B(x_0,R)} |f_i - \{f_i\}_{B(x_0,R)}|^2 dx \leq$

$$\leq R^{n+\alpha} \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{\mathcal{L}^{2,n+\alpha}(\Omega)}$$

chiamando $\varphi(\rho)$ la solita cosa, B la cost. che moltiplica $r^{n+\alpha}$

$$\varphi(\rho) \leq C(\nu,n)\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2}\varphi(r) + C r^{n+\alpha} B$$

$n+\alpha < n+2 \qquad \varepsilon = \frac{n+2-n-\alpha}{2} = 1-\frac{\alpha}{2}$

lemma algebrico $\Rightarrow$

$$\varphi(\rho) < K_1 \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+\frac{\alpha}{2}+1}\varphi(r) + K_2\, \rho^{n+\alpha} B$$

$$\frac{1}{\rho^{n+\alpha}}\varphi(\rho) < K_1 \frac{\rho^{1-\alpha/2}}{r^{n+\alpha/2+1}}\varphi(r) + K_2 B$$

$\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^{2,n+\alpha}(\Omega_0)} \leq \ldots$ solita conclusione.

Ma questa è la norma Hölderiana non L^∞

$$\mathcal{L}^{2,n+\alpha}(\Omega) \simeq C^{0,\frac{\alpha}{2}}(\Omega_0)$$

<u>Ma:</u> $u \in C^{0,\alpha/2}(\Omega)$

$$|u(x) - u(x_0)| \leq C\,|x-x_0|^{\alpha/2} \qquad \forall x, x_0 \in \Omega_0$$

$C \leq \|u\|_{C^{0,\alpha}}$

$$|u(x)| \leq |u(x)-u(y)| + |u(y)| \leq$$
$$\leq c\,|x-y|^{\alpha/2} + |u(y)| \leq c\, d(\Omega_0)^{\alpha/2} + |u(y)|$$

$$\int_{\Omega_0} |u(x)|^2 dy \leq \int_{\Omega_0} \|u\|_{C^{0,\alpha/2}} d(\Omega_0)^\alpha + |u(y)|^2 \, dy$$

$$|\Omega_0|\,|u(x)|^2 \leq |\Omega_0|\,\|u\|_{C^{0,\alpha/2}}\, d(\Omega_0)^\alpha + \int_{\Omega_0} |u(y)|^2 dy$$

$$|u(x)|^2 \leq \underbrace{\|u\|_{C^{0,\alpha/2}}}_{\text{l'ho stimato sopra}} d(\Omega_0)^\alpha + \frac{1}{|\Omega_0|}\int |u(y)|\, dy$$

passo al sup su $x \in \Omega_0$ e a sx ottengo una stima di $\|\ \|_\infty$

Applico il ragionamento sopra a ∇u

Prop sia $u \in H^{1,2}(\Omega)$ $\quad a_{ij} \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ $\alpha \in (0,1]$, $\{a_{ij}\}$ unif ellittico

$f_i \in \mathcal{L}^{2,n+2\alpha}(\Omega) \simeq C^{0,\alpha}(\Omega)$ allora

$\nabla u \in \mathcal{L}^{2,\beta}(\Omega_0)$ con $\beta = n+2\alpha$ se $\alpha \in (0,1)$ $\quad \forall \Omega_0 \subset\subset \Omega$

$\beta = n+2\alpha-\varepsilon$ se $\alpha = 1$ $\quad \forall \varepsilon$ $\quad 0 < \varepsilon < n+2\alpha$ e vale la maggiorazione

$$\sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_{\mathcal{L}^{2,\beta}(\Omega_0)} \leq C(\alpha,\nu,n) \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{\mathcal{L}^{2,n+2\alpha}(\Omega)} \right\}$$

$c \to +\infty$ per $\beta \to n+2\alpha$

Dim sempre i soliti conti

$$\omega^2(\Omega) \sum_{i=1}^{n} \int_{B(x_0,r)} |D_i u|^2 \leq r^{2\alpha} r^n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r^n} \int_{B(x_0,r)} |D_i u|^2 dx \leq$$

$$\leq r^{n+2\alpha} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\|D_i u\|_{\mathcal{L}^{2,n}(\Omega_1)}}_{\|\nabla u\|_{\infty,\Omega_1}} \leq$$

$\|\nabla u\|_{\infty,\Omega_1} \to$ uso la stima di prima

al solito $\quad r^{n+2\alpha} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r^{n+2\alpha}} \int_{B(x_0,r)} |f_i - \{f_i\}_{B(x_0,r)}|^2 dx \leq$

$$\leq r^{n+2\alpha} \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{\mathcal{L}^{2,n+2\alpha}(\Omega)}$$

$$\varphi(\rho) \leq C(\nu,n) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \varphi(r) + r^{n+2\alpha} B$$

$\Rightarrow$ Lemma algebrico $\qquad \alpha > \beta \iff \alpha \neq 1$

$$\varphi(\rho) \le K_1 \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2-\varepsilon} \varphi(r) + K_2\, \rho^{n+2\alpha}$$

divido $\rho^{n+2\alpha}$ e poi solita strada

Se $\alpha = 1$ prendo $\beta = n+2\alpha-\varepsilon'$ ritengo le gli $r^{n+2\alpha-\varepsilon'}$ che moltiplico e ottengo

$$\varphi(\rho) \le c(\gamma, n) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \varphi(r) + B\, r^{n+2\alpha-\varepsilon'}$$

$$\Rightarrow \varphi(\rho) \le K_1 \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2-\varepsilon} \varphi(r) + B\, \rho^{n+2\alpha-\varepsilon'} \quad \text{con } \varepsilon \in (0, \varepsilon')$$

LEZIONE 20

Titolo nota 17/12/2019

Riassunto dei risultati precedenti:

Sia l'eq. del tipo $\begin{cases} u \in H^1(\Omega) \\ \sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij} D_j u(x)) = \sum_{i=1}^{n} D_i f_i \end{cases}$

$\{a_{ij}\}$ unif ellittiche in Ω, sia $\Omega_0 \subset\subset \Omega$

1) Se $f_i \in \mathcal{L}^{2,\lambda}(\Omega)$, $i=1 \dots n$, $0 \le \lambda < n$ $\boxed{a_{ij} \in C^0(\Omega)}$ $\Rightarrow u \in H^{1,2,\lambda}(\Omega_0)$

Ricordando inclusioni di Morrey $\nabla u \in \mathcal{L}^{2,\lambda} \Rightarrow u \in \mathcal{L}^{2,\lambda+2}$

$\Rightarrow u \in \mathcal{L}^{2,\lambda+2}(\Omega_0)$ se $\lambda+2 > n \Rightarrow u \in C^{0,\frac{\lambda+2-n}{2}}(\Omega_0)$

2) Se $f_i \in \mathcal{L}^{2,n}(\Omega)$ $i=1 \dots n$, $\boxed{a_{ij} \in C^{0,\alpha}(\Omega)}$ $0 < \alpha \le 1$

$\Rightarrow u \in H^{1,2,n}(\Omega_0) \Rightarrow u \in \mathcal{L}^{2,n+2}(\Omega_0) \Rightarrow u \in C_0^{0,1}(\Omega_0)$

3) Se $f_i \in \mathcal{L}^{2,\lambda}(\Omega)$, $i=1 \dots n$ $n < \lambda \le n+2$, $\boxed{a_{ij} \in C^{0,\alpha}(\Omega)}$ $\alpha = \frac{\lambda-n}{2}$

$\Rightarrow u \in H^{1,2,\beta}(\Omega_0)$

$\beta = \lambda$ $n < \lambda < n+2$ se $\lambda = n+2$ $\beta = n+2-\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$

$f_i \in C^{0,\alpha}$

$\boxed{}$ = ipotesi forti sui coeff.

Domanda: cosa succede se i coeff sono L^∞?

Se $\{a_{ij}\} \in L^\infty(\Omega)$ (METODO TAPPA-BUCHI - HOLE-FILLING)

Per i sistemi e nolini ... $\{A_{ij}\}$ $f_i \in \mathcal{L}^{2,\lambda}$ $\exists \lambda$ tc $u \in H^{1,2,\lambda}(\Omega)$

(CAMPANATO)

Teorema (TAPPA-BUCHI)

$$\begin{cases} u \in H_0^{1,2}(\Omega) \\ \sum_{i,j=1}^{n} D_i\left(a_{ij}(x) D_j u(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} D_i f_i(x) \end{cases}$$

la sol è globale (ossia fino al bordo)

$\{a_{ij}\}$ unif ellittico, Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con $\partial\Omega$ suff regolare.

$a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $f_i \in L^{2,\lambda}(\Omega)$ $\forall i=1 \dots n$, Allora $\exists \alpha \in (0,1)$ tale che

se $\lambda < \alpha \Rightarrow u \in H^{1,2,\lambda}(\Omega)$ se $\lambda \geq \alpha$ $u \in H^{1,2,\mu}(\Omega)$ $\mu \in (0, \alpha)$

oss il vero teo di De-Giorgi avrei $u \in C^{0,\alpha}$, ma il metodo di sopra funziona anche per i sistemi e le eq di ordine superiore.

Dim $\Omega(x_0, \rho) = \Omega \cap B(x_0, \rho)$

$\Omega(x_0, R, \rho) = \Omega \cap \{B(x_0, R) \setminus B(x_0, \rho)\}$

$\exists$ $c(n, \nu) > 0$ $\forall x_0 \in \overline{\Omega}$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |D_i u(x)|^2 dx \leq C(\nu, n) \left[\frac{1}{(R-\rho)^2} \int_{\Omega(x_0,R)} |u(x) - s|^2 dx + \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega(x_0,R)} |f_i(x)|^2 dx \right]$$

La dim dis tipo Poincaré funziona anche con $x_0 \in \partial\Omega$ perché u è nulla al bordo e il $\partial\Omega$ è regolare

Nella dis di Poincaré il termine $\dfrac{1}{(R-\rho)^2}$ deriva da θ funzione smussante

$$\int_{\Omega(x_0,R)} |u(x) - s|^2 |\nabla\theta|^2 dx \leq \frac{1}{(R-\rho)^2} \int_{\Omega(x_0,R)} |u(x) - s|^2$$

e $\quad \vartheta(x) = \begin{cases} 1 & x \in B(x_0, \rho) \\ 0 & x \notin B(x_0, R) \end{cases}$

$\Rightarrow$ i due integrali sopra sono in $\Omega(x_0, R, \rho)$ dato che $\nabla \vartheta = 0$ in $B(x_0, \rho)$

Allora la dis iniziale diventa

$\exists\, c(n,\nu) > 0 \quad \forall x_0 \in \overline{\Omega}, \quad \forall \rho \in (0, R), \quad \forall s \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |D_i u(x)|^2 dx \le C(\nu, n) \left[\frac{1}{(R-\rho)^2} \underline{\underline{\int_{\Omega(x_0,R,\rho)}}} |u(x) - s|^2 dx + \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega(x_0,R)} |f_i(x)|^2 dx \right]$$

quindi vale anche

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |D_i u|^2 dx \le C(n,\nu) \left[\frac{R^2}{(R-\rho)^2} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega(x_0,R,\rho)} |D_i u|^2 x + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega(x_0,R)} |f_i(x)|^2 \right]$$

Perché preso $s = \{u\}_{\Omega(x_0,R,\rho)}$

$$\int_{\Omega(x_0,R,\rho)} |u - \{u\}_{\Omega(x_0,R,\rho)}|^2 dx \le C(n) R^2 \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega(x_0,R,\rho)} |D_i u|^2 dx$$

tornando a questa

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |D_i u|^2 dx \le C(n,\nu) \left[\frac{R^2}{(R-\rho)^2} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega(x_0,R,\rho)} |D_i u|^2 x + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega(x_0,R)} |f_i(x)|^2 \right]$$

aggiungo $\quad C(n,\nu) \dfrac{R^2}{(R^2-\rho)} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_0(\rho)} |D_i u|^2 dx$ (tappo il buco della corona circolare)

$$\left[1+\frac{c(n,\nu)\,R^2}{(R-\rho)^2}\right]\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega(x_0,\rho)}|D_i u|^2 \le c(n,\nu)\left[\frac{R^2}{(R-\rho)^2}\int_{\Omega(x_0,R)}\sum_{i=1}^{n}|D_i u|^2 dx+\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega(x_0,R)}|f_i(x)|^2 dx\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega(x_0,\rho)}|D_i u|^2 dx \le c(n,\nu)\frac{R^2}{\cancel{(R-\rho)^2}}\,\frac{\cancel{(R-\rho)^2}}{(R-\rho)^2+c(\nu,n)R^2}\int_{\Omega(x_0,R)}\sum_{i=1}^{n}|D_i u|^2+\frac{c(\nu,n)(R-\rho)^2}{(R-\rho)^2+c(n,\nu)R^2}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega(x_0,R)}|f_i|^2 dx$$

<u>LEMMA ALGEBRICO</u> (Dim dopo o domani)

Siano $\varphi,\phi:(0,d]\to\mathbb{R}^+$ non decrescenti, $\forall \rho\in(0,R)$

$$\varphi(\rho)\le\frac{cR^p}{(R-\rho)^p+cR^p}\,\varphi(R)+\frac{(R-\rho)^p}{(R-\rho)^p+cR^p}\,\phi(R)\qquad c>0,\ p\ge 1$$

$\Rightarrow \exists\ \alpha\in(0,1)$ t.c. $\forall \rho\in(0,R]$ si ha

$$\varphi(\rho)\le a^\alpha\left(\frac{\rho}{R}\right)^\alpha\varphi(R)+\phi(R)$$

Chiamando $\varphi(\rho)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega(x_0,\rho)}|D_i u|^2 dx$ $\qquad c=c(\nu,n)$

$\qquad p=2$

$\phi(R)=c(n,\nu)\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega(x_0,R)}|f_i|^2 dx$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega(x_0,\rho)}|D_i u|^2 dx\le a^\alpha\left(\frac{\rho}{R}\right)^\alpha\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega(x_0,R)}|D_i u(x)|^2 dx+c(\nu,n)R^\lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R^\lambda}\int_{\Omega(x_0,R)}|f_i(x)|^2 dx$$

$f_i\in L^{2,\lambda}$ passo al sup λ dentro la somma

$$\le a^\alpha\left(\frac{\rho}{R}\right)^\alpha\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega(x_0,R)}|D_i u|^2 dx+c(\nu,n)R^\lambda\sum_{i=1}^{n}\|f_i\|^2_{L^{2,\lambda}(\Omega(x_0,R))}$$

usando il lemma algebrico che dice

$\varphi(t\sigma)$ $\forall t\in(0,1)$ $\forall\ \sigma\in[0,d]$

se $\varphi(t\sigma) \leq A\, t^{\alpha}\varphi(\sigma) + \sigma^{\beta}\phi(\sigma)$

$\Rightarrow$ $\forall\varepsilon\in(0,\alpha-\beta]$ $\forall t\in(0,1]$ $\forall\sigma\in(0,d]$

$$\varphi(t\sigma) \leq A\, t^{\alpha-\varepsilon}\varphi(\sigma) + K(A)\,(t\sigma)^{\beta}\phi(\sigma)$$

$t=\frac{\rho}{r}$ $\quad\sigma = r$ $\quad\lambda=\beta$ $\quad$ (caso $\lambda<\alpha$) $\quad$ altrimenti non posso usare lemma

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega(x_0,\rho)}|D_i u|^2 \leq A\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha-\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega(x_0,r)}|D_i u|^2 + K(A)\,\rho^{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\|f_i\|_{L^{2,\lambda}(\Omega(x_0,r))}$$

divido per $\rho^{\alpha-\varepsilon}$

$$\frac{1}{\rho^{\alpha-\varepsilon}}\sum_{i=1}^{n}\int|D_i u|^2 \leq A\,\frac{1}{r^{\alpha-\varepsilon}}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega(x_0,r)}|D_i u|^2 + K(A)\,\underbrace{\rho^{\overbrace{\boxed{\lambda-\alpha+\varepsilon}}^{>0}}}_{\leq\, r^{\lambda-\alpha+\varepsilon}}\sum_{i=1}^{n}\|f_i\|_{L^{2}(\Omega(x_0,r))}$$

se $\lambda\geq\alpha$ $\Rightarrow$ preso $\mu<\alpha$ $\Rightarrow$ $\rho^{\lambda}=\rho^{\mu}\rho^{\overbrace{\lambda-\mu}^{>0}}\leq\rho^{\mu}r^{\lambda-\mu}$

prima di usare il lemma algebrico.

LEZIONE 21

Titolo nota 18/12/2019

Lemma algebrico (di ieri)

$\varphi, \phi : [0, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ non decrescenti $\forall \rho \in (0, r]$

$$\varphi(\rho) \le \frac{c r^p}{(r-\rho)^p + c r^p} \varphi(r) + \frac{(r-\rho)^p}{(r-\rho)^p + c r^p} \phi(r) \qquad c>0 \quad \forall p \ge 1$$

allora $\exists \alpha \in (0,1)$ tc

$$\varphi(\rho) \le a^\alpha \left(\frac{\rho}{r}\right)^\alpha \varphi(r) + \phi(r)$$

Dim Sia $a > 1$ $\rho = \frac{r}{a}$

$$\varphi\left(\frac{r}{a}\right) \le \underbrace{\frac{c r^p}{\left(r-\frac{r}{a}\right)^p + c r^p}}_{\shortparallel} \varphi(r) + \underbrace{\frac{\left(r-\frac{r}{a}\right)^p}{\left(r-\frac{r}{a}\right)^p + c r^p}}_{\shortparallel} \phi(r) \qquad c>0 \quad p \ge 1$$

$$\underbrace{\frac{c a^p}{(a-1)^p + c a^p}}_{|A| \le 1} \varphi(r) + \underbrace{\frac{(a-1)^p}{(a-1)^p + c a^p}}_{B} \phi(r)$$

$$\varphi\left(\frac{r}{a}\right) \le A \varphi(r) + B \phi(r)$$

$$\varphi\left(\frac{r}{a^2}\right) \le A \varphi\left(\frac{r}{a}\right) + B \phi\left(\frac{r}{a}\right) \le A^2 \varphi(r) + AB \phi(r) + B \phi\left(\frac{r}{a}\right) \le$$

$$\le A^2 \varphi(r) + AB \phi(r) + B \phi(r) =$$

$$= A^2 \varphi(r) + B \phi(r) [A+1]$$

$$\varphi\left(\frac{r}{a^3}\right) \leq A\,\varphi\left(\frac{r}{a^2}\right) + B\,\underbrace{\phi\left(\frac{r}{a^2}\right)}_{\leq \phi(r)} \leq$$

$$\leq A\left\{ A^2\varphi(r) + B\phi(r)[A+1]\right\} + B\,\phi(r) =$$

$$= A^3\varphi(r) + B\phi(r)\left(A^2+A+1\right)$$

Per induzione

$$\varphi\left(\frac{r}{a^{\ell+1}}\right) \leq A^{\ell+1}\varphi(r) + B\,\phi(r)\sum_{i=0}^{\ell} A^i =$$

$$= A^{\ell+1}\varphi(r) + B\,\phi(r)\boxed{\frac{A^{\ell+1}-1}{A-1}} \leq$$

$$\geq \frac{1}{1-A} \quad \text{perché } |A|<1$$

$$\leq A^{\ell+1}\varphi(r) + B\,\phi(r)\cdot\frac{1}{1-A} \leq A^{\ell+1}\varphi(r) + \phi(r)$$

BASTA VEDERE CHE $\frac{B}{1-A} = 1$

cioè $\forall \ell \in \mathbb{N}$

$$\varphi\left(\frac{r}{a^{\ell+1}}\right) \leq A^{\ell+1}\varphi(r) + \phi(r)$$

cmq c'è da trovare.

$$A^{\ell+1} = \left(\frac{c\,a^p}{(a-1)^p + c\,a^p}\right)^{\ell+1} \cdot \frac{\rho^\alpha}{\rho^\alpha} \leq$$

$\forall \rho \in (0, r]\ \exists\, \ell \in \mathbb{N}$

$$\frac{r}{a^{\ell+2}} < \rho < \frac{r}{a^{\ell+1}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\rho^\alpha} < \left(\frac{a^{\ell+2}}{r}\right)^\alpha$$

$$\leq \frac{\left[c\,a^p\right]^{\ell+1}}{\left[(a-1)^p + c\,a^p\right]^{\ell+1}} \cdot \frac{\rho^\alpha}{r^\alpha} \cdot a^{(\ell+2)\alpha} =$$

$$= \frac{\left[\bar{c}\, a^{p+\alpha}\right]^{\ell+1}}{\left[(a-1)^p + c a^p\right]^{\ell+1}} \quad a^{\alpha} \quad \frac{\rho^{\alpha}}{R^{\alpha}}$$

determinare α tc $\quad c\, a^{p+\alpha} = (a-1)^p + c a^p$

ACCENNO ALLA REGOLARITÀ INTORNO ALLA CAMPANATO

<u>Prop</u> Sia $Au = \sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij} D_j u) = \sum_{i=1}^{n} D_i f_i$ in Ω, $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$

$u \in H^{1,2}$ sol dell'eq $f_i \in L^{2,\lambda}(\Omega)$, $\lambda \in (0,n)$, allora $\exists\, \varepsilon \in (0,1)$ tc

$\forall B(x_0,R) \subset\subset \Omega$, e $\forall \rho \in (0,R]$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{B(x_0,\rho)} |D_i u|^2 dx \le c(\nu,n) \left(\frac{\rho}{R}\right)^{\lambda\varepsilon} \left[\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |D_i u|^2 dx + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{L^{2,\lambda}(\Omega)}\right]$$

cioè $\nabla u \in L^{2,\lambda\varepsilon}(\Omega_0)$ $\quad \Omega_0 \subset\subset \Omega$

<u>Dim</u> vorrei usare l'artificio di Korn. ma i coeff. sono L^∞!! come si fa?

<u>Caso $f=0$</u>

$u = v + w$ dove w RISOLVE (μ da determinare)

$$\begin{cases} M(1+\mu)\,\Delta w = M(1+\mu)\Delta u - Au \\ w \in H^1_0(B(x_0,R)) \end{cases}$$

$\Rightarrow \underbrace{M(1+\mu)\,\Delta v = 0}_{\text{eq. ellittica a coeff. costanti}}$

con $M = \max_{ij} \sup_{\Omega} |a_{ij}|$

$\Rightarrow$ per v vale una delle disugg. fond.

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{B(x_0,\rho)} |D_i v|^2 \le c(M,\mu,n) \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n} \sum_{i=1}^{n} \int_{B(x_0,R)} |D_i v|^2$$

Mentre per la w la sol esiste per Lax-Milgram e si può scrivere esplicitamente

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{B(x_0,R)}|D_i w|^2 = \frac{1}{M^2(1+\mu)^2}\sum_{i=1}^{n}\int_{B(x_0,R)}\left|M(1+\mu)D_i u - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}D_j u\right|^2 \leq \circledast$$

Lemma $\forall$ (no DM) $\forall \mu>0$ $\xi\in\mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^{n}\left|M(1+\mu)\xi_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j\right|^2 \leq \left[M\left(1+\sqrt{1+\mu^2}\right)-\nu\right]^2\|\xi\|^2$$

usando il lemma

$$\circledast \leq \underbrace{\frac{\left[M\left(1+\sqrt{1+\mu^2}\right)-\nu\right]^2}{M^2(1+\mu)^2}}_{K<1 \text{ se } \mu>\frac{M^2-\nu^2}{2M\nu}}\sum_{i=1}^{n}\int_{B(x_0,R)}|D_i u|^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{B(x_0,\rho)}|D_i u|^2dx \leq \sum_{i=1}^{n}\left[\int_{B(x_0,\rho)}|D_i v|^2dx + \int_{B(x_0,\rho)}|D_i w|^2\right] \leq$$

$$\leq C(M,\mu,n)\left(\frac{\rho}{R}\right)^n\int_{B(x_0,R)}|D_i v|^2 + K\sum_{i=1}^{n}\int_{B(x_0,R)}|D_i u|^2 \overset{\text{usando } v=u-w}{\leq}$$

$$\leq C(M,\mu,n)\left(\frac{\rho}{R}\right)^n\sum_{i=1}^{n}\int_{B(x_0,R)}|D_i u|^2 + \underbrace{K\left[C(M,\mu,n)\left(\frac{\rho}{R}\right)^n+1\right]}\sum_{i=1}^{n}\int_{B(x_0,R)}|D_i u|^2$$

$$\forall \rho\in(0,R] \quad \exists\, d\in(0,R) \ \text{t.c.} \quad \underbrace{K\left[C(M,\mu,n)\left(\frac{d}{R}\right)^n+1\right]}_{K_1}<1$$

$$\varphi(\rho) \leq \left[C(M,\mu,n)\left(\frac{\rho}{r}\right)^{M} + K_1 \right] \varphi(R)$$

Se vale sopra ∃ un lemma algebrico che dice che $\exists\, \varepsilon \in (0,1)$ tc

$$\varphi(\rho) \leq C \left(\frac{\rho}{r}\right)^{M \cdot \varepsilon} \varphi(R)$$

<u>oss</u> 1) Il $\lambda\varepsilon$ salta fuori quando $f_i \neq 0$

2) Le maggiorazioni iniziali si possono anche fare al bordo quindi si può mostrare a fare anche al bordo la regolarità.