A.A. 2018/2019
Istituzioni di Geometria

Bruno Martelli

Appunti completi del corso

Matteo Stefanini

Questi appunti sono stati presi direttamente a lezione e non sono stati revisionati quindi è molto probabile che siano presenti degli errori. Se volete potete segnalarmi quelli presenti e vi manderò nel più breve tempo possibile la versione rimodificata. L'indice è stato creato copiandolo dal registro delle lezioni. Spero che vi siano d'aiuto e buono studio!

Indice

LEZIONE 01

Titolo nota 26/02/2019

DEF Una varietà topologica di dim m, è uno spazio topologico M t.c.

a) M è di Hausdorff ($\forall x \neq y \ \exists \ U(x) \ V(y)$ t.c. $V(y) \cap U(x) = \emptyset$)

b) M ha una base numerabile (ogni aperto si scrive come unione degli aperti della base)

c) $\forall x \ \exists \ U(x)$ intorno aperto di x omeomorfo a $\mathbb{R}^m$

Notazione: $U(x)$ = intorno aperto di x

DEF X spazio topologico, un'esaustione i compatti è una successione $K_1, \ldots, K_n \ldots$ di compatti tale che $K_i \subseteq \text{Int}(K_{i+1})$ e $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$

Esempio $X = \mathbb{R}^m$ e $K_i = \overline{\mathcal{B}(0, i)}$

Cit "Senza Hausdorff si muore"

Prop Ogni varietà M ha un'esaustione di compatti

Dim Sia $\{U_1, U_2, \ldots\}$ base numerabile

x esercizio: $\exists$ una base $\{V_1, V_2 \ldots\}$ con $\overline{V_i}$ compatto

Idea: vero perché M è una varietà che è loc compatto

Allora $K_1 = \overline{V_1}$ e $K_i = \overline{V_1} \cup \ldots \cup \overline{V_k}$ per k t.c. $K_{i-1} \subseteq \text{Int}(K_i)$ (vedere che esiste tale k)

$\bigcup K_i \supseteq \bigcup V_i \supseteq X$ quindi ho finito.

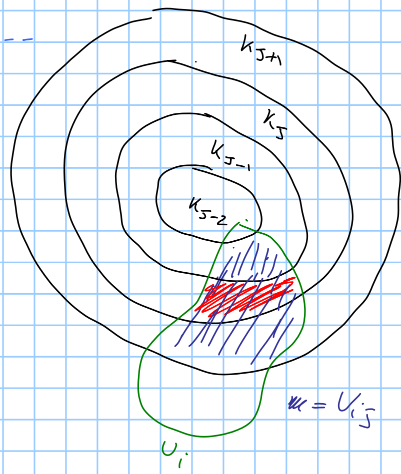
DEF Uno spazio topologico X si dice paracompatto se $\forall$ ricoprimento aperto $\{U_i\}$ $\exists$ un raffinamento $\{V_j\}$ localmente finito

- raffinamento cioè $\forall j \ \exists i$ t.c. $V_j \subseteq U_i$
- localmente finito $\forall x \in U(x)$ che interseca un numero finito di V_j

PROP M VARIETÀ è SEMPRE PARACOMPATTA

DIM PRENDO UN'ESAUSTIONE DI COMPATTI $K_1, K_2, \dots$

SIA $\{U_i\}$ RICOPRIMENTO APERTO



$$V_{iJ} = U_i \cap \left(\operatorname{int}(K_{J+1}) \setminus K_{J-2} \right)$$

OSSERVO CHE $K_J \setminus \operatorname{int} K_{J-1}$ È COMPATTO

E CHE I $\{V_J\}$ SONO UN RAFFINAMENTO DI $\{U_i\}$

PER INDUZIONE SU J, POICHÉ $K_J \setminus \operatorname{int} K_{J-1}$ è COMPATTO $\exists$ UN NUMERO FINITO DI V_{iJ} CHE LO RICOPRONO

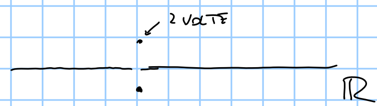
$\forall J$ FISSO SOLO QUELLI E BUTTO VIA QUELLI CHE NON MI SERVONO

ADESSO I $\{V_{i,J}\}$ SONO PARACOMPATTI (SCRIVI BENE PERCHÉ)

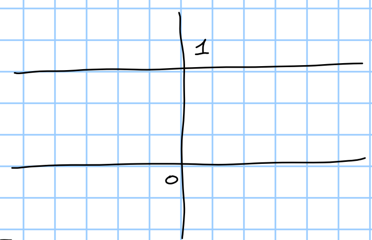
REMARK HO DOVUTO FARE IN MODO CHE ▨ FOSSE CONTENUTO IN UN APERTO ECCO PERCHÉ HO PRESO V_{J-1}, V_J e V_{J+1}

ESEMPI "PATOLOGICI"

1) PUNTO DOPPIO



COME COSTRUIRLO



QUOZIENDO IDENTIFICANDO $y = 1$ CON $y = 0$ TRANNE CHE $X = 0$

NON VALE 2) NELLA DEF MA VALGONO b) e c)

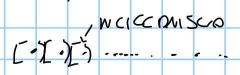
2) PRENDO UNA QUANTITÀ PIÙ CHE NUMERABILE DI COPIE DI $\mathbb{R}$

PRESO $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ TOPOLOGIA PRODOTTO TRA EUCLIDEA E DISCRETA

COSÌ OGNI PIANO È UNA COMP. CONNESSA.

2 bis) LA LINEA LUNGA SIA α UN ORDINALE

IDEA INSIEME ORDINATO



CIOÈ $\alpha \times [0,1)$ CON ORDINE LESSICOGRAFICO

$X = \alpha \times [0,1)$ meno $(0,0)$ (NON VOGLIO UN INIZIO)

SIA τ LA TOPOLOGIA DELL'ORDINE BASE $\{(a,b)\}$

CONTINUO AD ATTACCARE APERTI

MA QUESTO LO POSSO FARE $\forall\ \alpha$ ORDINALE.

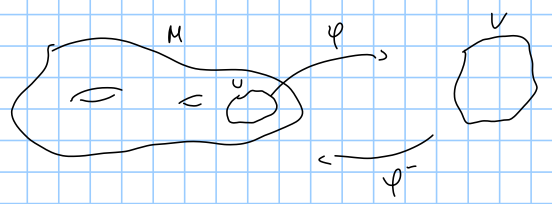
SE $\alpha = \omega_1$ IL PRIMO ORDINALE NON NUMERABILE X È LA LINEA LUNGA

EX (NON SIGNIFICATIVO) X è CONNESSO PER ARCHI, VALGONO a e c MA NON b)

VARIETÀ LISCIA (DIFFERENZIABILE)

M UNA VARIETÀ TOPOLOGICA DI DIMENSIONE m

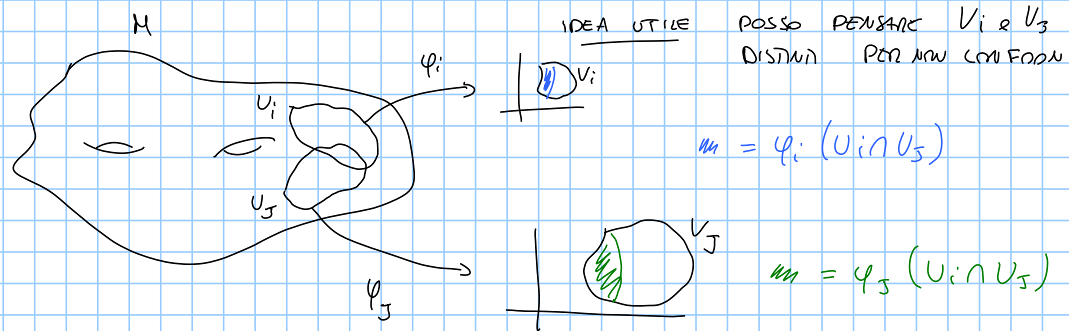
DEF UNA CARTA È UN OMEOMORFISMO $\varphi : U \to V$ $U \subseteq M$ $V \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTI



DEF φ^{-1} è UNA PARAMETRIZZAZIONE

DEF UN ATLANTE PER M È UN'INSIEME DI CARTE $\{\varphi_i : U_i \to V_i\}$

TALE CHE $\{U_i\}$ RICOPRONO M



$$\varphi_{iJ} = \varphi_J \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_J) \longrightarrow \varphi_J(U_i \cap U_J)$$

DEF SE $U_i \cap U_J \neq \emptyset$ φ_{iJ} È DETTA MAPPA DI TRANSIZIONE

OSS LE MAPPE DI TRANSIZIONE SONO FUNZIONI DA APERTI DI $\mathbb{R}^n$ IN APERTI DI $\mathbb{R}^n$ QUINDI POSSO CHIEDERE LA DIFFERENZIABILITÀ

DEF UN <u>ATLANTE LISCIO</u> È UN'ATLANTE IN CUI LE MAPPE DI TRANSIZIONE SONO LISCE (C^∞)

DEF UNA <u>VARIETÀ LISCIA</u> DI DIMENSIONE m È UNA COPPIA $(M, \mathcal{A})$ DOVE M È UNA VARIETÀ TOPOLOGICA DI DIMENSIONE m E $\mathcal{A}$ È UN ATLANTE LISCIO

DEF 2 ATLANTI LISCI SONO COMPATIBILI SE LA LORO UNIONE È ANCORA UN ATLANTE LISCIO. (EX: V È L'EQUI UNA REL DI EQUIVALENZA!)

DEF RIGOROSA

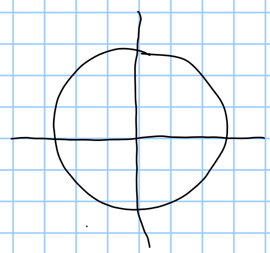
V IN REALTÀ UNA VARIETÀ LISCIA È UNA VARIETÀ TOPOLOGICA M CON UNA CLASSE DI EQUIVALENZA DI ATLANTI LISCI

DEF UN <u>ATLANTE MASSIMALE</u> PER M, È UN ATLANTE CHE CONTIENE TUTTI GLI ATLANTI COMPATIBILI CON ESSO.

DEF 2 VARIETÀ LISCIA SE VARIETÀ CON UN ATLANTE MASSIMALE

<u>ESEMPI</u> 1) $U \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO (U, A) $A = \{\varphi : U \to U,\ \varphi = id\}$

2) $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$



$U_i^+ = \{x \in S^n : x_i > 0\}$

$U_i^- = \{x \in S^n : x_i < 0\}$ 2^n APERTI

$\varphi_i^\pm : U_i^\pm \longrightarrow V^\pm \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ $V^\pm = B(0,1)$ CON LA PROIEZIONE

$$\varphi_i^\pm(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

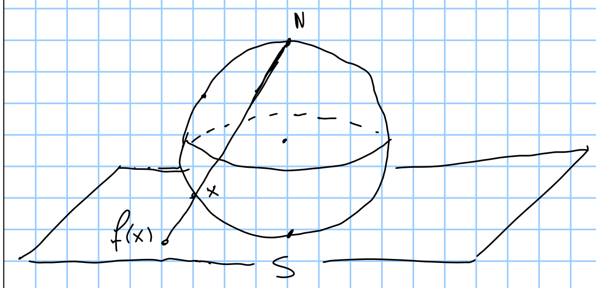
$$(\varphi_i^\pm)^{-1}(y_1, \dots, y_{n-1}) = y_1, \dots, y_{i-1}, \pm\sqrt{1 - \|y\|^2_{n-1}}, y_i, \dots, y_{n-1})$$

SONO UNA L'INVERSA DELL'ALTRA

$\varphi_{ij}^{\pm\pm} = \varphi_j^\pm \circ (\varphi_i^\pm)^{-1}$ SONO LISCE IN QUANTO COMP. DI FUNZIONI LISCE

QUINDI ABBIAMO UNA STRUTTURA LISCIA

ESEMPIO DI UN ALTRO ATLANTE su S^{n-1}



$U = S^{n-1} \setminus \{N\}$

$V = S^{n-1} \setminus \{S\}$

$\varphi_U(x) = f(x) = \frac{2}{1-x_n}(x_1, \dots, x_{n-1})$

OSS I DUE SARANNO SICURAMENTE COMPATIBILI PERCHÈ LE MAPPE DI TRANSIZIONI SI OTTENGONO TUTTE DA COMP. DI FUNZIONI LISCE, SONO LISCE

3) SPAZIO PROIETTIVO $\mathbb{R}\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1}) = \{v \in \mathbb{R}^n : v \neq 0\}/\sim$ $\quad v \sim \lambda v \quad \lambda \neq 0$

COMPATTO, CONNESSO È VARIETÀ TOPOLOGICA.

PUNTO DEL PROIETTIVO IN COORD. OMOGENEE

$[x_0, \dots, x_n]$

$\forall\, i = 0, \dots, n$ DEFINISCO $U_i \subseteq \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ $\quad U_i = \{[x_0, \dots, x_n] : x_i \neq 0\}$

$\varphi_i : U_i \longrightarrow V_i = \mathbb{R}^n$ È UNA CARTA.

$[x_0, \dots, x_n] \longrightarrow \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots \frac{x_n}{x_i}\right)$

BASTA MOSTRARE L'INVERSA $\quad \varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow U_i$

$(y_1 \dots y_n) \rightarrow [y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_n]$

$\{U_i\}$ SONO UN RICOPRIMENTO E LE MAPPE DI TRANSIZIONE SONO LISCE PERCHÈ φ_i e φ_i^{-1} SONO LISCE

EX SCRIVERE φ_{ij} VEDERE CHE È ALGEBRICA E QUINDI LISCE

OSS PERÒ IL PROIETTIVO NON SI METTE BENE DENTRO $\mathbb{R}^n$ QUINDI È BENE AVERE UNA DEFINIZIONE INTRINSECA DI VARIETÀ LISCIA SENZA RICHIEDERE A PRIORI L'IMMERSIONE IN $\mathbb{R}^n$

4) SPAZIO PROIETTIVI COMPLESSI $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ $\mathbb{C}\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$

U_i COME PRIMA $\varphi_i : U_i \to V_i = \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$

$\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$: APERTI $\mathbb{C}^n \to$ APERTI DI $\mathbb{C}^n$

SONO LISCE NEL SENSO DI $\mathbb{R}^{2n}$

$\dim S^n = n$, $\dim \mathbb{R}\mathbb{P}^n = n$, $\dim \mathbb{C}\mathbb{P}^n = 2n$

Ex $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ È COMPATTA E CONNESSA

OPERAZIONI SEMPLICI 1) M È UNA VARIETÀ LISCIA, $U \subseteq M$ APERTO È ANCORA UNA VARIETÀ LISCIA IN MODO NATURALE NEL SENSO: Ex U È UNA VARIETÀ TOPOLOGICA E L'ATLANTE È OTTENUTO NATURALMENTE RESTRINGENDO L'ATLANTE DI M RISTRETTO A U

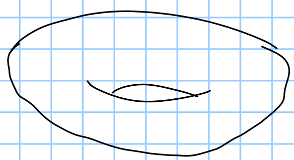
2) PRODOTTO CARTESIANO (M, A) e (M', A')

SIA $(M \times M', A \times A')$ FACENDO I PRODOTTI DI TUTTE LE CARTE

$$A \times A' = \{ \varphi \times \varphi' : \varphi \in A, \varphi' \in A' \}$$

$\varphi : U \to V$ $\varphi \times \varphi' : U \times U' \to V \times V'$

$\varphi' : U' \to V'$ $(x, x') \to (\varphi(x), \varphi'(x'))$

ESEMPIO TORO $S^1 \times S^1 \cong$ 

LEZIONE 02

Titolo nota 28/02/2019

DEF $(M,\mathcal{A})$ una varietà liscia, un omeomorfismo $\varphi: U \longrightarrow V$ è una carta se è compatibile con $\mathcal{A}$.
$$U \subseteq M, \quad V \subseteq \mathbb{R}^n$$

Cioè φ può non stare in $\mathcal{A}$ ma se è compatibile con tutte le sue carte.

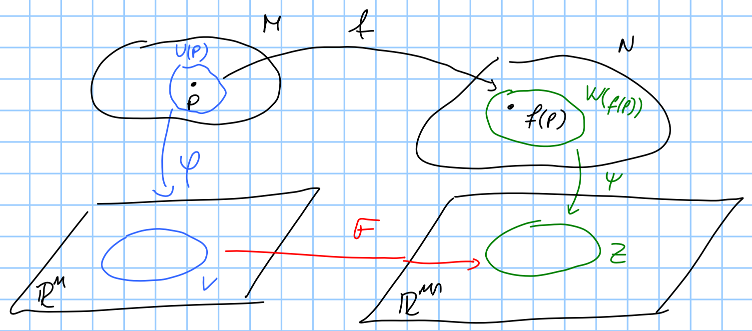
DEF $f: M \longrightarrow N$ varietà lisce, f è liscia se lo è letta in carte.

cioè $\forall\, p \in M \;\; \exists\, U(p) \subseteq M$ e $W(f(p)) \subseteq N$ tale che

i) $f(U(p)) = W(f(p))$

ii) $\exists\, \varphi: U(p) \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\psi: W(f(p)) \longrightarrow Z \subseteq \mathbb{R}^m$ carte.

tc $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ sia liscia



ESEMPI 1) $M =$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$, N aperto di $\mathbb{R}^m$

$f: M \longrightarrow N$ è liscia se lo è nel senso usuale.

2) $i: S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ è liscia. (da vedere con le mano)

DEF Una curva (liscia) nella varietà M è una mappa $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow M$ I intervallo aperto

NOTAZIONE Di solito il termine funzione si usa se $f: M \to \mathbb{R}$ mentre tra varietà si usa mappa

DEF UN DIFFEOMORFISMO È UNA MAPPA LISCIA INVERTIBILE CON MAPPA LISCIA INVERTIBILE

ESEMPIO 1) $Id : M \longrightarrow M$
$p \longrightarrow p$

2) $i : S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$ MAPPA ANTIPODALE
$x \longrightarrow -x$

3) $f: B^n = B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ LA SUA INVERSA $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow B^n$
$x \longrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{1-\|x\|^2}}$ $\qquad x \longrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{1+\|x\|^2}}$

4) IMPORTANTE: LE CARTE SONO DIFFEO

Ex $\mathbb{R}\mathbb{P}^1 \cong S^1$ $\qquad \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \cong S^2$
DIFFEOMORFO

È SOLO UN INSIEME

TRACCIA $\mathbb{R}\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \longrightarrow S^1$ $\qquad$ ○ = HANNO UNA STRUTTURA LISCIA
$[x_0, x_1] \longrightarrow \dfrac{x_0}{x_1} \longrightarrow$
PROIEZIONE STEREOGRAFICA

AL DI FUORI DI $[1,0]$ È SICURAMENTE LISCIA

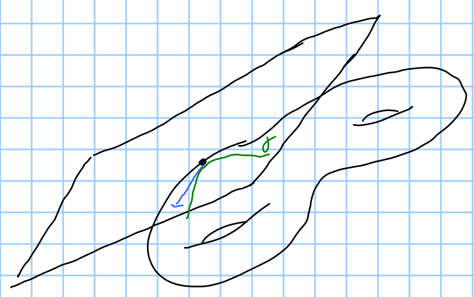
IN $[1,0]$ NON È SCONTATO SI VEDE PRENDENDO L'ALTRA CARTA

PER $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow S^2$

SPAZIO TANGENTE

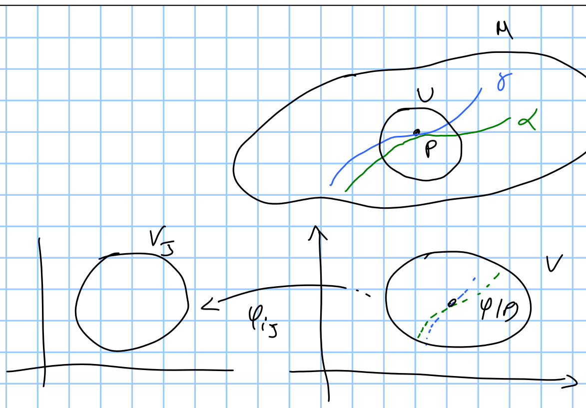
DEF1 M UNA VARIETÀ, $p \in M$

$$T_pM = \{\gamma : I \to M : 0 \in I, \gamma(0) = p\} \big/ \sim$$



$\gamma \sim \alpha$ SE SONO TANGENTI IN P.

DEF DUE CURVE $\alpha : I_1 \to M$, $\gamma : I_2 \to M$ $\quad \alpha(0) = \gamma(0) = p \in M$
SONO TANGENTI SE LO SONO LETTE IN CARTE



$\varphi \circ \gamma$

$\varphi \circ \alpha$

$\mathbb{R}^m \to$ QUI HO UN CONCETTO DI TANGENZA

$(\varphi \circ \gamma)'(0) = (\varphi \circ \alpha)'(0)$

<u>OSS</u> LA DEFINIZIONE NON DIPENDE DA φ PERCHÉ φ_{ij} È UN DIFFEO SU $\mathbb{R}^m$ e I DIFFE CONSERVANO LA NOZIONE DI TANGENZA

<u>ESEMPIO</u> 1) $U \subseteq \mathbb{R}^m$ APERTO $\qquad T_p U = \{$CURVE PASSANTI PER p A MENO DI TG$\} = \mathbb{R}^m$

CANONICAMENTE UGUALE

$$T_p U \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$\gamma \longrightarrow \gamma'(0)$$

<u>DEF 2</u> $T_p M = \{$ DERIVAZIONI IN $p \}$

<u>DEF</u> $p \in M$ LISCIA, UNA <u>DERIVAZIONE</u> IN p È UN MODO DI ASSOCIARE A QUALSIASI f LISCIA $f : U(p) \to \mathbb{R}$ UN NUMERO $v(f) \in \mathbb{R}$ TALE CHE:

i) SE f e g COINCIDONO SU $U(p) \Rightarrow v(f) = v(g)$

ii) È LINEARE $v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu\, v(g)$ (f g DEFINITE SULLO STESSO DOMINIO AFF. ABBIA SENSO $\lambda f + \mu g$)

iii) (LEIBNITZ) $v(fg) = v(f)\, g(p) + f(p) \cdot v(g)$

<u>ESEMPIO</u> 1) $U \subseteq \mathbb{R}^m$ $\quad \forall p \in U$ $\quad \forall v \in \mathbb{R}^m$ $\quad \partial_v f = \sum_{i=1}^{m} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} f = v(f)$

∂_v È UNA DERIVAZIONE (OVVIO NEI CORSI DI ANALISI)

RESTA DA FAR VEDERE CHE NON C'È ALTRO

PROP OGNI DERIVAZIONE IN p È UN ∂_v ($p = 0$ PER COMODITÀ)

DIM SIA D UNA DERIVAZIONE

SIA $f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) x_i + \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}(x) x_i x_j$ $\quad h_{ij}(x)$ LISCE

(TAYLOR)

$$D f(0) = D(1) \cdot f(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \cdot D(x_i) + \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} D(h_{ij}(x) x_i x_j)}_{=0}$$

VEDENDO COME $f(0) = f(0) \cdot 1$

$D(1) = 0$

INFATTI $D(1) = D(1 \cdot 1) \overset{\text{LEIBNIZ}}{=} 2D(1)$

PERCHÈ NELLA DERIVATA DEL PRODOTTO TRIPLO UNO TRA x_i e x_j NON È DERIVATO E QUINDI VA VALUTATO IN 0

$$\Rightarrow D(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \underset{v_i}{D(x_i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) v_i = \frac{\partial f}{\partial v}(0)$$

CHIAMANDO $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

QUINDI SE $p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad T_pU = \mathbb{R}^n$

ASSOCIANDO $\partial_v \longrightarrow v$

PROP DEF 1 e DEF 2 SONO EQUIVALENTI

DIM PERCHÈ SI PUÒ PASSARE DA UNA ALL'ALTRA.

DA $1 \to 2$

SIA $\gamma(0) = p$ $\quad \gamma$ CURVA SU M $\rightsquigarrow$ D DERIVAZIONE PRESA $f \circ \gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$D(f) = (f \circ \gamma)'(0) \in \mathbb{R}$$

SI DIMOSTRA CHE È BIUNIVOCO (BASTA PASSARE IN CARTE)

IN CARTE LE COSE DIVENTANO OVVIE PERCHÈ SONO IN $\mathbb{R}^n$.

OSS C'È ANCHE DA VEDERE OLTRE ALLA BIGEZIONE CHE LA CORRISPONDENZA SIA BEN DEFINITA, OVVERO NON DIPENDA DALLA CLASSE DI EQ DI γ.

PROP T_pM È UNO SPAZIO VETTORIALE (CON DEF 2) DELLA STESSA DIM DI M

EX $D_1, D_2 \in T_pM$ DERIVAZIONI, $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda D_1 + \mu D_2$ È UNA DERIVAZIONE

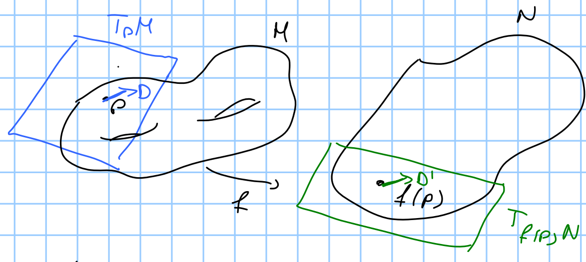
<u>DEF</u> SIA $f: M \longrightarrow N$ UNA MAPPA LISCIA

$\forall\, p \in M$ è DEFINITO IL <u>DIFFERENZIALE</u> DI f IN p

$df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ LINEARE

CURVE $[\gamma] \longrightarrow [f \circ \gamma]$

DERIVAZIONE $D \longrightarrow D'$



CON $g: N \to \mathbb{R}$ $\quad D'(g) = D(g \circ f)$

TEORICAMENTE CI SAREBBE DA FARE TUTTE LE VERIFICHE DELLE BUONE DEFINIZIONI DELL' EQUIVALENZA

<u>OSS</u>: IL DIFFERENZIALE è FUNTORIALE

<u>CIOè</u> $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} W$ $\qquad \boxed{d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p}$

$p \longrightarrow f(p) \longrightarrow g \circ f(p)$

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "df_p"] \arrow[rr, bend right, "d(g\circ f)_p"'] & T_{f(p)}N \arrow[r, "dg_{f(p)}"] & T_{f\circ g(p)}W \end{tikzcd}$$

E VALE

$$\boxed{d(id_M)_p = id_{T_pM}}$$

<u>COROLLARIO</u> SE $f: M \longrightarrow N$ DIFFEO $\Rightarrow df_p$ è ISOMORFISMO $\forall p \in M$

<u>DIM</u> f DIFFEO $\Rightarrow \exists g$ tc $f \circ g = id_N$ e $g \circ f = id_M$ E USANDO LE PROP. SOPRA

$d(g \circ f)_p = d(id_M)_p$

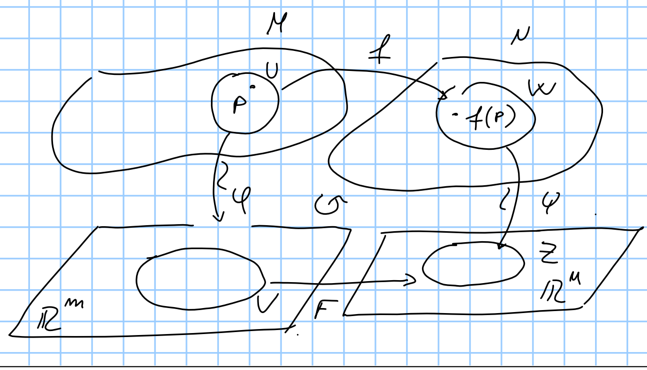
$dg_{f(p)}\underbrace{df_p}_{} = id\, T_M$

QUINDI è INVERTIBILE $\Rightarrow$ è ISOMORF.

VEDIAMO CHE LEGGENDO TUTTO IN CARTE LE VERIFICHE SONO PRATICAMENTE OVVIE

SIA $f: M \longrightarrow N$

$p \longrightarrow f(p)$



SICCOME IL DIFFERENZIALE È FUNTORIALE IL DIAGRAMMA DI SOPRA DIVENTA

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "df_p"] \arrow[d, "d\varphi_p", "\wr"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & T_{f(p)}N \arrow[d, "d\psi_{f(p)}", "\wr"'] \\ \mathbb{R}^m = T_{\varphi(p)}V \arrow[r, "dF_{\varphi(p)}"'] & T_{\psi\circ f(p)}Z = \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

E ANCHE QUESTO È COMMUTATIVO

NOTAZIONE $\circlearrowleft$ DIAGRAMMA COMMUTATIVO.

CIOÈ IL DIFFERENZIALE LETTO IN CARTE DIVENTA UN'APP. LINEARE DA $\mathbb{R}^m$ IN $\mathbb{R}^n$

OSS $\boxed{rg\ df_p = rg\ dF_{\varphi(p)}}$

DEF $\gamma : I \to M$ CURVA LA "VELOCITÀ" DI γ AL TEMPO 0 È LA CHIAMO

$$d\gamma_0 : \underset{\underset{\mathbb{R}}{\wr|}}{T_0 I} \to T_{\gamma(0)}M \qquad \gamma'(0) := d\gamma_0(1) \in T_{\gamma(0)}M$$

ATTENZIONE: NELLO SPAZIO TANGENTE HO SOLO UNA STRUTTURA DI SPAZIO VETTORIALE E NON HO PRODOTTI SCALARI QUINDI NON POSSO PARLARE DI LUNGHEZZE.

OSS $T_{(p,q)}(M\times N) = T_pM \times T_qN$ CON LA PRIMA DEF SI VEDE

PERCHÉ UNA CURVA NEL PRODOTTO È UNA COPPIA DI CURVE. UNA NEL PRIMO E UNA NEL SECONDO

ESERCIZIO $f: \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1 \to \mathbb{R}P^3$ embedding di Segre

$$([t_0,t_1], [u_0,u_1]) \to [t_0u_0, t_0u_1, t_1u_0, t_1u_1])$$

è BEN DEFINITA, MOSTRARE CHE df È INIETTIVO IN OGNI PUNTO

SVOLGIMENTO IN CARTA PRENDIAMO UNA CARTA $t_1 \neq 0$ e $u_1 \neq 0$

$\Rightarrow$ VANNO NELLA CARTA DOVE $[a, b, c, d]$ $d \neq 0$

IN QUESTE CARTE

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R} \xrightarrow{F} \mathbb{R}^3$$

$$(t_0, u_0) \longrightarrow (t_0 u_0, t_0, u_0)$$

$$dF : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$ BISOGNA FAR VEDERE CHE È DI RANGO 2 (OVVIO)

E NELLE ALTRE CARTE ANALOGO.

LEZIONE 03

Titolo nota 01/03/2019

OSS Se $f: M \to N$ è un diffeomorfismo $\Rightarrow df_p$ è invertibile $\forall p \in M$

DEF Due varietà sono diffeomorfe e si indica con $M \cong N$ se esiste un diffeomorfismo $f: M \to N$

COROLLARIO (dalla scorsa lezione) se $M \cong N \Rightarrow \dim M = \dim N$

DEF $f: M \to N$ liscia, è un diffeomorfismo locale in $p \in M$ se $\exists\, U(p)$ e $W(f(p))$ tali che

i) $f(U) = W$

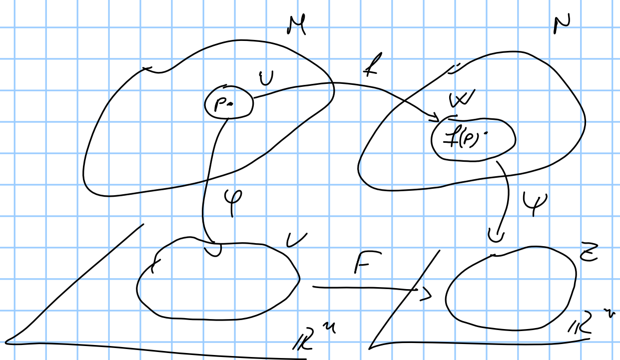
ii) $f|_U : U \to W$ è un diffeomorfismo

OSS Se f è un diffeo loc in $p \Rightarrow df_p$ è invertibile

(Non dovrei mostrare che la restrizione passa ai tangenti ?)

TEOREMA (invert. locale) Se df_p è invertibile $\Rightarrow f$ è un diffeo locale

DIM Si scarica in carte a $dF_{\varphi(p)}$ e basta usare il teo di invertibilità locale di Analisi 2 in $\mathbb{R}^m$



DA GEO 2 OMEO LOC $\Leftarrow$ RIVESTIMENTO

DEFINIZIONE ANALOGA Un rivestimento liscio $f: M \to N$ è un rivestimento topologico + diffeo loc

Ex Analogamente f è un rivestimento liscio se $\forall\, q \in N$ $\exists$ un intorno $U(q) \subseteq N$ e $\exists\, V_i \subseteq M$ aperti $i \in I$ (al più numerabile)

$f|_{V_i} : V_i \to U(q)$ è un diffeo

OSS Nelle definizioni di rivestimento M e N sono connesse

I RIVESTIMENTI SONO UN MODO PER COSTRUIRE NUOVE VARIETÀ.

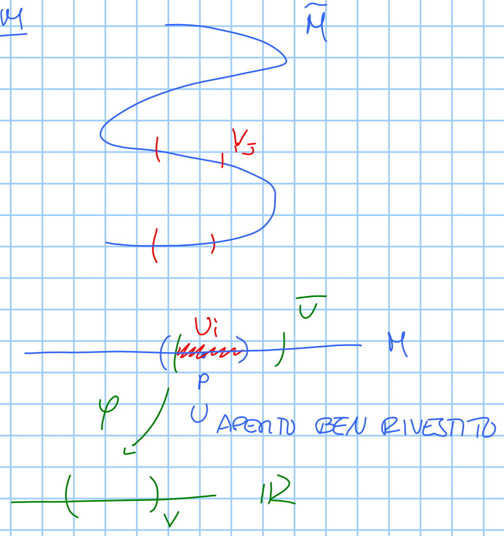
LEMMA SIA $\begin{matrix}\tilde M\\ \downarrow f\\ M\end{matrix}$ RIVESTIMENTO TRA VARIETÀ TOPOLOGICHE,

SE $(M, \mathcal{A})$ È UNA VARIETÀ LISCIA

ALLORA ESISTE (UNICA) ← NON CI SERVE E NON LO DIM. STRUTTURA LISCIA $(\tilde M, \tilde{\mathcal{A}})$

TALE CHE f SIA UN RIVESTIMENTO LISCIO

DIM



SIA U UN APERTO BEN RIVESTITO

$\bar U$ APERTO DI UNA CARTA

CONSIDERANDO $U \cap \bar U$ CHE RIOTTENGO

U APERTO BEN RIVESTITO CON CARTE.

QUINDI FISSATO

$\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \to W_i\}$ ATLANTE CON

CARTE SU INTORNI BEN RIVESTITI

ALLORA $\hat{\mathcal{A}} : \{\varphi_i \circ f : V_{ij} \to W_i\}$

È UN ATLANTE LISCIO PER $\tilde M$.

BASTA OSSERVARE CHE HO LE

STESSE FUNZIONI DI TRANSIZIONE

DEVO VEDERE CHE f È UN DIFFEO LOC.

$\forall\, p \in \tilde M$ VADO SU $f(p) \Rightarrow f(p)$ HA UN APERTO BEN RIVESTITO NELL'ATLANTE

$\mathcal{A} \Rightarrow$ PRENDO IL V_{ij} CHE CONTIENE p E f LETTA IN QUESTA

CARTA f È L'IDENTITÀ QUINDI È UN DIFFEO.

DEF SE X È UNO SPAZIO TOPOLOGICO E G È UN GRUPPO

UN'AZIONE (CONTINUA) DI G SU X È UN OMEO $G \longrightarrow Omeo(X) = \{$GRUPPO DEGLI OMEO DI $X\}$

DEF SE M È UNA VARIETÀ LISCIA E G È UN GRUPPO UN'AZIONE LISCIA

DI G SU M $G \longrightarrow Diffeo(M) = \{$IL GRUPPO DI DIFFEO DI $M\}$

NOTAZIONE $G \curvearrowright X$ G AGISCE SU X

DEFINIZIONI DI $G \curvearrowright$

1) G È LIBERA SE NON HA PUNTI FISSI $\forall x \in X \ \forall g \neq e \quad gx \neq x$

OSS $gx \in X$

2) G È PROPRIAMENTE DISCONTINUA

SE $\forall x \in X \ \exists U(x) \subseteq X$ TALE CHE $g(U(x)) \cap U(x) \neq \emptyset$ SOLO

PER UN NUMERO FINITO DI g

OSS $2) \not\Rightarrow 1)$

PROP [VEDI MANETTI] $G \curvearrowright X$, X DI HAUSDORFF $\wedge$ X CONNESSA ALLORA SONO EQUIVALENTI:

1) X/G è DI HAUSDORFF, e $p: X \longrightarrow X/G$ SIA UN RIVESTIMENTO

2) G AGISCE IN MODO LIBERO E PROPRIAMENTE DISCONTINUO

PROPOSIZIONE M UNA VARIETÀ LISCIA E G AGISCE IN MODO LISCIO

SE G AGISCE IN MODO LIBERO E PROPRIAMENTE DISCONTINUO

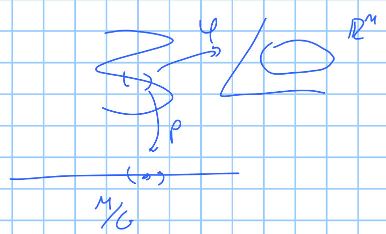
ALLORA M/G HA STRUTTURA LISCIA e $p: M \longrightarrow M/G$ è UN

RIVESTIMENTO LISCIO

DIM PER LA PROP SOPRA, M/G è DI HAUSDORFF E $p: M \to M/G$ è

UN RIVESTIMENTO TOPOLOGICO E MI FA PASSARE IL FATTO

CHE M/G è LOC OMEO A $\mathbb{R}^n$



$\forall p \in M/G$ PRENDO $U(p)$ APERTO BEN RIVESTITO, POSSO PRENDO UNO DEGLI APERTI (LO POSSO FARE PERCHÉ L'AZIONE DI g è LISCIA QUINDI QUEGLI APERTI HANNO TUTTI LA STESSA STRUTTURA C^∞) E ASSOCIO COME CARTA $\varphi \circ p^{-1}$

ESEMPIO $\mathbb{R}^n$ $G = \mathbb{Z}^n$ CHE AGISCE TRAMITE TRASLAZIONI

($G = \mathbb{R}^n$ SAREBBE LIBERA MA NON PROP. DISCONTINUA)

$M = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ è UNA VARIETÀ LISCIA.

Ex $M \cong S^1 \times \dots \times S^1$

DIM $\mathbb{R}^n \longrightarrow S_1 \times \dots \times S^1$

$(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow (e^{2\pi i x_1}, \dots, e^{2\pi i x_n})$

$\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\sim} S_1 \times \dots \times S_n$ è BIUNIVOCA è LISCIA E L'INVERSA è LISCIA

ESEMPIO $G < \text{Isometrie}(\mathbb{R}^2)$

$G = \langle f, g \rangle$ f è UNA TRASLAZIONE ORIZZONTALE $f(x,y) = (x+1, y)$

g è UNA GLISSOSIMMETRIA VERTICALE $f(x,y) = (-x, y+1)$

Ex $G = \langle f, g \rangle$ AGISCE IN MODO LIBERO E PROP. DISCONTINUO

ALLORA $\mathbb{R}^2 / G$ è UNA VARIETÀ LISCIA DI DIMENSIONE 2 (BOTTIGLIA DI KLEIN)

DEF: $G \curvearrowright M$ LISCIA (BASTA CONTINUA) IL DOMINIO FONDAMENTALE è UN $D \subseteq M$ CHIUSO TALE CHE:

1) $\bigcup_{g \in G} g(D) = M$ (EQUIVALE A DIRE $\forall x \in X \ \exists g \in G$ t.c. $x \in g(D)$)

2) $\forall x \in M$ è CONTENUTO IN AL PIÙ IN $g(\mathring{D})$ (LE PARTI INTERNE TRASLATE SONO DISGIUNTE)

ESEMPIO: $G = \mathbb{Z}^n$ $M = \mathbb{R}^n$

$D = [-1/2, 1/2]^n$

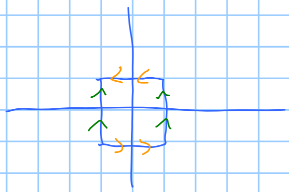
SOLO TOPOLOGICA E NON HO INFO SULLA STRUTTURA LISCIA

IDEA DELL'UTILIZZO DI D: $M/G = D/G$ PERCHE OGNI PUNTO $x \in M$ HA UN RAPPRESENTATE IN D, DEVO SOLO DIRE COME SI IDENTIFICA IL BORDO

TORNANDO ALLA DIMOSTRAZIONE DELL'ESERCIZIO

BASTA MOSTRARE CHE $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$ È UN DOMINIO FOND X ESERCIZIO)

E $D/_G$



OSS $\mathbb{R}^n$ È SEMP. CONNESSO $\Rightarrow$ È UN RIVESTIMENTO UNIVERSALE $\Rightarrow \pi_1\left(\mathbb{R}^n/_G\right) \simeq G$

DEF M UNA VARIETÀ LISCIA, $\mathcal{U}$ ATLANTE È ORIENTATO SE

$\det\left(d\varphi_{ij}\right)_{\varphi(p)} > 0 \quad \forall \varphi_{ij}$ FUNZIONE DI TRANSIZIONE $\forall p \in M$

DEF 1 UN'ORIENTAZIONE PER M È LA SCELTA DI UN ATLANTE ORIENTATO

A MENO DI COMPATIBILITÀ ORIENTATA

DEF $\mathcal{U}$ E $\mathcal{U}'$ ATLANTI ORIENTATI SONO COMPATIBILI RISPETTO ALL'ORIENTAZIONE

SE LA LORO UNIONE È UN ATLANTE ORIENTATO

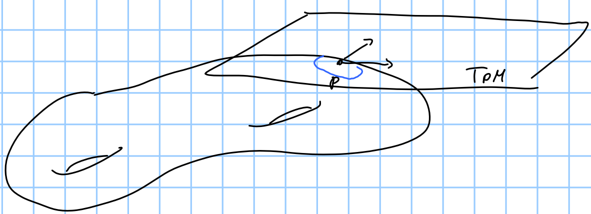
DEF 2 UN'ORIENTAZIONE PER M È UNA SCELTA LOCALMENTE COERENTE

PER TUTTI I T_pM $\forall p \in M$

DEF 2 BASI DI V $\mathcal{B}$ E $\mathcal{B}'$ SONO EQ SE $\det M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} > 0$

DEF V SPAZIO VETTORIALE DIM FINITA UN'ORIENTAZIONE È LA SCELTA

DELLA CLASSE DELLE BASI



COSA VUOL DIRE CHE LA SCELTA LOC. COERENTE ?

SE $\forall p \in M$ $\exists$ $\varphi: U(p) \to V$ CARTA. V $d\varphi_q$ TALE CHE $\forall q \in U(p)$ MANDA BASI POSITIVE DI T_qM

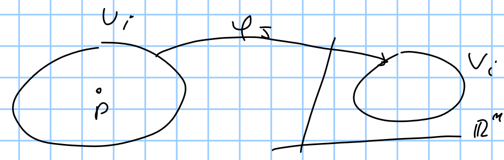
IN BASI POSITIVE DI $\mathbb{R}^m$

SKETCH CHE DEF 1 e DEF 2 SONO EQUIVALENTI

$\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \longrightarrow V_i\}$ $\forall p \in M$ UN'ORIENTAZIONE SUL TG

PRENDO UNA CARTA $\varphi_i \in \mathcal{A}$ e $U_i \ni p$

φ_{ij} ATLANTE ORIENTATA



UNA BASE $\mathcal{B}$ DEL T_pM E' POSITIVA

$\Leftrightarrow (d\varphi_i)_p(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{R}^n$

DEF 2 $\Rightarrow$ DEF 1

$\forall p \in M$ PER IPOTESI $\exists\ \varphi : U \longrightarrow V$ CHE COLLEGA TUTTI I TANGENTI

E TUTTE QUELLE φ FANNO DA ATLANTE.

LEZIONE 04

Titolo nota 05/03/2019

VARIETÀ ORIENTATE $(M, \mathcal{U})$ ORIENTATO T_pM ORIENTATI ($\forall x$ COERENTI)

PROP M VARIETÀ CONNESSA ⟹ HA 0 O 2 ORIENTAZIONI

DIM INIZIAMO MOSTRANDO CHE $(M, \mathcal{U})$ A ORIENTATO, POSSO COSTRUIRE $\mathcal{U}'$ ORIENTATO IN MODO OPPOSTO

$r: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ RIFLESSIONE RISPETTO A UN IPERPIANO È UN DIFFEO

CON $\det d r_p = -1 \quad \forall p \in \mathbb{R}^m$

ALLORA SE $\mathcal{U}\{\varphi_i : U_i \to V_i\}$ ALLORA $\mathcal{U}' = \{r \circ \varphi_i : U_i \to V_i\}$

$\mathcal{U}'$ è ORIENTATO IN MODO NON COMPATIBILE CON A

CON LA SECONDA DEF DI ORIENTAZIONE È PIÙ SEMPLICE PERCHÈ BASTA CAMBIARE ORIENTAZIONE IN TUTTI I TANGENTI.

TORNANDO ALLA DIM. SIA A ATLANTE ORIENTATO ⟹ ESISTE A' OPPOSTO

SUPPONIAMO ∃ A'' ALTRO ATLANTE.

SIA $S = \{p \in M :$ L'ORIENTAZIONE SU T_pM DI A'' è COME QUELLA DI A$\}$

$S' = \{p \in M :$ " " " " " " A'$\}$

$M = S \cup S'$ SE S È APERTO (ANCHE S') QUINDI PER CONNESSIONE UNO DEI DUE È VUOTO.

SE $A'' \equiv A$ IN p LO FA ANCHE IN UN INTORNO DI p. $U(p)$

PRENDO $\varphi_i : U(p) \to V_i$ CARTA ORIENTATA DI A

$\tilde{\varphi}_j : U(p) \to \tilde{V}_j$ " " DI A''

$U(p)$ è LO STESSO A MENO DI RESTRINGERE

EX SE DANNO LA STESSA ORIENTAZIONE IN P, ALLORA DANNO LA STESSA ORIENTAZIONE SULLA COMPONENTE CONNESSA DI $U(P)$ (IL DETERMINANTE È CONTINUO)

COROLLARIO M ORIENTABILE CON k COMPONENTI CONNESSE $\Rightarrow \exists\ 2^k$ ORIENTAZIONI POSSIBILI

DIM SU OGNI COMPONENTE HO 2 SCELTE.

DEF $f: M \to N$ ORIENTATE, e f DIFFEO LOC. DATO $P \in M$
DICO CHE f PRESERVA L'ORIENTAZIONE IN p SE df_p PRESERVA L'ORIENTAZIONE (CIOÈ MANDA BASI POSITIVE IN BASI POSITIVE).
INVERTE L'ORIENTAZIONE NEL CASO OPPOSTO

IN PARTICOLARE SE $f: M \to M$ CON LA STESSA ORIENTAZIONE, f DIFFEO
LA NOZIONE NON DIPENDE DALLA SCELTA DELL'ORIENTAZIONE

EX SE $f: M \to N$ CHE PRESERVA L'ORIENTAZIONE IN P, M CONNESSA
ALLORA VALE LA STESSA COSA $\forall q \in M$.

DEF $f: M \to N$ DIFFEO LOC PRESERVA L'ORIENTAZIONE SE LO FA $\forall$ PUNTO.

DEF QUINDI SE M ORIENTABILE, $\mathrm{Diff}(M) = \{ f: M \to M,\ f \text{ è un DIFFEO} \}$

$$\mathrm{Diff}^+ = \{ f \in \mathrm{Diff}(M) : f \text{ PRESERVA L'ORIENTAZIONE} \}$$

$\mathrm{Diff}^+ < \mathrm{Diff}(M)$ (SI POTREBBE MOSTRARE CHE Diff^+ $= \mathrm{Diff}(M)$ / SOTTOGRUPPO DI INDICE 2)

DEF M ORIENTABILE, M È SPECCHIABILE SE ESISTE UN DIFFEO CHE INVERTE L'ORIENTAZIONE

ESEMPI 1) $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, SIA H UN IPERPIANO VETTORIALE e r_H LA RIFLESSIONE
$r_H : S^n \to S^n$ È UN DIFFEO CHE INVERTE L'ORIENTAZIONE
(VEDI GTD)

2) $i: S^n \longrightarrow S^n$, $x \longmapsto -x$ MAPPA ANTIPODALE

SONO $n+1$ RIFLESSIONI

PRESERVA L'ORIENTAZIONE $\iff$ $n+1$ è PARI $\iff$ n è DISPARI

"MA MI SONO DIMENTICATO DI FAR VEDERE CHE LA SFERA È ORIENTABILE"

<u>PROP</u> LA SFERA È ORIENTABILE

<u>DIM</u> S^n HA UN ATLANTE CON SOLO 2 CARTE

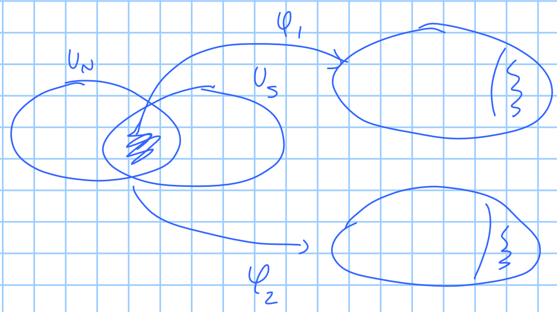
$$\varphi_N: U_N = S^n - \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\varphi_S: U_S = S^n - \{S\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$U_N \cap U_S$, U_N, U_S SONO CONNESSE

$\Downarrow$

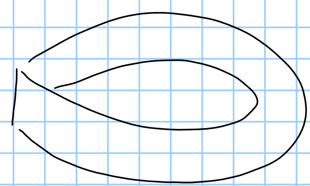
S^n è ORIENTABILE



SE φ_{12} VA BENE OK

ALTRIMENTI CAMBIO φ_2 CON UNA RIFLESSIONE

<u>ATTENZIONE</u> LA CONNESSIONE DI U_N e U_S SERVE, IL NASTRO DI MÖBIUS HA UN ATLANTE CON 2 CARTE MA CON INTERSEZIONE NON CONNESSA E NON È CONNESSO (VEDI DOPO).



<u>RICORDIAMO</u> CHE $G \curvearrowright M$ LISCIO LIBERO E PROP. DISCONTINUO $\Rightarrow$ M/G è VARIETÀ e $M \to M/G$ è UN RIVESTIMENTO LISCIO. e REGOLARE.

DA G2 SE $\pi_1(M)=\{e\}$ (M SEMP. CONNESSO) ALLORA $\pi_1(M/G) \cong G$

<u>ESEMPI</u> $M = S^n$ $\quad i: S^n \longrightarrow S^n$, $x \longmapsto -x$ antipodale

$$G = \langle i, id \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad G \text{ AGISCE SU } M.$$

<u>OSS</u> SE G è FINITO ALLORA AGISCE IN MODO PROP. DISCONTINUO

IN PARTICOLARE L'AZIONE DI G è LIBERA

QUINDI S^n/G è LISCIA. ED è OMEOMORFA A $\mathbb{RP}^n$, QUINDI $\pi_1(\mathbb{RP}^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $n \geq 2$

Ex PRESA LA MAPPA $S^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n$, $(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) \longrightarrow [x_1,\dots,x_{n+1}]$ PASSANDO A S^n/G È DIFFEO

ESEMPIO SPAZI LENTICOLARI

$$S^3 \subseteq \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2 = \{(z,w)\}$$

$p \geq 1$, $q \geq 1$ $(p,q)=1$ $p,q \in \mathbb{Z}$ AD ESEMPIO $(p,1)$ VA BENE.

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{p}} \qquad \omega^q = e^{\frac{2\pi q i}{p}}$$

$$\gamma : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2, \quad (z,w) \longrightarrow (\omega \cdot z, \omega^q \cdot w)$$

ROTAZIONI DI ω E ω^q SU 2 PIANI ORTOGONALI IN $\mathbb{R}^4$

$$G = \langle \gamma \rangle = \{id, \gamma, \dots, \gamma^{p-1}\}$$

OSS G FINITO $\Rightarrow$ PROPRIAMENTE DISCONTINUO. E $\gamma^i(x) \neq x$ $\forall i \neq 0$

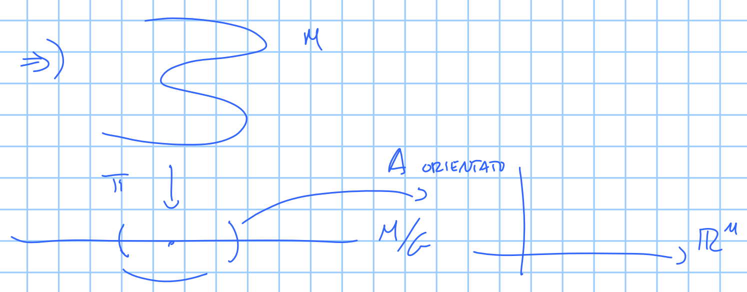
DEF $L(p,q) = S^3/G$ SPAZIO LENTICOLARE È UNA VARIETÀ LISCIA

E $\pi_1(L(p,q)) \cong G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

PROP (CHIAVE) $M \to M/G$ RIVESTIMENTO REGOLARE (AD ESEMPIO $G \curvearrowright M$ IN MODO LIBERO E PROP. LIBERO)

M/G È ORIENTABILE $\Leftrightarrow$ M È ORIENTABILE + G AGISCE PRESERVANDO L'ORIENTAZIONE

DIM $\Rightarrow$)



A MENO DI PRENDERE APERTI PIÙ PICCOLI LI PRENDO BEN RIVESTITI

E COSTRUISCO A' COMPONENDO π CON LE CARTE E L'ORIENTAZIONE SI PRESERVA PERCHÈ LE MAPPE φ_{ij} SONO LE STESSE.

CHE G AGISCE IN MODO POSITIVO SI VEDE OSSERVANDO CHE $\forall \gamma \in G$

$\pi = \pi \circ \gamma$ QUINDI POICHÉ $d\pi$ SONO POSITIVI PERCHÉ HO SCELTO L'ORIENTAZIONE USANDO π, ALLORA PER COMPOSIZIONE ANCHE $d\gamma$ DEVE ESSERE POSITIVE.

$\Leftarrow)$ TUTTI I PUNTI IN $\pi^{-1}(p)$ CON $p \in M/G$ HANNO LA STESSA ORIENTAZIONE PERCHÉ $\forall q_1, q_2 \in \pi^{-1}(p)$ $\exists \gamma \in G$ t.c. $q_1 = \gamma(q_2)$ e γ PRESERVA L'ORIENTAZIONE. QUINDI SU p BASTA METTERE QUELLA PORTATA DA π IN QUALSIASI $q_i \in \pi^{-1}(p)$

<u>COROLLARIO</u>: $T = S^1 \times \dots \times S^1$ è ORIENTABILE $T = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$

$K = \mathbb{R}^2 / \langle f, g \rangle$ $\quad f(x,y) = (x+1, y) \to$ PRESERVA

$g(x,y) = (-x, y+1) \to$ NON PRESERVA $\Rightarrow K$ <u>NON</u> è ORIENTABILE

$\mathbb{RP}^n$ è ORIENTABILE $\Leftrightarrow n$ è DISPARI

$\mathbb{RP}^n = S^n / G$ $\quad G = \{id, i\}$ e i PRESERVA L'ORIENTAZIONE $\Leftrightarrow n$ è DISPARI

Möbius $= \mathbb{R}^2 / \langle g \rangle$ $\quad g$ GLISSORIFLESSIONE e INVERTE L'ORIENTAZIONE.

UNA STRISCIA DI ALTEZZA 1 è UN DOMINIO FOND. (X ESERCIZIO)

CILINDRO $= S^1 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 / \langle g^2 \rangle$

NON ORIENTABILE

MÖBIUS $= \mathbb{R}^2 / \langle g \rangle \longrightarrow \mathbb{R}^2 / \langle f, g \rangle = K$

$\mathbb{R}^2 / \langle f, g^2 \rangle$ TORO ORIENTABILE

$\to$ GRADO 2

<u>PROP</u> M NON ORIENTABILE $\Rightarrow \exists \tilde{M} \to M$ RIVESTIMENTO DI GRADO 2 CANONICO CON $\tilde{M}$ ORIENTABILE

(NO DIM COMPLETA SOLO COSTRUZIONE $\tilde{M}$)

M NON è ORIENTABILE, $\forall p \in M$ T_pM ha 2 ORIENTAZIONI O e O'

$\tilde{M} = \{(p, O)$, $p \in M$ e O è UNA TRA O e O' IN $T_pM\}$

$\tilde{M} \longrightarrow M$ QUESTO È IL RIVESTIMENTO DI ORDINE 2

$(p,o) \longrightarrow p$

(SE VUOI LE VERIFICHE SONO TUTTE SUL LIBRO).

ESEMPI $\begin{array}{c} T \\ \downarrow \\ K \end{array}$ $\begin{array}{c} S^n \\ \downarrow \\ \mathbb{RP}^n \\ n \text{ PARI} \end{array}$ $\begin{array}{c} S^1 \times \mathbb{R} \\ \downarrow \\ \text{Möebius} \end{array}$

COROLLARIO SE $\pi_1(M)$ NON HA SOTTOGRUPPI DI INDICE 2 $\Rightarrow$ M È ORIENTABILE

DIM SE M NON È ORIENTABILE $\Rightarrow \exists$ RIVESTIMENTO DI ORDINE 2

MA GLI RIVESTIMENTI (ORDINI) SONO IN CORRISP. BIUNIVOCA CON GLI INDICI

DEI SOTTOGRUPPI DEL $\pi_1(M)$ QUINDI ASSURDO

COROLLARIO M SEMPLICEMENTE CONNESSA $\Rightarrow$ M È ORIENTABILE

ESEMPI $\mathbb{R}^n$, S^n, $\mathbb{CP}^n$ (COMPLESSO)

$\varphi_i : H_i \longrightarrow \mathbb{C}^n$ VISTE SONO CARTE REALI

$\{x_i \neq 0\}$

PIÙ IN GENERALE. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ OLOMORFA $\det d f_p = |f'|^2 > 0$ (REALE, COMPLESSA)

QUINDI PRESERVA L'ORIENTAZIONE

SOTTO VARIETÀ

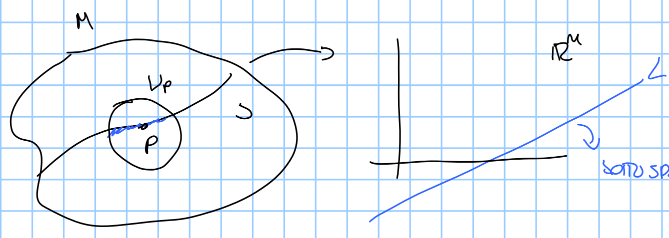
DEF SIA M UNA VARIETÀ LISCIA, $S \subseteq M$ SOTTOINSIEME DICO CHE S È

UNA SOTTOVARIETÀ LISCIA DI DIMENSIONE K $\forall p \in S$ $\exists$ $U(p) \subseteq M$ E UNA CARTA $\varphi : U_p \longrightarrow \mathbb{R}^n$

TALE CHE $\varphi(U \cap S) = L$

L SOTTOSPAZIO AFFINE DI $\mathbb{R}^n$

DI DIMENSIONE K.



OSS S HA UNA NATURALE STRUTTURA DI VARIETÀ LISCIA DI DIMENSIONE K.

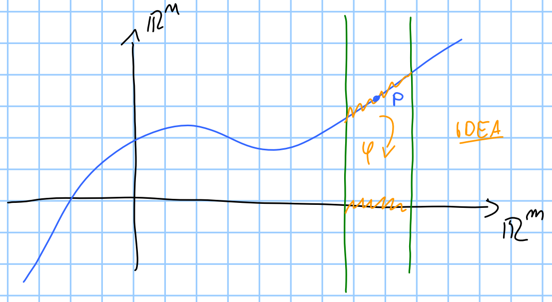
INFATTI $\forall p \in S$ $\exists \varphi_p$ COME SOPRA, $\varphi_p|_{U_p \cap S} \longrightarrow L \xrightarrow[\text{ISOMORFISMO AFFINE}]{\psi} \mathbb{R}^k$

QUESTA COMPOSIZIONE FA QUELLO CHE VOGLIO.

OSS Si può dimostrare che la struttura liscia di S dipende solo dalla struttura liscia di M (non so da fare).

ESEMPIO: Grafico di $f: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ liscia.

$$S = \{ (x, f(x)),\ x \in \mathrm{Dom}\, f \} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$



$\forall p$ prendo come intorno $(p, f(p))$ $U_p = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$

$$\varphi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$
$$(x, y) \longrightarrow (x, y - f(x)) \qquad L = \mathbb{R}^m \times \{0\}$$

ES $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ è localmente grafico di una funzione $\Rightarrow$ è sottovarietà di $\mathbb{R}^{n+1}$

Lezione 05

Titolo nota 07/03/2019

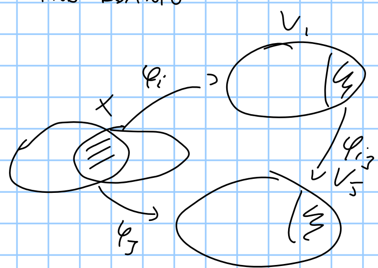
CORREZIONE DEFINIZIONE PROPRIAMENTE DISCONTINUA:

$G \curvearrowright X$ è propriamente discontinua $\forall x, y \in X$ $\exists$ $U(x)$ $U(y)$ tale che

$$\#\{g : g(U(x)) \cap U(y) \neq \emptyset\} < +\infty$$

(se x e y sono coincidenti ho la vecchia definizione)

TECNICA X insieme. Definisco un atlante liscio su X è un insieme di carte $\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \to V_i\}$ (bigezioni) tale che φ_{ij} hanno dominio e codominio aperti e sono diffeomorfismi



OSS X riceve una topologia e anche una struttura liscia $\Rightarrow$ X è una varietà liscia.

Devo dire che $A \subseteq X$ è aperto $\iff$ $\varphi_i(A \cap U_i) \subseteq V_i$ aperto $\forall i$

DEF EQUIVALENTE: è la topologia meno (o più boh) fine che rende X una varietà liscia.

ESEMPIO GRASSMANNIANA V spazio vettoriale reale di dimensione n

$$G_r(V,k) = \{k\text{-sottospazi di } V\} \quad \text{o} \quad G(n,k) \text{ se } V = \mathbb{R}^n$$

Costruisco struttura liscia su $G_r(V,k)$

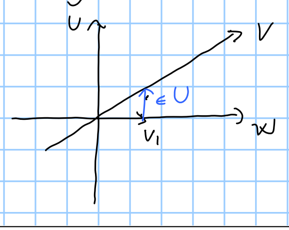
$\forall\, W^k \subseteq V^n$ sia $\mathcal{B} = \{\underbrace{v_1 \dots v_k}_{\text{base di } W}\ \underbrace{v_{k+1} \dots v_n}\}$ base di V

$U = \operatorname{span}(v_{k+1}, \dots, v_n)$

$\Rightarrow V = W \oplus U$

OSS la costruzione dipende da W e da $\mathcal{B}$.

Chiamo $U(W)^{\mathcal{B}} = \{Z^k \subseteq V^k \mid V = U \oplus Z\}$



$$\underbrace{U \times \dots \times U}_{k} \longrightarrow U(W)$$

È OVVIAMENTE UNA BIGEZIONE

$$(v_1, \dots, v_k) \longrightarrow \mathrm{Span}(v_1+u_1, v_2+u_2, \dots, v_k+u_k)$$

$U \cong \mathbb{R}^{n-k}$ QUINDI ABBIAMO LE PARAMETRIZZAZIONI $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^{n-k})^k \longrightarrow U(W)$

LE φ_{ij} SONO LISCE SU APERTI BASTA SCRIVERLO IN CARTA.

OSS 1) $\dim Gr(n,k) = k(n-k)$

2) $Gr(n,1) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ INFATTI $\dim \mathbb{P}(\mathbb{R}^n) = n-1$

3) $Gr(n, n-k) \underset{\text{DIFFEO}}{\cong} Gr(n,k)$

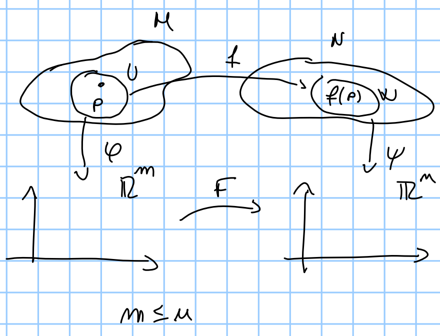
LA PRIMA GRASSMANNIANA NON BANALE È $G_r(4,2)$.

IMMERSIONI:

DEF UNA $f: M \longrightarrow N$ LISCIA, $p \in M$ f È UN'IMMERSIONE IN p SE $df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ È INIETTIVO

DEF È UN'IMMERSIONE SE LO È $\forall p \in M$

LEMMA: (FORMA NORMALE), SE f È UN'IMMERSIONE IN p ALLORA $\exists\, U(p) \subseteq M$ E $W(f(p)) \subseteq N$ E CARTE $\varphi: U \to \mathbb{R}^m$ E $\psi: W \to \mathbb{R}^n$ TALE CHE $F(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$



$F(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$

$m \leq n$

DIM VEDI GTD NO PER ORALE.

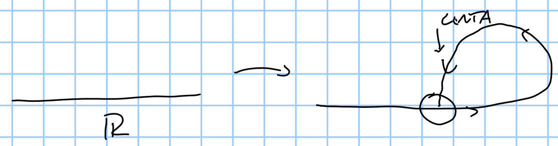
OSS LOCALMENTE L'IMMAGINE DI UNA VARIETÀ È UNA SOTTOVARIETÀ.

DEF UN **EMBEDDING** È UNA IMMERSIONE $f: M \to N$ CHE SIA UN OMEOMORFISMO SULL'IMMAGINE (CIOÈ $f: M \to f(M)$ È UN OMEOMORFISMO)

OSS SE f È UN EMBEDDING ALLORA $f(M)$ È UNA SOTTOVARIETÀ (NON SOLO LOCALE). DI N

DIM POSSO PRENDERE $U(P)$ IN MODO CHE $f(U(P))$ INTERSECA $f(M)$ SOLO IN $f(U(P))$ E QUINDI CI USO IL TEO DI RAPP.

ACHTUNG f IMMERSIONE + f INIETTIVA $\not\Rightarrow$ f NON È EMBEDDING



EX SE f È UN'IMMERSIONE INIETTIVA E PROPRIA $\Rightarrow$ f È UN EMBEDDING. (DI TOPOLOGIA)

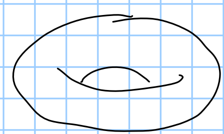
DEF **PROPRIA** SE LA CONTROIMMAGINE DI UN COMPATTO È UN COMPATTO

OSS SE M È COMPATTA $f: M \to N$ È SEMPRE PROPRIA.

DIM PREIMMAGINE DI UN COMPATTO È CHIUSO PERCHÉ f È CONTINUA, CHIUSO IN UN COMPATTO È COMPATTO $\Rightarrow$ f È CHIUSA.

ESERCIZIO $S \subseteq M$ SOTTOVARIETÀ $\Rightarrow$ $i: S \to M$ È UN EMBEDDING (CONSIGLIATO)

ESEMPIO: $S^1 \times S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ IN MODO CHE



"LA SUA IMMAGINE È QUESTA ROBA" CIT.

SE LA SCRIVO VIENE LISCIA, IMMERSIONE E $S^1 \times S^1$ È CPT QUINDI HO L'EMBEDDING.

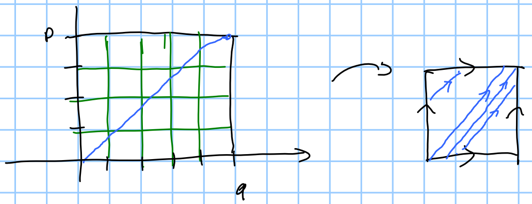
ESERCIZIO TROVARE $\underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{k} \hookrightarrow \mathbb{R}^{k+1}$

ESEMPIO $S^1 \hookrightarrow S^1 \times S^1$ $\qquad S^1 \subseteq \mathbb{C}$

PRESI $(p,q) = 1$ INTERI

$e^{i\pi t} \longrightarrow (e^{pi\pi t}, e^{qi\pi t})$ È UN EMBEDDING

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{R} \xrightarrow{F} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ t \longrightarrow (pt, qt) \end{array}\right\}$$ PASSANDO AI RIVESTIMENTI UNIVERSALI LA MAPPA SI LEGGE MEGLIO.



SENZA MAI INTERSECARSI MA PERCHÉ $(p,q)=1$

SE $(p,q)=(2,3)$ È IL NODO TRIFOGLIO.

CHE IL DIFFERENZIALE È INIETTIVO SI LEGGE IN CARTA F $\quad dF=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

EX

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & S^1\times S^1 \\ t & \longmapsto & (e^{i\pi t}, e^{\alpha i\pi t}) \quad \alpha\in\mathbb{R} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{R} & & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (t,\alpha t) \end{array}$$

$\longrightarrow$ PASSANDO AL RIVESTIMENTO UNIVERSALE

SE $\alpha\in\mathbb{Q}$ ALLORA $\alpha=\frac{p}{q}$ E SONO AL CASO DI PRIMA QUINDI NON È INIETTIVA

(STAVOLTA IL DOMINIO È $\mathbb{R}$ NON S^1)

MENTRE SE $\alpha\notin\mathbb{Q} \Rightarrow f$ È INIETTIVA E $f(\mathbb{R})$ È DENSO.

SOMMERSIONE:

DEF $\quad f: M\to N$ LISCIA, $p\in M$ $\quad f$ È UNA SOMMERSIONE IN p SE $df_p\, T_pM\to T_{f(p)}N$ È SURIETTIVO $\quad (m\geq n)$

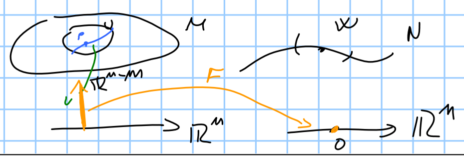
DEF $\quad$ SE f IN p È UNA SOMMERSIONE p È PUNTO REGOLARE, ALTRIMENTI p È SINGOLARE

LEMMA: (FORMA NORMALE)

SE f È UNA SOMMERSIONE IN p. ALLORA $\exists\, U(p),\ W(f(p))$ TALE E CARTE φ e ψ TALI CHE F LETTA IN CARTE

$$F(x_1\ldots x_n, x_{n+1}\ldots x_m) = (x_1\ldots x_n)$$

IDEA $\quad$ LOCALMENTE $S=f^{-1}(f(p))$ È UNA SOTTOVARIETÀ DI M.



(MA COME PRIMA NON BASTA)

DEF $f: M \to N$ LISCIA, $q \in N$ È UN VALORE REGOLARE SE $f^{-1}(q)$ È FATTO SOLO DI PUNTI REGOLARI.

PROP SE $q \in N$ È REGOLARE PER $f: M \to N$ ALLORA $S = f^{-1}(q)$ È UNA SOTTOVARIETÀ DI M DI CODIMENSIONE n $(\dim S = m - n)$

Inoltre $T_pS = \ker d_pf : T_pM \to T_qN$

OSS $S \subseteq M$ SOTTOVARIETÀ $\Rightarrow$ T_pS È UN SOTTOSPAZIO DI T_pM

DIM OSS CON LE CURVE $\forall \gamma \subseteq S \Rightarrow \gamma \subseteq M$

CON LE DERIVAZIONI LA DERIVAZIONE SU M LA RESTRINGO A S

OPPURE $i: S \to M$ EMBEDDING

$d_i S : T_pS \to T_pM$ IN MODO INIETTIVO

ESEMPIO $S \subseteq \mathbb{R}^n$ $p \in S \Rightarrow T_pS = T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$

ESEMPIO $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ È SOTTOVARIETÀ PERCHÉ $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$x \to \|x\|^2$ e 1 È VALORE REGOLARE

QUINDI S^{n-1} È UNA VARIETÀ $n-1$ DIM IN $\mathbb{R}$ E $T_pS^{n-1} = p^\perp$

ESEMPIO $M = M(m, n, \mathbb{R})$ = MATRICI REALI $m \times n$ $\cong \mathbb{R}^{mn}$

OSS V SPAZIO VETTORIALE REALE DI DIMENSIONE k È UNA VARIETÀ LISCIA.

PROP SIA $k \leq \min\{n, m\}$ $S = M_k(m, n, \mathbb{R}) \subseteq M$ MATRICI DI RANGO k

OSS M_k È SOLO UN SOTTOINSIEME, SE FOSSE UN SOTTOSPAZIO SAREBBE IN AUTOMATICO UNA VARIETÀ

M_k È UNA SOTTOVARIETÀ DI CODIMENSIONE $(m-k)(n-k)$

DIM $P_0 \in S$ (A MENO DI PERMUTARE LE COLONNE)

$$P_0 = \begin{array}{c} \\ k \\ m-k \end{array} \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{A_0}^{k} & \overbrace{B_0}^{n-k} \\ \hline C_0 & D_0 \end{array}\right) \quad \text{con } \det A_0 \neq 0$$

SIA $U = \left\{ P = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) : A \ k \times k \text{ e } \det A \neq 0 \right\}$

SIA $Q = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B \\ 0 & I_{m-k} \end{pmatrix}$ INVERTIBILE.

$$P \cdot Q = \begin{pmatrix} I_{k\times k} & 0 \\ CA^{-1} & \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{-CA^{-1}B + D} \end{pmatrix}$$

$P \cdot Q$ HA RANGO k

$r(P \cdot Q) = rk(P) = k$

$\Updownarrow$

$D = CA^{-1}B$

$U \subseteq S$ È UN APERTO È L'IMMAGINE DI UNA MAPPA

$$GL(m, \mathbb{R}) \times M(k, m-k) \times M(m-k, k) \longrightarrow U$$

$$(A \quad B \quad C) \longrightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

CHE È UN'IMMERSIONE INIETTIVA. (ANZI È UN EMBEDDING)

S È QUINDI IL GRAFICO DI QUESTA FUNZIONE

DOVE $M(m,m) = \underset{A}{M(k,k)} \times \underset{B}{M(m-k,k)} \times \underset{C}{M(k,m-k)} \times \underset{D}{M(m-k,m-k)}$

E S È IL GRAFICO DELLA FUNZIONE $D = CA^{-1}B$ LOCALMENTE

EX (TOPOLOGICO) $f: M \to N$ IMMERSIONE IN p, LOCALMENTE È UN EMBEDDING

CIOÈ $\exists\, U(p)$ T.C $f|_{U_p} : U(p) \to N$ È UN EMBEDDING.

GRUPPI DI LIE

DEF G GRUPPO DI LIE SE È UNA VARIETÀ LISCIA CHE È UN GRUPPO

TALE CHE
$$\left.\begin{array}{l} m: G \times G \longrightarrow G \\ \quad (g,h) \longrightarrow g \cdot h \\ i: G \longrightarrow G \\ \quad g \longrightarrow g^{-1} \end{array}\right\} \text{SIANO LISCE.}$$

ESEMPI: i) SPAZI VETTORIALI DI DIMENSIONE K. } NON INTERESSANTI
ii) $M(m,n,\mathbb{R})$
iii) $GL(n,\mathbb{R})$ APERTO IN $M(n,\mathbb{R})$

iv) $SL(n,\mathbb{R}) = \{A : \det A = 1\} \subseteq GL(n,\mathbb{R})$ } PIÙ INTERESSANTI
v) $O(n,\mathbb{R}) = \{A : A^t \cdot A = Id\} \subseteq GL(n,\mathbb{R})$

DEVO SOLO FAR VEDERE CHE SONO SOTTO VARIETÀ.

iv) $\det : M(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$SL(n,\mathbb{R}) = \det^{-1}(1)$ e 1 è VALORE REGOLARE

E QUINDI È UNA SOTTO VARIETÀ

e $T_{Id} SL(n,\mathbb{R}) = \{A : tr A = 0\}$ SOTTOSPAZIO

$$\det(I + tB) = 1 + t\,\overbrace{trB}^{d\det} + o(t)$$

$$Ker\, d\det_I = Ker(trB) \Rightarrow trB = 0$$

v) ANALOGAMENTE $f : M(n) \longrightarrow S(n)$

$A \longrightarrow A^t A$ E MOSTRO CHE I È REGOLARE

$O(n) = f^{-1}(I)$

è UNA SOTTOVARIETÀ

$T_I O(n) = \{A : A + A^t = 0\}$ MATRICI ANTISIMMETRICHE

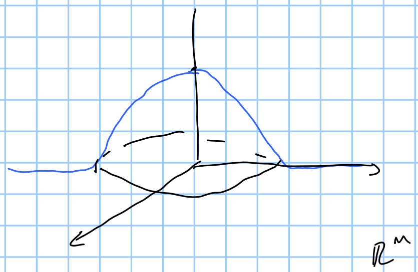
LEZIONE 06

Titolo nota 08/03/2019

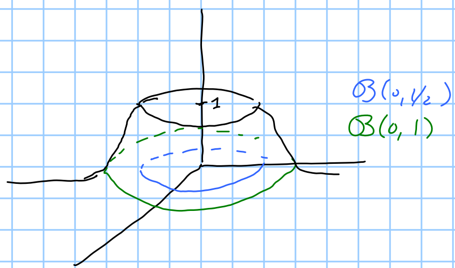
PARLEREMO DI PARTIZIONI DELL'UNITÀ

$$h(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & t \geq 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

$f(x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = h(1 - \|x\|^2)$



$$\eta(x) = \frac{h(1-\|x\|^2)}{h(1-\|x\|^2) + h\left(\|x\|^2 - \frac{1}{4}\right)}$$



$\eta(x) = 1 \qquad \|x\| \leq 1/2$

$\eta(x) = 0 \qquad \|x\| \geq 1$

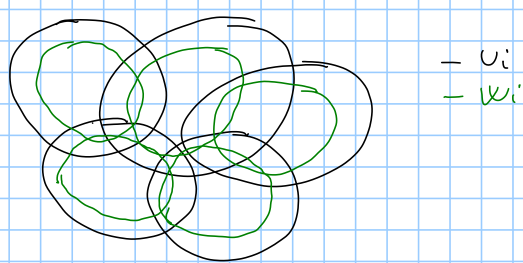
$\eta(x) \in (0, 1/2) \qquad \frac{1}{2} < \|x\| < 1$

$\boxed{\text{PARTIZIONE LISCIA}}$

DEF M LISCIA, UN ATLANTE $\mathcal{A}$ PER M È <u>ADEGUATO</u> SE $\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n\}$ (LE $\mathcal{B}$ SONO DIFFEO A TUTTO $\mathbb{R}^n$)

TALE CHE 1) $\{U_i\}$ È LOC FINITO (COME RICOPRIMENTO) (DICE SONO POCHE)

2) $W_i = \varphi_i^{-1}(\mathcal{B}^n) \subseteq U_i$, W_i RICOPRONO M.



OSS LA $\mu(x)$ A MENO DI RISCALARE PUÒ FARE 1 SU $B(0,1)$ E 0 FUORI DA $B(0,2)$

PROP M VARIETÀ, $\{U_i\}$ UN RICOPRIMENTO, ESISTE UN ATLANTE ADEGUATO $A = \{\varphi_i : V_i \to \mathbb{R}^n\}$ CHE RAFFINA IL RICOPRIMENTO. (CIOÈ I $\{V_i\}$ RAFFINANO GLI $\{U_i\}$)

RICORDA ESSERE UN RAFFINAMENTO SE $\forall i \;\; \exists j$ t.c. $V_i \subset U_j$

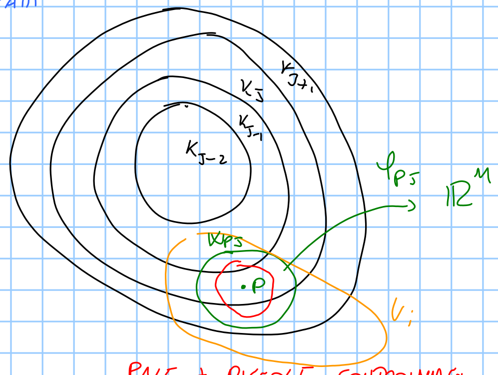
(RICORDA LA DIM M PARACOMPATTA)

DIM PRENDO $K_1 \subset K_2 \dots$ ESAUSTIONE DI COMPATTI

$\forall p \in K_j \setminus \mathring{K}_{j-1}$ INDUTTIVAMENTE SU J

DEFINISCO W_{p_j} COME IN FIGURA.

QUELLO CHE FUNZIONA È CHE I W_{p_j} SONO QUELLO CHE VOGLIO E $\forall p_j$ W_{p_j} È CONTENUTO IN UN CERTO U_i



PALLE + PICCOLE CONTROIMMAGINI DI PALLE IN $\mathbb{R}^n$ MA RICOPRONO LA CORONA $K_j \setminus \mathring{K}_{j-1}$ E QUINDI BASTANO UN NUMERO FINITO DI PUNTI p E W_{p_j}

DEF M VARIETÀ LISCIA, $\{U_i\}$ RICOPRIMENTO APERTO, UNA PARTIZIONE DELL'UNITÀ (SUBORDINATA AL RICOPRIMENTO) È UNA FAMIGLIA DI FUNZIONI $f_i : M \to \mathbb{R}^+$ E supporto $f_i \subseteq U_i$

$\forall x \in M \;\; \exists V(x)$ TALE CHE SOLO UN NUMERO FINITO DI $f_i(x)$ È NON NULLA

E INOLTRE $\sum_i f_i(x) = 1$ (SOMMA FINITA)

RICORDA: SUPPORTO = CHIUSURA DEI PUNTI IN CUI LA FUNZIONE NON È NULLA

ESEMPIO (CAPIRE QUANTO POSSA ESSERE COMPLICATO)

$\mathbb{R}^2 = U \cup V$ U E V APERTI QUALUNQUE (SCONNESSI...)

$\Rightarrow \exists$ $f_U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ supp $f_U \subseteq U$
$f_V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ supp $f_V \subseteq V$

$\forall x \in \mathbb{R}^2$ $f_U(x) + f_V(x) = 1$ NON BANALE!!

TEO M VARIETÀ LISCIA, $\{U_i\}$ RICOPRIMENTO APERTO. $\exists$ SEMPRE PARTIZIONE DELL'UNITÀ SUBORDINATE A $\{U_i\}$

DIM $\mathcal{U}:\{\varphi_J : W_J \to \mathbb{R}^m\}$ UN ATLANTE ADEGUATO CHE RAFFINA $\{U_i\}$

i) $\{W_J\}$ LOC FINITO

ii) $\varphi_J^{-1}(B^m)$ COPRONO M

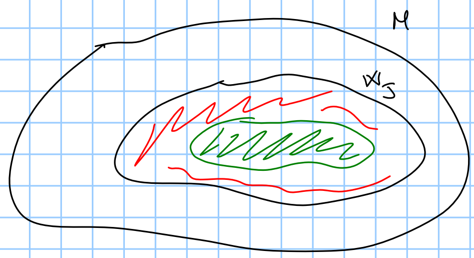
IDEA COMPORRE φ_J CON $\eta(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$\eta(x) = 0 \quad \|x\| \geq 2$

$\eta(x) = 1 \quad \|x\| \leq 1$

$\eta(x) \subset (0,1) \quad 1 < \|x\| < 2$

$\overline{f_J} = \mu \circ \varphi_J : W_J \to \mathbb{R} \qquad \text{supp } \overline{f_J} \subseteq \varphi_J^{-1}(\overline{B(0,2)})$



MA LA $\overline{f_J}$ È OK

SE ESTENDO $\overline{f_J}$ A $f_J : M \to \mathbb{R}$

METTENDOLA A 0 SU TUTTO M.

$\{f_J : M \to \mathbb{R}\}$ SONO LOCALMENTE FINITE SI PERCHÈ LO È $\{W_J\}$

$\forall x \in M \qquad f_J(x) \geq 1$ PERCHÈ $x \in$ SEMPRE VA LA PREIMMAGINE DI UNA DELLE PALLETTE DI RAGGIO 1 PERCHÈ RICOPRONO TUTTA M.

ALLORA $\qquad \widetilde{f_J}(x) = \dfrac{f_J(x)}{\sum_J f_J(x)} = 1 \quad \forall x \in M$

MA QUESTA FUNZIONA PER I $\{W_J\}$ MA IO LA VOLEVO PER $\{U_i\}$

MA $\forall\ W_J \subseteq U_{i(J)} \implies f_i'(x) = \sum_{\substack{J \in \mathcal{J} \\ i(J) = i}} \widetilde{f_J}(x)$

PROP M VARIETÀ $S \subseteq M$ CHIUSO, $f: S \to \mathbb{R}^m$ LISCIA

ALLORA ESISTE UN'ESTENSIONE LISCIA SU TUTTA M. $F: M \to \mathbb{R}^m$

DEF M VARIETÀ, $S \subset M$ SOTTOINSIEME $f: S \to N$ VARIETÀ

f è LISCIA SE $\forall p \in S$ $\exists\, U(p) \subseteq M$ $\exists\, F: U(p) \to N$ LISCIA T.C.

$F(x) = f(x)$ $\forall x \in U(p) \cap S$

OSS NELLA PROPOSIZIONE LA N È $\underline{\underline{\mathbb{R}^M}}$

DIM PROP $\forall p \in S$ $\exists\, U(p)$ e UNA $g_p: U(p) \to \mathbb{R}^m$ CHE ESTENDE f

$g_p(x) = f(x)$ $\forall x \in S \cap U(p)$

PRENDO $\{U_p\}_{p \in S} \cup \underbrace{(M \setminus S)}_{U}$ QUESTO È UN RICOPRIMENTO APERTO DI M

$U \to$ (S CHIUSO $\Rightarrow$ U è APERTO).

ALLORA SIA $\{f_p : M \to \mathbb{R}\}$ $\{f_U : M \to \mathbb{R}\}$ PARTIZIONE DELL'UNITÀ

E RICORDIAMO $\mathrm{supp}(f_p) \subseteq U(p)$ e $\mathrm{supp}(f_U) \subseteq U$

$$F(x) = \sum_{p \in S} f_p(x) \cdot g_p(x)$$

LA LOCALE FINITEZZA DELLA PARTIZIONE MI DICE CHE $\forall p$ LA SOMMA è FINITA E L'IPOTESI $\mathbb{R}^m$ IN ARRIVO MI SERVE PER FARE LA SOMMA.

QUINDI F è LISCIA

$x \in S$ $\quad F(x) = \sum_{p \in S} f_p(x) \cdot f(x) = f(x) \cdot \sum_{p \in S} f_p(s) = f(x).$

OSS S NON CHIUSO $\quad M = \mathbb{R}$ $\quad S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad f: \begin{cases} 1 & x < 0 \\ -1 & x > 0 \end{cases}$

OSS $\underline{N = \mathbb{R}^n}$ $\quad$ SE $M = \mathbb{R}^2$ $\quad N = S^1$

$S = S^1$

$i: S^1 \to S^1$ NON SI ESTENDE PERCHÈ S^1 NON È CONTRATTILE.

TEO M VARIETÀ LISCIA $f: M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è CONTINUA. $S \subseteq M$ CHIUSO TALE CHE $f|_S$ è LISCIA

(S PUÒ ESSERE VUOTO) SIA $\varepsilon: M \longrightarrow \mathbb{R}^+$ CONTINUA. ALLORA $\exists$ $F: M \longrightarrow \mathbb{R}^n$

TALE CHE

1) $F|_S = f|_S$

2) $\| F(x) - f(x) \| < \varepsilon(x)$

DIM DICO CHE $\forall$ DATO $p \in M$ $\exists$ $g_p : U(p) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ T.C. 1) $g_p(x) = f(x)$ $\forall x \in U(p) \cap S$

2) $\| g_p(x) - f(x) \| < \varepsilon(x)$ $\forall x\, U(p)$

CIOÈ LOCALMENTE IL TEOREMA è VERO LOCALMENTE

CASO 1 SE $p \notin S$ $g_p(x) = f(p)$ QUINDI È LISCIA $U(p)$ è TALMENTE PICCOLO TALE CHE

$U(p) \cap S \neq \emptyset$ (S è CHIUSO)

e 2) è VALIDO PER CONTINUITÀ DI f.

CASO 2 SE $p \in S$ PRENDO $g_p(x)$ FUNZIONE CHE ESTENDE f PER LISCEZZA IN S.

PRENDO $\{U(p)\}_{p \in M}$ FATTI SOPRA. $f_p : M \longrightarrow \mathbb{R}$ PARTIZIONE DELL'UNITÀ.

$$F(x) = \sum_{p \in M} f_p(x) \cdot g_p(x)$$

LA BUONA DEFINIZIONE ME LA DA IL FATTO CHE f_p è UNA PARTIZIONE DELL'UNITÀ

VERIFICHIAMO 1 e 2 PER F

1) $x \in S$ $F(x) = \sum_{p \in M} f_p(x)\, g_p(x) = \sum_{p \in M} f_p(x) \quad f(x) = f(x)$

POTREI DIRE SOLO STA IN S

2) SE $x \in S$

$$|F(x) - f(x)| = \left| \sum_{p \in M} f_p(x)\, g_p(x) - f(x)\, 1 \right| =$$

$$= \left| \sum_{p \in M} f_p(x)\, g_p(x) - \sum_{p \in M} f(x)\, f_p(x) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{p \in M} f_p(x)\, |g_p(x) - f(x)| < \varepsilon(x) \cdot \sum_{p \in M} f_p(x) = \varepsilon(x)$$

TEOREMA M compatta allora $\exists\ N \in \mathbb{N}$ e un embedding $f : M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$

DIM $\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^m\}$ un atlante adeguato per M

cioè 1) loc finito $\Rightarrow$ finito (M è compatto)

2) $\{\varphi_i^{-1}(B^m)\}$ coprono

Quindi le carte sono finite $\varphi_1 \dots \varphi_k$

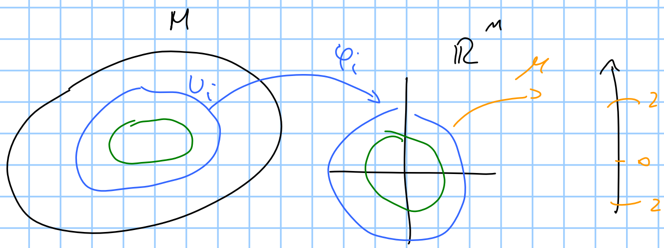
$\mu : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \mu(x) = 1 \quad \|x\| \leq 1 \qquad \mu(x) \in (0,1)$ altrimenti.

$\mu(x) = 0 \quad \|x\| \geq 2$

$\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^m$ vorrei estenderla su tutto M

$\mu_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$x \longrightarrow \mu \circ \varphi_i(x)$



μ_i è zero fuori dalla preimmagine della palla quindi può essere estesa a 0 in tutta M

$\psi_i : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$x \longrightarrow \mu_i(x)\, \varphi_i(x)$ (anche questa a priori era definita su U_i ma è a supp. compatto su U_i quindi la estendo a 0 su tutto M)

La fortuna è che sulle palle ◯ le ψ_i valgono come le φ_i

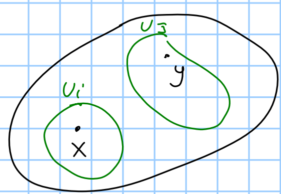
$F : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$

$x \longrightarrow (\underbrace{\psi_1(x)}_{\in \mathbb{R}^m}, \dots, \underbrace{\psi_k(x)}_{\in \mathbb{R}^m}, \underbrace{\lambda_1(x)}_{\in \mathbb{R}}, \dots, \underbrace{\lambda_k(x)}_{\in \mathbb{R}}) \qquad N = k \cdot (m+1)$

Dico che F è un embedding

INIETTIVA Siano $x \neq y \in M$

Se $i = j$ $\quad \lambda_i = \lambda_j$



Ma $\psi_i(x) \neq \psi_j(y)$ perché

ψ_i è la carta $\quad \psi_i = \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\lambda_i} \cdot \varphi_i \Rightarrow \psi_i = \varphi_i$

Quindi $\psi_i(x) = \varphi_i(x) \neq \varphi_i(y) = \psi_i(y) \quad \Rightarrow F(x) \neq F(y)$

SE $i \neq j$ $\quad \exists\ \lambda_i(x) = 1 \quad \lambda_j(x) = 0$ $\quad \Rightarrow F(x) \neq F(y)$

$\lambda_j(y) = 0 \quad \lambda_j(y) = 1$

F è LISCIA (OVVIO)

dF_x è INIETTIVO INFATTI $\forall x \Rightarrow x \in U_i$ ALCUNO UNO DEI $\lambda_i(x) = 1$

$\Rightarrow \psi_i'(x) = \lambda_i(x)\varphi_i(x) = \varphi_i(x)$ e QUINDI

C'È IL BLOCCO $n \times n$ DATA DALLA φ_i

CHE DÀ $rg \geq n$ E QUINDI L'INIETTIVITÀ.

LEZIONE 07

Titolo nota 06/04/2019

DEF UN' OMOTOPIA LISCIA TRA MAPPE $f, g: M \longrightarrow N$ LISCE È UNA

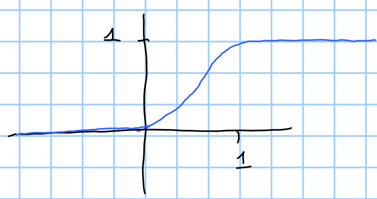
$F: M \times \mathbb{R} \longrightarrow N$ LISCIA TALE CHE

$F_t = F(\cdot, t): M \longrightarrow N$ SIA CONTINUA e $F_0 = f$ e $F_1 = g$

$x \longrightarrow F(x, t)$

OSSERVAZIONE A ME INTERESSA SOLO COSA SUCCEDE PER $0 \le t \le 1$ INFATTI POSSO SEMPRE CAMBIARE F CON F' DOVE $F'_t = f(x)$ $t \le 0$ e $F'_t = g(x)$ $t \ge 1$

IN MODO ESPLICITO PRENDO $\psi(t)$



$\psi(t) \in C^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$

ALLORA $F'(x, t) = F(x, \psi(t))$

DEF f, g LISCE, SONO LISCIAMENTE OMOTOPE SE ESISTE F OMOTOPIA LISCIA TALE CHE $F_0 = f$ e $F_1 = g$ (CHE LE COLLEGA).

PROP L'ESSERE LISCIAMENTE OMOTOPE È UNA RELAZIONE DI EQUIVALENZA.

DIM (COME A GTD) LA TRANSITIVITÀ NON È SCONTATA, ATTACCARE COSE LISCE NON È SEMPLICE.

SIANO $\underbrace{f \underset{F}{\sim} g \quad g \underset{G}{\sim} h}_{\text{OMOTOPIE LISCE}}$ PRESA ψ :

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & t \le 1/3 \\ \text{CRESCENTE} & \frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{3} \\ 1 & t \ge 2/3 \end{cases}$$

$\psi \in C^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$

A PATTO DI COMPORRE F e G COME SOPRA CON $\psi(t)$ SI HA

$$F_t(x) = \begin{cases} f(x) & t \le 1/3 \\ g(x) & t \ge 2/3 \end{cases} \quad e \quad G_t(x) = \begin{cases} g(x) & t \le 1/3 \\ h(x) & t \ge 2/3 \end{cases}$$

ALLORA $H_t(x) = \begin{cases} F(x, 2t) & t \le 1/2 \\ G(x, 2t-1) & t \ge 1/2 \end{cases}$ SI ATTACCA BENE IN $t = \frac{1}{2}$

RICORDA PER ATTACCARE COSE LISCE È MEGLIO FARLE COINCIDERE SU UN INTORNO DEL PUNTO DI ATTACCATURA (IL SOLO PUNTO NON BASTA).

DEF f, g DUE EMBEDDING (o DIFFEO), UN' ISOTOPIA (LISCIA) È UN'OMOTOPIA LISCIA F TRA f e g E $\forall t \in [0,1]$ $F_t(x)$ È UN EMBEDDING (o DIFFEO)

DEF DUE EMBEDDING f, g SONO ISOTOPI SE ESISTE UN'ISOTOPIA CHE LI COLLEGA.

PROP TUTTE LE MAPPE $f: M \to \mathbb{R}^M$ SONO LISCIAMENTE ISOTOPE

DIM $F(x,t) = t \cdot f(x)$ SONO TUTTE $\sim$ ALLA MAPPA CHE MANDA TUTTO IN 0.

PROP OGNI DIFFEOMORFISMO $f: S^1 \to S^1$ È ISOTOPO ALL'IDENTITÀ SE PRESERVA L'ORIENTAZIONE, OPPURE AD UNA RIFLESSIONE DEL TIPO $g(z) = \bar{z}$ SE LA INVERTE.

DIM

LEZIONE 08

Titolo nota 14/03/2019

ALGEBRA MULTILINEARE

IPOTESI DI LAVORO: V SPAZIO VETTORIALE REALE FINITO DIMENSIONALE

$V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$ $\quad \mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\}$ BASE DI V

$\rightsquigarrow v^1 \dots v^n$ BASE DUALE DI V^*

$V \longrightarrow V^{**}$

$v \longrightarrow w(v)$, $w \in V^*$ ISOMORFISMO CANONICO QUINDI SCRIVIAMO $V = V^{**}$

DEF $V_1, \dots, V_k, W$ $\quad \mathrm{Mult}(V_1, \dots, V_k; W) = \{ f : V_1 \times \dots \times V_k \to W \mid \text{multilineare} \}$

SIA $\mathcal{B}_i = \{ v_{i,1}, \dots, v_{i,d_i} \}$ BASE DI V_i

$\mathcal{C} = \{ w_1 \dots w_c \}$ BASE DI W

$F : V_1 \times \dots \times V_k \longrightarrow W$

DEF $F^J_{i_1, \dots, i_k}$ SONO LE COORD. DI F RISPETTO ALLE 2 BASI

$$F(v_{1,i_1}, \dots, v_{k,i_k}) = \sum_{J=1}^{c} F^J_{i_1 \dots i_k} w_J$$

$1 \le i_h \le d_h$

ESERCIZIO GLI $F^J_{i_1 \dots i_k}$ DETERMINA F NEL SENSO FORTE

COROLLARIO $\mathrm{MULT}(V_1 \dots V_k, W)$ è UNO SPAZIO VETTORIALE DI DIMENSIONE $\dim V_1 \cdot \dots \cdot \dim V_k \cdot \dim W$

NOTAZIONE SE $W = \mathbb{R}$ $\quad \mathrm{Mult}(V_1 \dots V_k; \mathbb{R}) = \mathrm{MULT}(V_1 \dots V_k)$

EX ESISTE UN ISOMORFISMO CANONICO DA $\mathrm{Mult}(V_1, \dots, V_k; W) \to \mathrm{Mult}(V_1, \dots, V_k, W^*)$

$F \longrightarrow F'$

$$F'(v_1, \dots, v_k, w^*) = w^*(F(v_1 \dots v_k))$$

$\oplus$ e $\otimes$ TENSORIALI

$V_1 \ldots V_K$ $\quad V_1 \oplus \ldots \oplus V_K$ È IL PRODOTTO CARTESIANO

$V_1 \ldots V_K$ $\quad V_1 \otimes \ldots \otimes V_K := Mult(V_1^*, \ldots, V_K^*)$ (DEFINIZIONE CHE FUNZIONA SOLO SE LA DIM. È FINITA)

OSS $k=1$ $\quad V_1 = Mult(V_1^*; \mathbb{R}) = V_1^{**}$

OSS $\dim(V_1 \oplus \ldots \oplus V_K) = \dim V_1 + \ldots + \dim V_K$

$\dim(V_1 \otimes \ldots \otimes V_K) = \dim V_1 \cdot \ldots \cdot \dim V_K$

SIA $v_j \in V_j$ $\quad j = 1, \ldots, k$

DEF $v_1 \otimes \ldots \otimes v_K \in V_1 \otimes \ldots \otimes V_K$ <u>VETTORI PURI O SEMPLICI</u>

$$v_1 \otimes \ldots \otimes v_k (\underset{V_1^*}{w^1}, \ldots, \underset{V_k^*}{w^k}) = w^1(v_1) \cdot \ldots \cdot w^k(v_k) \in \mathbb{R}$$

OSS NON SONO TUTTE LE $Mult(V_1^* \ldots V_K^*)$ POSSIBILI

PROP MA SE FISSO $\mathcal{B}_i = \{v_{1,i}, \ldots, v_{i,d_i}\}$ BASE DI V_i $\forall i$.

I VETTORI $\{ v_{1,i_1} \otimes \ldots \otimes v_{k,i_k} : 1 \le i_j \le d_j \}$ SONO UNA BASE.

DIM SONO DEL NUMERO GIUSTO QUINDI SE MOSTRO CHE SONO INDIPENDENTI

PRENDIAMO UNA COMB. LINEARE

$$\sum \lambda^{i_1 \ldots i_k} \, v_{1,i_1} \otimes \ldots \otimes v_{k,i_k} = 0$$

USO LA SEGUENTE PROP. $v_{1,i_1} \otimes \ldots \otimes v_{k,i_k} (v^{1,j_1}, \ldots, v^{k,j_k}) =$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } i_h = j_h \ \forall h \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

SE I VETTORI v^{1,j_1} ETC SONO I VETTORI DELLE BASI DUALI INDOTTE DALLE BASI $\mathcal{B}_i$.

VALUTANDO QUINDI LA COMBINAZIONE LINEARE IN UNO DEI $v^{1,i_1} \dots v^{k,i_k}$ ALLORA NELLA SOMMA SI ANNULLANO TUTTI I MEMBRI E SOPRAVVIVE SOLO $\lambda^{1,i_1 \dots k,i_k} = 0$ E COSÌ PER TUTTI I COEFFICIENTI, QUINDI SONO INDIPENDENTI

<u>Ex</u> $V \otimes W$, $v, v' \in V$, $w \in W$

$v \otimes w + v' \otimes w = (v+v') \otimes w$

$(\lambda v) \otimes w = \lambda (v \otimes w)$

$v \otimes w = 0 \iff v = 0$ o $w = 0$

v, v' IND. in V e w, w' IND in W

$v \otimes w$ e $v' \otimes w'$ SONO IND. IN $V \otimes W$

(MA ANCHE $v \otimes w'$, $v \otimes w'$)

<u>EX</u> $V \otimes \mathbb{R} = V$ CANONICAMENTE.

<u>PROP</u> (PROPRIETÀ UNIVERSALE)

$V_1, \dots, V_k$ W SPAZI VETTORIALI e

$$\mathrm{Hom}(V_1 \otimes \dots \otimes V_k, W) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Mult}(V_1, \dots, V_k, W)$$

$$F \longmapsto F'(v_1, \dots, v_k) = F(v_1 \otimes \dots \otimes v_k)$$

QUESTO È UN ISOMORFISMO

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times \dots \times V_k \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "F' = \psi(F)"'] & V_1 \otimes \dots \otimes V_k \arrow[d, "F"] \\
 & W
\end{tikzcd}$$

$\varphi(v_1, \dots, v_k) = v_1 \otimes \dots \otimes v_k$ È MULTILINEARE

<u>DIM</u> HANNO LA STESSA DIMENSIONE QUINDI BASTA MOSTRARE CHE È INIETTIVA.

CIOÈ $F \neq 0 \Rightarrow \underset{F'}{\underset{\shortparallel}{F \circ \varphi}} \neq 0$

$\exists$ UN ELEMENTO DELLA BASE $F(v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_k}) \neq 0$

ALLORA $F \circ \varphi(v_{i_1} \dots v_{i_k}) \neq 0$ $\boxtimes$

QUINDI IL PRODOTTO TENSORIALE È L'UNICO SPAZIO CHE TRASFORMA UNA COSA MULTILINEARE IN UNA COSA LINEARE SU DI LUI

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \dots \times V_k \arrow[dr, "G"'] & V_1 \otimes \dots \otimes V_k \arrow[d, dashed, "\exists! \text{ INDOTTA DA } G"] \\ & W \end{tikzcd}$$

PROP ESISTONO ISOMORFISMI CANONICO TRA 1) $W \oplus V = V \oplus W$ 2

ANCHE TRA 2) $V \otimes W = W \otimes V$

3) $V \otimes (U \oplus W) = V \otimes U \oplus V \otimes W$

4) $(V_1 \oplus \dots \oplus V_k)^* = V_1^* \oplus \dots \oplus V_k^*$

5) $(V_1 \otimes \dots \otimes V_k)^* = V_1^* \otimes \dots \otimes V_k^*$

6) $V \otimes (U \otimes Z) = (V \otimes U) \otimes Z = V \otimes U \otimes Z$

DIM $V \otimes W \longrightarrow W \otimes V$

$v \otimes w \longrightarrow w \otimes v$ NON È ANCORA BEN DEFINITA

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "G"'] & V \otimes W \arrow[d, dashed] \\ & W \otimes V \end{tikzcd}$$

$\longrightarrow$ VORREI QUESTA (ME LA DA LA PROP. UNIVERSALE)

$G(v, w) = w \otimes v$

$$\begin{tikzcd} U \times V \times Z \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "G"'] & U \otimes V \otimes Z \arrow[d, dashed] \\ & U \otimes (V \otimes Z) \end{tikzcd}$$

$\varphi(u, v, z) = u \otimes (v \otimes z)$

PROPOSIZIONE $\quad \mathrm{Hom}(V, W) = W \otimes V^*$

DIM L'ABBIAMO GIÀ VISTO.

$\boxed{\text{TENSORI}}$

DEF V SPAZIO VETTORIALE, UN TENSORE DI TIPO $h, k \geq 0$ È UN ELEMENTO

$$T \in \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{h \text{ VOLTE}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{k \text{ VOLTE}} = \mathcal{T}_h^k(V)$$

$$T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{\substack{h \\ \text{COVETTORI}}} \times \underbrace{V \dots \times V}_{\substack{k \\ \text{VETTORI}}} \quad (\text{DOVE } V = V^{**}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

ESEMPI

1) $\mathcal{T}_0^0(V) = \mathbb{R}$ PER CONVENZIONE

2) $\mathcal{T}_1^0(V) = V$ VETTORI

3) $\mathcal{T}_0^1(V) = V^*$ COVETTORI

4) $\mathcal{T}_0^k(V) = \mathrm{Mul}(V \times \dots \times V, \mathbb{R})$ es $\mathcal{T}_0^2(V) = \mathrm{Bil}(V)$

5) $\mathcal{T}_1^1(V) = \mathrm{Hom}(V)$

6) $\mathcal{T}_h^k(V) = \{\underbrace{V \times \dots \times V}_{k} \to \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{h}\} = \mathrm{MULT}(V \times \dots \times V, V \otimes \dots \otimes V)$

PERCHÉ

$$\varphi(T)(v_1 \dots v_k)(w^1, \dots, w^k) \longrightarrow T(w^1 \dots w^k, v_1 \dots v_k)$$

$$\varphi : \mathcal{T}_h^k(V) \to \{\underbrace{V \times \dots \times V}_{k} \to \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{h}\}$$

IN PARTICOLARE $\quad \mathcal{T}_1^k(V) = \{V \times \dots V \to V\}$

ES IL PRODOTTO VETTORE IN $\mathbb{R}^3$ è UN TENSORE $(1,2)$

ES IL $\det : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{} \to \mathbb{R}$ è UN TENSORE $(0, n)$ DI $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{B} = \{v_1 \ldots v_n\}$ BASE DI V

$\mathcal{B}^* = \{v^1 \ldots v^n\}$ BASE DUALE DI V

$\tau_h^k(V) = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{h} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{k}$

UNA BASE PER $\tau_h^k(V)$ È $\{v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_h} \otimes v^{j_1} \otimes \ldots \otimes v^{j_k}\}$ $\dim = n^{h+k}$

ALLORA OGNI $T \in \tau_h^k(V)$ SI SCRIVE IN COORDINATE

$$T = \sum_{i_1, \ldots, i_h, j_1 \ldots j_k} T^{i_1 \ldots i_h}_{j_1 \ldots j_k} \, v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_h} \otimes v^{j_1} \otimes \ldots \otimes v^{j_k}$$

CONVENZIONE DI EINSTEIN (SI TOGLIE LA SOMMATORIA)

OSS $T^{i_1 \ldots i_h}_{j_1 \ldots j_k} = T(v^{i_1}, \ldots, v^{i_h}, v_{j_1}, \ldots, v_{j_k})$

DIM $$T = \sum_{i_1, \ldots, i_h, j_1 \ldots j_k} T^{i_1 \ldots i_h}_{j_1 \ldots j_k} \, v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_h} \otimes v^{j_1} \otimes \ldots \otimes v^{j_k}$$

SE LO VALUTO IN $(v^{i_1}, \ldots, v^{i_h}, v_{j_1}, \ldots, v_{j_k})$ SOPRAVVIVE SOLO $T^{i_1 \ldots i_h}_{j_1 \ldots j_k}$ PERCHÉ GLI ALTRI VANNO A ZERO PER QUANTO VISTO PRIMA.

OSS PRENDIAMO $\mathcal{C} = \{w_1 \ldots w_n\}$ $\mathcal{C}^* = \{w^1, \ldots, w^n\}$

$$w_i = \text{"}\sum_j\text{"} A_i^j v_j \qquad v_i = \text{"}\sum_j\text{"} B_i^j w_j$$

OSS B È L'"INVERSA" DI A $\quad A_i^j B_j^k = \delta_i^k$

$A_i^j B_k^i = \delta_k^j$

DIM $w_i = A_i^j v_j = \underbrace{A_i^j B_j^k}_{= \delta_i^k} w_k$ PERCHÉ I w_k SONO UNA BASE

PROP $w^i = B_j^i v^j$

DIM $\delta_e^i = w^i(w_e) = (B_j^i v^j)(A_e^k v_k) = B_j^i A_e^k v^j(v_k)$

LEZIONE 09

Titolo nota 19/03/2019

TENSORI

V SPAZIO VETTORIALE DIMENSIONE n, $\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\}$ BASE e $\mathcal{B}^* = \{v^1, \dots, v^n\}$

BASE DUALE

$$\mathcal{T}_h^k(V) = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{h\text{-VOLTE}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{k\text{-VOLTE}}$$

E UNA BASE È $\{v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_h} \otimes v^{j_1} \otimes \dots \otimes v^{j_k}\}$

e $T \in \mathcal{T}_h^k(V)$ SI SCRIVE $T = T^{i_1 \dots i_h}_{j_1 \dots j_k} v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_h} \otimes v^{j_1} \otimes \dots \otimes v^{j_k}$

SE $T \in \mathrm{End}(V) \Rightarrow T \in \mathcal{T}_1^1(V)$

$$T(v) = w \quad \Rightarrow \quad v^i T_i^j = w^j$$

$$g \in \mathcal{T}_0^2(V) \qquad g(v, w) = v^i g_{ij} w^j$$

g_{ij}

PRODOTTO VETTORE $\quad T \in \mathcal{T}_1^2(\mathbb{R}^3) \quad T_{ij}^k$

$$u = T(v, w) \qquad u^k = T_{ij}^k v^i w^j$$

$$u = v \times w$$

SE PRENDO UNA BASE ORTONORMALE DI $\mathbb{R}^3 \Rightarrow T_{ij}^k = \varepsilon_{ijk}$ SIMBOLO DI LEVI-CIVITA

RICORDIAMO $T(v_i, v_j)^k = T_{ij}^k$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j,k) \text{ PERMUTAZIONE POSITIVA} \\ -1 & \text{SE } (i,j,k) \text{ PERMUTAZIONE NEGATIVA} \\ 0 & \text{ALTRIMENTI.} \end{cases}$$

$$\det \in \mathcal{T}_0^3(\mathbb{R}^3)$$

$$\det{}_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$$

ESERCIZIO $\quad u \cdot (v \times w) = (u \times v) \cdot w = \det(u|v|w)$

UNO LO PUÒ FARE IN COORDINATE PRENDENDO UNA BASE ORTONORMALE

$u^i g_{ij} v^k T^j_{ke} w_e$ NELLA BASE ORTONORMALE $\Rightarrow$ $T^j_{ke} = \varepsilon_{kej}$

$e \; g_{ij} = \delta_{ij}$

$u^i \delta_{ij} v^k \varepsilon_{jke} w^e \overset{i=j}{=} u^i v^k \varepsilon_{ike} w^e$

E QUESTA È IL DET.

CAMBIAMENTO DI COORDINATE

$\mathcal{C} = \{v_1 \dots v_m\}$ $\mathcal{B} = \{w_1 \dots w_m\}$ $w_i = A^j_i v_j$ DOVE $v_i = B^j_i w_j$

$\mathcal{C}^* = \{v^1 \dots v^m\}$ $\mathcal{B}^* = \{w^1 \dots w^m\}$ $w^i = B^i_j v^j$ $v^i = A^i_j w^j$

$e \; A^i_j B^j_k = \delta^i_k$ $e \; A^i_j B^k_i = \delta^k_j$

$T \in \mathcal{T}^k_h(V)$ DI COORDINATE $T^{i_1 \dots i_h}_{j_1 \dots j_k}$

$$\Rightarrow \hat{T}^{i_1 \dots i_h}_{j_1 \dots j_k} = A^{m_1}_{j_1} \dots A^{m_k}_{j_k} B^{i_1}_{e_1} \dots B^{i_h}_{e_h} T^{e_1 \dots e_h}_{m_1 \dots m_k}$$

ALGEBRA TENSORIALE

CANONICAMENTE ISOMORFO.

$$\mathcal{T}^k_h(V) \otimes \mathcal{T}^{k'}_{h'}(V) \cong \mathcal{T}^{k+k'}_{h+h'}(V)$$

IN COORDINATE

$T^{j_1 \dots j_h}_{i_1 \dots i_k} \; U^{m_1 \dots m_{h'}}_{\mu_1 \dots \mu_{k'}} =$

ESEMPIO

$g^{(0,2)} \otimes T^{(1,1)} \in \mathcal{T}^3_1(V)$

$(g \otimes T)^i_{jke} = g_{jk} T^i_e$

DEF $\mathcal{T}(V) = \bigoplus_{h,k \geq 0} \mathcal{T}^k_h(V)$ SI CHIAMA ALGEBRA TENSORIALE

NOTAZIONE $\mathcal{T}^0_h(V) = \mathcal{T}_h(V)$ $\mathcal{T}^k(V) = \mathcal{T}^k_0(V)$ e $\mathcal{T}_*(V) = \bigoplus_{h \geq 0} \mathcal{T}_h(V)$

$e \; \mathcal{T}^*(V) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{T}^k(V)$

CONTRAZIONI

ESEMPIO $tr : \mathcal{T}^1_1(V) \longrightarrow \mathbb{R}$

$T \longmapsto T^i_i$

IN GENERALE

$$T \in \mathcal{T}^k_h(V) = \overbrace{\underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{h}}^{1 \leq a \leq h} \otimes \overbrace{\underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{k}}^{1 \leq b \leq k} =$$

$$= \mathcal{T}^{k-1}_{h-1}(V) \otimes V \otimes V^* \longrightarrow \mathcal{T}^{k-1}_{h-1} (\otimes) \mathbb{R}$$

$$T \otimes v \otimes w \longrightarrow w(v) T$$

EX SENZA USARE LE BASI

$\mathrm{Hom}(V) = V^* \otimes V \xrightarrow{tr} \mathbb{R}$

$T \longrightarrow w \otimes v \longrightarrow w(v)$

VERIFICARE CHE IN COORDINATE È COME SOPRA.

$C : \mathcal{T}_h^k(V) \longrightarrow \mathcal{T}_{h-1}^{k-1}(V)$ È UNA CONTRAZIONE E DIPENDE DALLA

$T \otimes v \otimes w \longrightarrow w(v)\, T$ SCELTA DA a e b

ESERCIZIO $T^{i_1 \dots i_h}_{j_1 \dots j_k}$ ALLORA $C(T) = \tilde{T}$ HA COORDINATE

$$\tilde{T}^{i_1 \dots i_{a-1}\, e\, i_{a+1} \dots i_h}_{j_1 \dots j_{b-1}\, e\, j_{b+1} \dots j_k}$$

PRODOTTO SCALARE

DEF $g_0^2(V)$ È UN PRODOTTO SCALARE SE 1) $g(v,w) = g(w,v)$ SIMMETRICO

2) $\nexists\, v \neq 0$ t.c. $g(v,w) = 0 \quad \forall w \in W$ NON DEGENERE

LA SEGNATURA (i_+, i_-) $(i_0 = 0)$ CON $i_+ + i_- = n$

g è DEF POSITIVO SE $g(v,v) > 0 \quad \forall v \in V \quad v \neq 0$

(I) SE g È UN PRODOTTO SCALARE >0 ALLORA $\exists$ UN ISOMORFISMO CANONICO TRA V e V^*

$L : V \longrightarrow V^*$

$v \longrightarrow (w \longrightarrow g(v,w))$

Ex: $v_i \dashrightarrow v^i g_{ij}$

PROP g_{ij} È PRODOTTO IN V e g^{ij} È PRODOTTO SCALARE SU V^*

e $g_{ij}\, g^{je} = \delta_i^e$ (E PER SIMMETRIA HO L'ALTRO)

DIM DEVE VALERE $\overset{\text{in } V}{g}(v,w) = \overset{\text{in } V^*}{g}(L(v), L(w))$

$v^e g_{em} w^m = v^e g_{ei}\, g^{ij}\, w^m g_{mj}$ SE v e w PRENDO BASE CANONICA

$g_{em} = g_{ei}\, g^{ij}\, g_{mj}$ $\Rightarrow$ IN FORMA MATRICIALE $G = G H G \Rightarrow H \cdot G = I_d$

CHE CHIAMO g

(II) g PRODOTTO SCALARE SU $V \Rightarrow$ NE INDUCE UNO SU $\mathcal{T}_h^k(V) \quad \forall h, k \geq 0$

PRESI $T, U \in \mathcal{T}_h^k(V)$

$$g_{i_1 l_1} \cdots g_{i_h l_h}\, T^{i_1 \dots i_h}_{j_1 \dots j_k}\, U^{l_1 \dots l_h}_{m_1 \dots m_k}\, g^{j_1 m_1} \cdots g^{j_k m_k}$$

FATTO NON DIPENDE MAI DALLA BASE UNA SCRITTURA DOVE GLI INDICI COMPAIONO A COPPIE SIA SOPRA CHE SOTTO

$$A^i_{jk}\, B^j_e\, C^{ek}_i$$

$$\underline{C(C(C(A \otimes B \otimes C)))}$$

CONTRAZIONI e PRODOTTI TENSORIALI NON DIPENDONO DALLE BASI

GRAZIE A $V \xrightarrow{\sim} V^*$ DATA DA g

$$\mathcal{T}_h^k(V) \rightsquigarrow \mathcal{T}^0_{h+k}(V) \rightsquigarrow \mathcal{T}^{h+k}(V)$$

$$T^{i_1 \dots i_h}_{j_1 \dots j_k} \rightsquigarrow T^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_k} g_{i_1 l_1} \dots g_{i_k l_j}$$

SE LI VOGLIO ALZARE USO $g^{j_1 m_1} \dots g^{j_k m_k}$

ESERCIZIO SE $\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\}$ ORTONORMALE e g DEFINITO POSITIVO. ALLORA LA BASE DEFINITA PER $\mathcal{T}_h^k(V)$ INDOTTA DA $\mathcal{B}$ È ORTONORMALE.

TENSORI SIMMETRICI e ANTISIMMETRICI

$\mathcal{T}^k_0(V)$ è SIMMETRICO $T(v_1 \dots v_k) = T(v_{\sigma(1)}, \dots v_{\sigma(k)}) \quad \forall \sigma \in S_k$

ANTISIMMETRICO " $= (-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)}$ " " "

ESERCIZIO: T è SIMMETRICO $\iff T_{i_1 \dots i_k} = T_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(k)}} \quad \forall \sigma \in S_k$

T è ANTISIMMETRICO $\iff T_{i_1 \dots i_k} = (-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)}$ " "

DEF $T \in \mathcal{T}^k_0(V) \qquad S(T) \in \mathcal{T}^k_0(V)$

$$S(T)(v_1 \dots v_k) := \frac{\sum_{\sigma \in S_k} T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})}{k!}$$ SIMMETRIZZATO DI T

EX a) $S(T)$ È SIMMETRICA

b) $T = S(T) \iff T$ è SIMMETRICO

$$A(T)(v_1 \dots v_k) = \frac{\sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)} T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})}{k!}$$ è L'ANTISIMMETRIZZATO.

EX $$S(T)_{i_1 \dots i_k} = \frac{\sum_{\sigma \in S_k} T_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(k)}}}{k!}$$ CIOÈ IN COORD. SUCCEDE QUELLO CHE MI ASPETTO.

STESSO ESERCIZIO PER LE ANTISIMMETRICHE.

DEF $S^h(V) \subseteq \mathcal{T}^k(V)$ TENSORI SIMMETRICI

$\Lambda^h(V) \subseteq \mathcal{T}^k(V)$ " ANTISIMMETRICI

↳ K-FORME

$S^*(V) = \bigoplus_{h \geq 0} S^h(V)$

$\Lambda^*(V) = \bigoplus_{h \geq 0} \Lambda^k(V)$

} NON SONO CHIUSI RISPETTO A $\otimes$ QUINDI NON SONO UNA SOTTOALGEBRA DI $\mathcal{T}^*$

PER $K=1$ $S^1(V) = \Lambda^1(V) = \mathcal{T}^1(V) = V^*$

DEFINIAMO UN PRODOTTO CHE LE RENDERÀ UN ALGEBRA.

DEF $T \in S^k(V)$ $U \in S^{k'}(V)$

$$T \odot U = \binom{k+k'}{k} S(T \otimes U) \in S^{k+k'}(V)$$

SE HO $T_i \in S^{k_i}(V)$ $i=1 \dots m$

$$\bigodot_{i=1}^{m} T_i = \frac{(k_1+\dots+k_m)!}{k_1! \dots k_m!} S\left(\bigotimes_{i=1}^{m} T_i\right)$$

PROP (VEDI LIBRO) QUESTO PRODOTTO È ASSOCIATIVO.

PER LE ANTISIMMETRICHE STESSA COSA

$T \in \Lambda^k(V)$ e $U \in \Lambda^{k'}(V)$ $T \wedge U = \frac{(k+k')!}{k!\,k'!} \cdot A(T \otimes U)$

e ANCHE QUESTO È ASSOCIATIVO

ALLA FINE $S^*(V)$ È UN ALGEBRA ASSOCIATIVA

$\Lambda^*(V)$ " "

ESEMPIO $v, w \in V^*$

$v \odot w = 2 \cdot S(v \otimes w) = 2 \frac{v \otimes w + w \otimes v}{2}$ $\Rightarrow v \odot w$ È COMMUTATIVO

$v \wedge w = v \otimes w - w \otimes v$ $\Rightarrow v \wedge w = - w \wedge v$ $\Rightarrow$ cor $v \wedge v = 0$

LEZIONE 10

Titolo nota 21/03/2019

$\Lambda^k(V), S^k(V) \subseteq \mathcal{T}_0^k(V)$ SONO SOTTOSPAZI MA NON SONO ALGEBRE CON IL PRODOTTO TENSORE.

$\odot$ = PRODOTTO SIMMETRICO SU $S^k(V)$

$\wedge$ = " ANTISIMMETRICO SU $\Lambda^k(V)$

$v \wedge w = v \otimes w - w \otimes v \qquad v \wedge w = -w \wedge v \qquad \Rightarrow v \wedge v = 0$

$v \odot w = v \otimes w + w \otimes v \qquad v \odot w = w \odot v$

$$v^1 \odot \dots \odot v^k = \sum_{\sigma \in S_k} v^{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v^{\sigma(k)}$$

$$v^1 \wedge \dots \wedge v^k = \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{sg(\sigma)} v^{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v^{\sigma(k)}$$

PROP $v^1, \dots, v^n \in V^*$ BASE $\Rightarrow \mathcal{B} = \{v^{i_1} \otimes \dots \otimes v^{i_k}\}$ BASE DI $\mathcal{T}^k(V)$ n^k ELEMENTI

$\mathcal{B} = \{v^{i_1} \odot \dots \odot v^{i_k}\}_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n}$ BASE $S^k(V)$ $\binom{n+k-1}{k}$

N.B. LA DIFF

$\mathcal{B} = \{v^{i_1} \wedge \dots \wedge v^{i_k}\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$ BASE $\Lambda^k(V)$

$$\dim \begin{cases} \binom{n}{k} & k \leq n \\ 0 & \boxed{k > n} \end{cases}$$

IDEA DIM $T \in \mathcal{T}^k(V)$

TIPO DIM MATRICI SIMMETRICHE MA CON + INDICI.

$T = T_{i_1 \dots i_k} v^{i_1} \otimes \dots \otimes v^{i_k}$ DEVE ESSERE SIMMETRICO.

E QUINDI INVARIANTE PER LE PERMUTAZIONI.

COR $\dim S^*(V) = \infty$ e $\dim \Lambda^*(V) = 2^n$

IN PARTICOLARE $\dim \Lambda^n(V) = 1$ SI CHIAMA DETERMINANTE

$\mathcal{B} = \{v^1 \dots v^n\}$ DI $V^* \Rightarrow v^1 \wedge \dots \wedge v^n$ è UN GENERATORE DI $\Lambda^n(V)$

PROP $\mathcal{C} = \{w_1 \dots w_m\}$ ALTRA BASE DI V^*

$v^i = A^i_j w^j$ A MATRICE DI CAMBIAMENTO DI BASE.

ALLORA $v^1 \wedge \dots v^m = \det A \; w^1 \wedge \dots \wedge w^m$

DIM $v^1 \wedge \dots \wedge v^m = A^1_{i_1} w^{i_1} \wedge \dots \wedge A^m_{i_m} w^{i_m} =$

$= A^1_{i_1} \cdots A^1_{i_m} \cdot w^{i_1} \wedge \dots \wedge w^{i_m} =$

m^m SOMME MA SE $i_k = i_h \Rightarrow$ IL PRODOTTO È ZERO PERCHÉ $v \wedge v = 0$

ALLORA IN REALTÀ SONO $m!$

$$= \sum_{\sigma \in S_m} A^1_{\sigma(1)} \cdots A^1_{\sigma(m)} \underbrace{w^{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge w^{\sigma(m)}}_{\substack{\shortparallel \\ (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} w^1 \wedge \dots \wedge w^m}} =$$

$$= w^1 \wedge \dots \wedge w^m \cdot \underbrace{\sum_\sigma (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} \cdot A^1_{\sigma(1)} \dots A^m_{\sigma(m)}}_{\det A}$$

OSS $\{$ORIENTAZIONI DI $V\} \longleftrightarrow \{$orientazione di $\Lambda^m(V)\}$

LA MATRICE $\overset{A}{V}$ DI CAMBIAMENTO DI BASI POSITIVE

$\{v_1 \dots v_m\} \xrightarrow{A} \{w_1 \dots w_m\}$

È $\det A > 0$

$\Rightarrow$ $v^1 \wedge \dots \wedge v^m = \det A \; w^1 \wedge \dots \wedge w^m$ QUINDI STESSA ORIENTAZIONE

DEF SE g È PRODOTTO SCALARE SU V E V È ORIENTATA $\rightsquigarrow$ $\Lambda^m(V)$ EREDITA UN GENERATORE

PERCHÉ POSSO COSTRUIRE

$v^1, \dots v^m$ BASE ORTONORMALE SU V^* $\rightsquigarrow T = v^1 \wedge \dots \wedge v^m$ È BUONO

ED È BEN DEFINITO PERCHÉ

LE MATRICI DI CAMBIAMENTO DI BASI ORTONORM. HA DET $= 1$

QUINDI NON DIPENDE DALLA SCELTA

DI $v^1 \dots v^m$

- $T \in \Lambda^n(V)$ $\quad T(\underbrace{v_1 \dots v_n}_{\text{VETTORI QUALSIASI}}) =:$ Volume $\left(\text{parallelepipedo } v_1, v_2, \dots, v_n\right)$ DEL PARALLELEPIPEDO GENERATO.

$T(v_1 \dots v_n) = 1$ SE $v_1 \dots v_n$ È UNA BASE ORTONORMALE.

PROPRIETÀ FUNTORIALE

$L : V \to W$ LINEARE INDUCE $L^* : W^* \to V^*$

$$\begin{aligned} L_* :\ & \mathcal{T}_*(V) \to \mathcal{T}_*(W) \qquad & L^* \quad & \mathcal{T}^*(W) \to \mathcal{T}^*(V) \\ & S_*(V) \to S_*(W) & & S^*(W) \to S^*(V) \\ & \Lambda_*(V) \to \Lambda_*(W) & & \Lambda^*(W) \to \Lambda^*(V) \end{aligned}$$

SI OTTENGONO CON COMPOSIZIONE CON L e L^*

Se $\quad V \xrightarrow{L} W \xrightarrow{L'} Z \qquad (L' \circ L)_* = L'_* \circ L_*$

$$L^* \circ L'^* = (L' \circ L)^*$$

<u>OSS</u> $\quad L$ INIETTIVA $\Rightarrow L_*$ INIETTIVA $\quad L^*$ SURIETTIVA

L SURIETTIVA $\Rightarrow L_*$ SURIETTIVA $\quad L^*$ INIETTIVA

<u>FIBRATI</u>

<u>DEF</u>

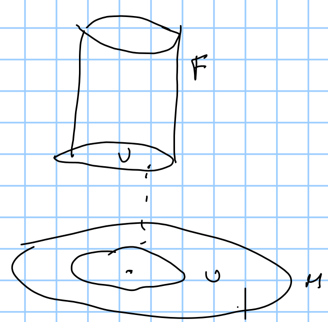
MAPPA LISCIA TRA VARIETÀ LISCE

$$\begin{array}{c} \overset{\text{VARIETÀ TOTALE}}{E^{m+k}} \\ \big\downarrow f \\ \underset{\text{VARIETÀ DI BASE}}{M^m} \end{array}$$

È UN FIBRATO SE $\exists F^k$ VARIETÀ DETTA FIBRA $\forall x \in M$ $\exists U(x)$, $\exists \varphi : f^{-1}(U(x)) \xrightarrow{\sim} U \times F$ DIFFEO

TALE CHE

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(U(x)) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & U \times F \arrow[dl, dashed, "\pi_1 = \text{PROIEZIONE}"] \\ U & \end{tikzcd}$$



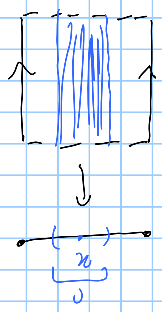
ESEMPIO FIBRATO BANALE

$$\begin{array}{c} M \times F \\ \downarrow f \\ M \end{array}$$

OSS SE $\begin{array}{c} E \\ \downarrow \pi \\ M \end{array}$ FIBRATO ALLORA $\pi^{-1}(x) \cong F$ SI CHIAMA FIBRA ANCHE LEI

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}U & \xrightarrow{\varphi} & U \times F \\ \pi \downarrow & \swarrow \pi & \nearrow \{x_0\} \times F \simeq F \\ U \ni x_0 & & \end{array}$$

ESEMPIO



Möbius $= S^1$

$F = (0,1)$

$B = S^1$

MA NON È IL FIBRATO BANALE

PERCHÈ $Möb \not\cong \underbrace{S^1 \times (0,1)}_{\text{FIBRATO BANALE}}$

ESEMPIO FIBRAZIONE DI Höpf

$$\mathbb{C}^2 \supseteq S^3 \longrightarrow S^2 \simeq \mathbb{C}P^1$$

con $S^3 = \{ (z,w) \in \mathbb{C} \mid |w|^2 + |z|^2 = 1 \}$

$$(z,w) \longrightarrow [z,w]$$

FATTO È UNA FIBRAZIONE CON FIBRA $F = S^1$

VERIFICHIAMO SOLO CHE $F = S^1$

$$\pi^{-1}([z,w]) = \{ (e^{i\theta} z, e^{i\theta} w) \mid \theta \in \mathbb{R} \} \simeq S^1$$

SCELGO z, w IN MODO $|z|^2 + |w|^2 = 1$

PERCHÈ $\pi^{-1}([z,w]) = (\lambda z, \lambda w)$ MA $|\lambda| = 1$
$\Rightarrow \lambda = e^{i\theta}$ $\theta \in \mathbb{R}$

MA IL FIBRATO BANALE SAREBBE $S^2 \times S^1 \not\cong S^3$

FIBRATI VETTORIALI

DEF UN FIBRATO VETTORIALE È UNA MAPPA DA $E \xrightarrow{\pi} M$, DI RANGO K

$\forall p \in M \quad \pi^{-1}(p) =: E_p$ HA UNA STRUTTURA DI SPAZIO VETTORIALE DI DIM. K.

TALE CHE $\forall x \in M \; \exists U \subseteq M$, $\exists \varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^k$ DIFFEO

tc

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & U \times \mathbb{R}^k \arrow[dl, "\pi_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

e $\forall p \in U \quad \varphi : \pi^{-1}(p) = E_p \longrightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^k$

DEVE ESSERE UN ISOMORFISMO DI SPAZI VETTORIALI

ESEMPIO 1) FIBRATO BANALE $M \times \mathbb{R}^k$

2) Ex FIBRATO TAUTOLOGICO SUL $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$

$E \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{P}^n\mathbb{R} \quad \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ NON È UN FIBRATO

$E = \{ (v, \ell) : v \in \ell \}$

→ ℓ RETTA VETTORIALE IN $\mathbb{R}^{n+1}$ e $v \in \ell$

$\downarrow$

$\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ È UN FIBRATO

$$\begin{tikzcd} (v,\ell) \simeq \ell \arrow[d] \\ \ell \end{tikzcd}$$

NON È BANALE (ES $n=1$ $\mathbb{P}^1 = S^1$ e $E = $ Möeb).

MORFISMI TRA FIBRATI VETTORIALI

Def UN MORFISMO TRA FIBRATI È UNA COPPIA f, F TALI CHE

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ M \arrow[r, "f"] & M' \end{tikzcd}$$

f LISCIA

$F|_{E_p} : E_p \longrightarrow E'_{f(p)}$ LINEARE

DEF UN ISOMORFISMO SE F e f SONO INVERTIBILI E L'INVERSE SONO MORFISMI.

OPERAZIONI CON I FIBRATI

$$\begin{tikzcd} E^k \arrow[dr, "\pi"'] & & E'^{k'} \arrow[dl, "\pi'"] \\ & M^m & \end{tikzcd} \Rightarrow \begin{tikzcd} (E \oplus E')^{k+k'} \arrow[d] \\ M \end{tikzcd}$$

$$(E \oplus E')_p := E_p \oplus E'_p$$

$$E \oplus E' = \bigcup_{p \in M} E_p \oplus E'_p$$

CON STRUTTURA LISCIA

LOCALMENTE $\forall p \in U$ t.c. i 2 fibrati ristretto a

$$\begin{tikzcd} U(p) \times \mathbb{R}^k \arrow[dr, "\pi"'] & & U(p) \times \mathbb{R}^{k'} \arrow[dl, "\pi'"] \\ & U(p) & \end{tikzcd}$$

e $\begin{tikzcd} U(p) \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'} \arrow[d] \\ U(p) \end{tikzcd}$ ← STRUTTURA INDOTTA.

FIBRATO DUALE

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d] \\ M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E^* \arrow[d] \\ M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E_p \arrow[d] \\ p \end{tikzcd} \rightsquigarrow \begin{tikzcd} E_p^* \arrow[d] \\ p \end{tikzcd}$$

$$E^* = \bigcup_{p \in M} E_p^*$$

FIBRATO "TENSORIALE"

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d] \\ M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{T}^k_h(E) \arrow[d] \\ M \end{tikzcd} = \bigcup_{p \in M} \mathcal{T}^k_h(E_p)$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dr, "\pi"'] & & E' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & M & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(E, E') \arrow[d] \\ M \end{tikzcd} = \bigcup_{p \in M} \mathrm{Hom}(E_p, E'_p)$$

DEF $\begin{tikzcd} E \arrow[d] \\ M \end{tikzcd}$ UN SOTTO FIBRATO VETTORIALE È $E' \subset E$ SOTTO VARIETÀ LISCIA

T.C. $E'_p := E_p \cap E'$ SIA UN SOTTO SPAZIO DI E_p (SEMPRE DELLA STESSA DIM)

e $\pi|_{E'} : E' \to M$ SIA UN FIBRATO CON QUELLA DIM COME RANGO.

FIBRATO QUOZIENTE

SE E' È UN SOTTOFIBRATO DI E $\Rightarrow$ $\begin{array}{c} E/E' \\ \downarrow \\ M \end{array}$ $\quad E/E' = \bigcup_{p \in M} E_p/E'_p$

QUI LA STRUTTURA LISCIA È MOLTO PIÙ DELICATA.

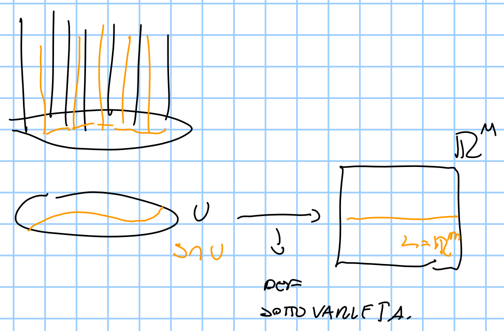
OSS PUÒ VARIARE M!

RESTRIZIONE

SIA $E \to M$ FIBRATO, $S \subseteq M$ SOTTOVARIETÀ

$$\begin{array}{c} E|_S = E \cap \pi^{-1}(S) \\ \downarrow \pi \\ S \end{array}$$

È UN FIBRATO.



PULL-BACK

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\pi_E} & E \\ \downarrow \pi_N & & \downarrow \pi \\ N & \xrightarrow[f \text{ LISCIA}]{} & M \end{array}$$

FIBRATO

$f^*E \subseteq N \times E$

$f^*E = \{(p, v) \mid f(p) = \pi(v)\}$

f^*E È UNA VARIETÀ

$$(f^*E)_p = \{(p, v) \mid v \in E_{f(p)}\} = E_p$$

MOSTRIAMO CHE $(f^*E)_p$ È SOTTOVARIETÀ DI $N \times E$ E $\begin{array}{c} f^*E \\ \downarrow \\ N \end{array}$ È FIBRATO

LOCALMENTE

$$\begin{array}{ccc} \text{Graf} \times \mathbb{R}^k & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \\ & & \downarrow \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow[f]{} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

$f^*E \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$

$\{(p, q, v) \mid f(p) = q\} =$

$\underbrace{\text{Grafico}(f)}_{\text{SOTTOVARIETÀ}} \times \mathbb{R}^k \rightsquigarrow$ È UNA VARIETÀ.

LEZIONE 11

Titolo nota 22/03/2019

SOMMA DI FIBRATI

$$\begin{array}{ccc} E & & E' \\ & {}_{\pi}\searrow \ \swarrow_{\pi'} & \\ & M & \end{array} \qquad E \oplus E' = \bigcup_{p\in M} E_p \oplus E_p'$$

$\forall p \in M$

$$\begin{array}{ccc} U(p)\times\mathbb{R}^k & \longleftarrow & U(p)\times \mathbb{R}^{k'} \\ \downarrow & & \\ U(p) & & \end{array} \qquad \begin{array}{c} U(p)\times(\mathbb{R}^k\oplus\mathbb{R}^{k'}) \\ \downarrow \\ U(p) \end{array}$$

DO QUESTA STRUTTURA LISCIA A $E\oplus E'$

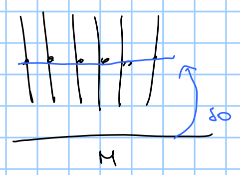
DEFINIZIONE SIA $\begin{array}{c} E \\ \downarrow \pi \\ M \end{array}$ FIBRATO (ANCHE NON VETTORIALE) UNA SEZIONE È UNA MAPPA s

$s: M \to E$ LISCIA tc $\pi \circ s = id_M$

OSS ESISTONO FIBRATI SENZA SEZIONI (TIPO QUELLO DI HOPF E I RIVESTIMENTI)

DEF $\begin{array}{c} E \\ \downarrow \\ M \end{array}$ VETTORIALE ESISTE SEMPRE UNA SEZIONE PREDILETTA, DETTA ZERO-SEZIONE

$S_0 : M \to E \qquad S_0(p) = 0 \in E_p$



LA ZERO SEZIONE È UN EMBEDDING

QUINDI A VOLTE È UTILE IDENTIFICARE

M CON $S_0(M)$ IN E

DEF $\Gamma(E) = \{$ SEZIONI DI E SU $M \}$

PROP $\Gamma(E)$ È UNO SPAZIO VETTORIALE DEFINENDO

$(s+s')(p) = s(p) + s'(p) \quad \forall p \in M \qquad s, s' \in \Gamma(E)$ (ANALOGO PER PRODOTTO PER SCALARE)

SOMMA IN E_p E QUINDI È SENSATO.

LOCALMENTE DARE s È COME DARE f.

$$\begin{array}{c} U\times\mathbb{R}^k \\ s \uparrow \ \downarrow \\ U \end{array} \qquad s(p) = (p, f(p)) \qquad f: U \to \mathbb{R}^k$$

DEF UNA SEZIONE PARZIALE DI UN FIBRATO $\begin{array}{c} E \\ \downarrow \pi \\ M \end{array}$ È UN $s: S \to E$ DOVE $S \subset E$ LISCIA e $\pi \circ s = id_S \quad \forall p \in S$

PROP Ogni sezione parziale su un chiuso $S \subseteq M$ si può estendere a una sezione su tutto M.

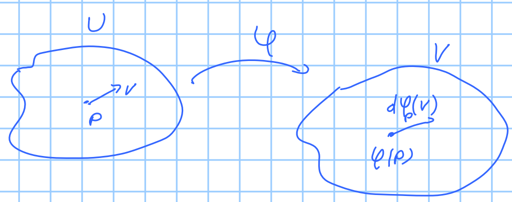
DIM è come la dim che ogni funzione su un chiuso su $\mathbb{R}^n$ perché le sezioni localmente sono come funzioni da U in $\mathbb{R}^k$ e si procede come sempre usando partizioni dell'unità.

FIBRATO TANGENTE

DEF/PROP M^m liscia $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$ è una varietà $2m$-dimensionale

DIM $\varphi : U \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ carta locale

$$TM|_U \xrightarrow{\Phi} V \times \mathbb{R}^m$$
$$(p, v) \longrightarrow (\varphi(p), d\varphi_p(p))$$
$$\underset{U}{\overset{\in}{p}} \quad \underset{T_pM}{\overset{\in}{v}}$$



Presi U e U' aperti in M $U \cap U' \neq \emptyset$

$$\Rightarrow \quad \Phi' : TM|_{U'} \longrightarrow V' \times \mathbb{R}^m$$

Devo controllare che $\Phi \circ \Phi'^{-1}$ è liscia. (composizione di cose lisce)

(ci sarebbe da vedere che $TM|_U \cap TM|_{U'}$ è aperto)

OSS $f : M \longrightarrow N$ liscia induce morfismo fra $TM \xrightarrow{f_*} TN$

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{f_*} & TN \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_M} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_N} \\ M & \xrightarrow[f]{} & N \end{array} \qquad f_*(p,v) = (f(p), df_p(v))$$
$$v \in T_pM$$

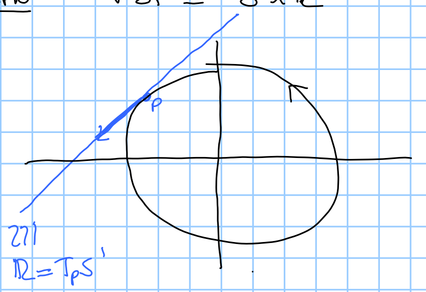
ESEMPI 1) $U \subseteq \mathbb{R}^m$ $\quad TU = U \times \mathbb{R}^m$ banale

2) $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sottovarietà $\quad TM \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sottovarietà

$\forall p \in M \quad p \in \mathbb{R}^n$

$T_pM \subseteq T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ $\qquad TM = \{(p,v) \in \mathbb{R}^n,\ p \in M \subseteq \mathbb{R}^n \text{ e } v \in T_pM \subseteq \mathbb{R}^n\}$

ESEMPIO $TS^1 \cong S^1 \times \mathbb{R}$



FIBRATO COTANGENTE

RICORDA $\begin{array}{c} E \\ \downarrow \\ M \end{array} \qquad \begin{array}{c} E^* \\ \downarrow \\ M \end{array} \qquad \begin{array}{c} (TM)^* \\ \downarrow \\ \end{array}$ = FIBRATO COTANGENTE

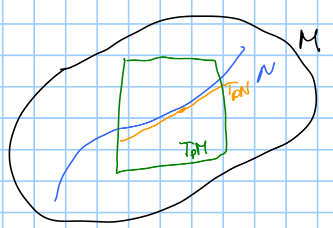
OSS A CHE SERVE? A VOLTE SI COMPORTA MEGLIO $(TM)^*$

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\forall p \quad df_p : T_pM \longrightarrow \mathbb{R} \qquad df_p \in (T_pM)^*$ QUINDI IL df È UNA SEZIONE È DEL FIBRATO COTANGENTE.

DEF $N \subset M$ SOTTOVARIETÀ DI N

IL FIBRATO NORMALE $\begin{array}{c} \nu N = TM\big|_N \big/ TN \\ \downarrow \\ N \end{array}$

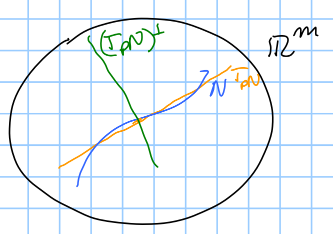


ESEMPIO $N \subseteq \mathbb{R}^m$

$\Rightarrow \forall p \in N \quad \nu_p = (T_pN)^\perp$

RICORDA $W \oplus U = V$

$\Rightarrow V/_U \simeq W$



$\nu N \subseteq \mathbb{R}^{2m}$

$\shortparallel$

$\{(p,v) : p \in N,\ v \in (T_pN)^\perp\}$

OSS $N \subseteq \mathbb{R}^m \Rightarrow T_pN \oplus (T_pN)^\perp = \mathbb{R}^m$

QUINDI $TN \oplus \nu N = N \times \mathbb{R}^m$

ES $N = S^{m-1}$ $\quad \forall p \in N$ $\quad \nu S^{m-1}_p = \mathrm{Span}(p) = \mathbb{R}$ $\quad \underbrace{\nu S^{m-1} \cong S^{m-1} \times \mathbb{R}}_{\text{BANALE}}$

$TS^{m-1}_p = p^\perp$ $\quad TS^{m-1} \to$ NON BANALE IN GENERALE

BANALE + NON BANALE $\overset{\text{A VOLTE}}{=}$ BANALE

FIBRATI TENSORIALI

DEF $M, TM, (TM)^*$

$$\mathcal{T}_h^k(M) := \mathcal{T}_h^k(TM)$$

DEF UN CAMPO VETTORIALE SU M È UN $s \in \Gamma(TM)$

" DI COVETTORI È $s \in \Gamma(TM)^*$

UN CAMPO TENSORIALE È $s \in \Gamma(\mathcal{T}_h^k(M))$ (DI SOLITO VIENE CHIAMATO TENSORE)

DEF UN $\boxed{\text{FRAME}}$ (O SISTEMA DI RIFERIMENTO)

SIA $\begin{matrix} E^{m+k} \\ \downarrow \\ M^m \end{matrix}$ VETTORIALE DI RANGO K, DATE K SEZIONI $s_1 \dots s_k \in \Gamma(E)$ INDIPENDENTI $\forall p \in M$ CIOÈ $s_1(p), \dots, s_k(p) \in E_k$ L.I. È UN FRAME.

PROP $\exists$ UN FRAME $\Leftrightarrow$ IL FIBRATO È BANALE.

DIM $\boxed{\Leftarrow}$ $E \simeq M \times \mathbb{R}^k$ $\quad s_i(p) = (p, e_i)$

$\boxed{\Rightarrow}$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dr] & M \times \mathbb{R}^k \arrow[l, "\psi"'] \arrow[d] \\ & M \end{tikzcd}$$

$\psi(p, v) = v_1 s_1(p) + \dots + v_k s_k(p)$ È UN ISOMORFISMO $\forall p$ $\quad v = (v_1 \dots v_k)$

OSS $\begin{matrix} E \\ \downarrow \\ M \end{matrix}$ LOCALMENTE $\begin{matrix} U \times \mathbb{R}^m \\ \downarrow \\ U \end{matrix}$ E QUINDI LOCALMENTE UN FRAME ESISTE SEMPRE UN FRAME

LEMMA $E^{m+k} \to M^m$ FIBRATO DI RANGO K, $E' \subseteq E$ SOTTOINSIEME.

RICORDA SOTTOFIBRATO
1) E' SOTTOVARIETÀ
2) $E'_p \subset E_p$ SOTTOSPAZIO DI DIM k'
3) $\pi|_{E'} : E' \to M$ SIA FIBRATO.
(NON SO SE 3) È NECESSARIA)

ALLORA SONO EQUIVALENTI:

1) E' È UN SOTTOFIBRATO DI RANGO k'

2) $\forall p \in M \; \exists U(p)$ TRIVIALIZZANTE PER E ED ESISTONO $s_1 \dots s_k$ SU U TALE CHE $E'_q = \text{SPAN}(s_1(q), \dots, s_{k'}(q)) \; \forall q \in U$

DIM (FACCIO SOLO 2) ⇒ 1) CHE È QUELLO CHE MI SERVE)

USANDO IL FRAME IDENTIFICO $U \times \mathbb{R}^k = E|_U \to U$

ED $E'|_U = E \cap E'|_U = U \times \mathbb{R}^{k'} \times \{(0, \dots, 0)\}^{k-k'} \to U$

DEF SIA $E^{m+k} \xrightarrow{\pi} M^m$ FIBRATO ALLORA UNA METRICA RIEMANNIANA SUL FIBRATO E È $g \in \Gamma(S_0^2(E))$

SEZIONE VUOL DIRE CHE SI MUOVE IN MODO LISCIO

SONO LE FORME BILINEARI SUL BILINEARE $g_p \in S_0^2(E)$ TALE CHE SIA DEFINITA POSITIVA $\forall p$.

$g_p : E_p \times E_p \to \mathbb{R}$

PROP DATA M ESISTONO METRICHE RIEMANNIANE SU M

DIM SE U È UN APERTO TRIVIALIZZANTE $E|_U \overset{\text{ISOMORF.}}{\simeq} U \times \mathbb{R}^k \to U$

DEFINISCO $g_U \in \Gamma S^2(E|_U)$ COSTRUITO PRENDENDO IL PRODOTTO SCALARE DEFINITO SULLA FIBRA DI OGNI PUNTO IN U COME QUELLO CANONICO DI $\mathbb{R}^k$ E RIPORTATO INDIETRO DALL'ISOMORFISMO

QUINDI HO $\{U_i, g_i\}$ $g_i \in \Gamma S^2(E|_{U_i})$ COME SOPRA.

SIA $\{f_i\}$ PARTIZIONE DELL'UNITÀ SUBORDINATA A U_i

$g(p) = \sum_i f_i(p)\, g_i(p)$ È UNA COMB LINEARE VICINO A P $\forall p$ GRAZIE ALLA PARTIZIONE DELL'UNITÀ

VEDIAMO CHE $g \in \Gamma S^2_0(E)$

NON È DETTO CHE DEFINITO POSITIVO. MA SICCOME I COEFF. DELLA MIA COMBINAZIONE LINEARE SONO ≥ 0 USO CHE LA COMBINAZIONE DI PRODOTTI SCALARI DEF POS. CON COEFF. POSITIVI ANCORA È POSITIVO.

PROP $\begin{array}{c} E \\ \downarrow \\ M \end{array}$ È SEMPRE ISOMORFO A $\begin{array}{c} E^* \\ \downarrow \\ M \end{array}$

DIM SIA g METRICA RIEMANNIANA QUALSIASI $\Rightarrow E_p \cong E_p^*$ $\forall p$ DATA DALLA FORMA BIL.

E QUINDI HO UNA MAPPA
$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr] \arrow[dr] & & E^* \arrow[dl] \\ & M & \end{tikzcd}$$

PROP $\begin{tikzcd} E' \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[dr] & E \arrow[d] \\ & M \end{tikzcd}$ $\quad \begin{tikzcd} E/E' \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d] & (E')^{\perp} \arrow[dl] \\ M & \end{tikzcd}$

DIM PRESA g METRICA RIMANNIANA DEFINISCO $(E_p')^{\perp} = (E')_p^{\perp}$ E $(E')^{\perp} \cong E/_{E'}$

DEF $\begin{array}{c} E \\ \downarrow \\ M \end{array}$ FIBRATO, g METRICA RIEMANNIANA, UN FRAME ORTONORMALE È UN FRAME $s_1 \dots s_k$ TALE CHE $s_1(p), \dots, s_k(p)$ È UNA BASE ORTONORMALE $\forall p \in M$.

GRAM-SCHMIDT VALE ANCORA PERCHÈ L'OUTPUT DI G-S È SEMPRE LISCIO.

LEZIONE 12

Titolo nota 26/03/2019

CAMPI VETTORIALI

DEFINIZIONE: M una varietà liscia, un campo vettoriale $X \in \Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$

cioè una sezione del fibrato tangente.

$X(p) \in T_pM \quad \forall p \in M$

IN CARTE: $U \subseteq M$, $\varphi : U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ carta

X lo vedo ristretto a U trasportato su V

$\varphi_* (X|_U) \overset{\text{lo rinomino}}{=} X$

e $\forall p \in V \quad X(p) = X^i(p)\, e_i$ (base canonica) (not. di Einstein)

usando $\frac{\partial}{\partial x^i}$ invece di e_i

$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ (tolgo la dipendenza dal punto).

OSS $\varphi : U \to V$ diffeo

induce un isomorfismo

$\varphi_* \ \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(V)$

$X \in \mathfrak{X}(U)$

$\varphi_* X \in \mathfrak{X}(V)$

e $\varphi_* X(\varphi(p)) =$

$= d\varphi_p (X(p))$

Perché è utile?

1) Perché $f \mapsto X(p) f = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$ ovvero coincide con una derivazione

2) Comodo per cambiamento di carte,

ci sono altre coordinate date da un'altra carta

$\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n$

$\underbrace{\frac{\partial}{\partial \bar{x}^1} \dots \frac{\partial}{\partial \bar{x}^n}}_{\text{base}}$

$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial}{\partial x^j}$

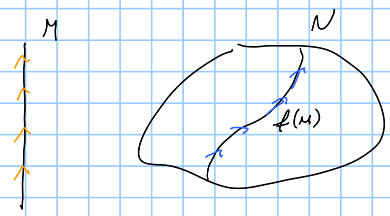
cambio di coordinate,

e $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \bar{X}^j \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} = \bar{X}^j \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \Rightarrow X$

<u>DEF/PROP</u> SE $f: M \hookrightarrow N$ È UN EMBEDDING, $X \in \mathfrak{X}(M) \Rightarrow f_* X \in \mathfrak{X}(f(M))$

$\forall p \in M \quad (f_* X)(f(p)) = df_p(X(p))$

VA DIMOSTRATO CHE NELL'IMMAGINE È DAVVERO UNA COSA LISCIA.



$\boxed{\text{FLUSSI}}$

SIA $X \in \mathfrak{X}(M)$

<u>DEF</u> UNA <u>LINEA INTEGRALE</u> È UNA $\gamma: I \to M$ LISCIA TALE CHE $\dot\gamma(t) \in T_{\gamma(t)}M$

e $\dot\gamma(t) = X(\gamma(t))$

È MASSIMALE SE $\nexists\ \gamma_2 : I_2 \to M$ t.c. $I_2 \supset I$ e $\gamma(t) = \gamma_2(t) \ \forall t \in I$

<u>OSS</u> OGNI LINEA INTEGRALE È CONTENUTA IN UNA LINEA (UNICA ← VEDREMO) INTEGRALE MASSIMALE

<u>PROP</u> LA LINEA MASSIMALE È UNICA (L'ESISTENZA BASTA PRENDERE L'UNIONE DI TUTTI I PROLUNGAMENTI)

CIOÈ $\forall p \in M \ \exists!\ \gamma_p : I_p \to M \quad \gamma_p(0) = p \quad \gamma_p$ MASSIMALE.

<u>DIM</u> IN CARTE γ RISOLVE UN PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} \dot\gamma(t) = X(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = \text{"}p\text{"} \end{cases}$$

"p" → p LETTO IN COORDINATE.

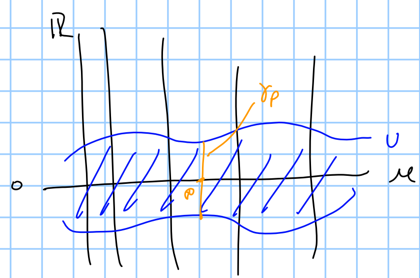
E γ_p DIPENDE IN MODO LISCIO DA p PER I TEOREMI DI ANALISI CHE DANNO LA DIPENDENZA LISCIA.

<u>TEOREMA</u> X CAMPO SU M $\exists!$ UN APERTO $U \subseteq M \times \mathbb{R}$ INTORNO DI $M \times \{0\}$ (APERTO)

e UNA $\phi: U \to M$

TALE CHE $U \cap \{p \times \mathbb{R}\} = I_p$

e $\phi(p,t) = \gamma_p(t) \ \forall t \in I_p$



<u>DIM</u> SI USA LA DIPENDENZA LISCIA DAI DATI INIZIALI.

<u>DEF</u> X È <u>COMPLETO</u> SE U MASSIMALE È $M \times \mathbb{R}$ CIOÈ $I_p = \mathbb{R} \ \forall p \in M$.

LEMMA: Se esiste ε tc $U \supseteq M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \Rightarrow M$ è completo

DIM se fisso $p \Rightarrow \gamma_p(t)$ è definita $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \Rightarrow q \in M$ è $\gamma(\varepsilon/2)$

Allora γ_q può andare avanti di $\varepsilon \Rightarrow \gamma_p$ è andata avanti di 2ε e

così via...

COROLLARIO M compatta $\Rightarrow X$ è completo.

OSS se X è completo allora $\phi: M \times \mathbb{R} \to M$

allora $\forall\, t \in \mathbb{R}$ $\phi_t : M \to M$

$p \mapsto \gamma_p(t) = \phi(p,t)$

PROP ϕ_t è un diffeo $\forall t$, $\phi_0 = id$, $\phi_t^{-1} = \phi_{-t}$ e $\phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t$

Cioè esiste un omomorfismo da: $\mathbb{R} \to Diff(M)$

$t \mapsto \phi_t$

È una cosa del genere si chiama gruppo di diffeomorfismi ad un parametro.

DIM segue dalla definizione e ho $\phi_0 = id$ $\phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t \Rightarrow \phi_t^{-1} = \phi_{-t} \Rightarrow$ diffeo perché ho l'inversa

ISOTOPIA AMBIENTE

DEF M una varietà, un'isotopia ambiente è un'isotopia tra f e l'id.

cioè $t \in \mathbb{R}$ $F_t : M \to M$ $\forall t$ è un diffeo $F_0 = id$ e $F_1 = f$

PROP isotopia ambiente $\Rightarrow$ isotopia (in qualche insieme)

Se $f: N \to M$ embedding $f_t = F_t \circ f$ è un'isotopia di embedding.

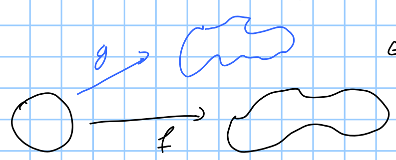
$f_0 = f$

$f_1 =$ nuovo embedding.

DOMANDA Quando è che un'isotopia si estende a un'isotopia ambiente?

cioè $g, f : N \to M$ embedding. $\exists\, F_t$ tc $F_0 = f$ e $F_1 = g$

ES $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$

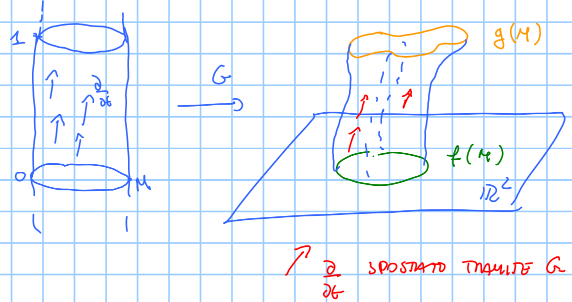


Esiste un'isotopia di tutto $\mathbb{R}^2$ che muove $f(S^1)$ in $g(S^1)$.

TEOREMA $f, g : M \hookrightarrow N$ EMBEDDING, M COMPATTA, SE SONO ISOTOPI $\Rightarrow \exists$ ISOTOPIA AMBIENTE.

DIM $\exists$ $F : M \times \mathbb{R} \longrightarrow N$ ISOTOPIA $F_0 = f$ e $F_1 = g$

$G : M \times \mathbb{R} \longrightarrow N \times \mathbb{R}$
$(p, t) \longrightarrow (F(p,t), t)$



OSS $T_{(p,t)} M \times \mathbb{R} = T_p M \times \mathbb{R}$ ($\frac{\partial}{\partial t}$ COORDINATE)

$\nearrow \frac{\partial}{\partial t}$ SPOSTATO TRAMITE G

$\Rightarrow Y = G_* X$, $X = \frac{\partial}{\partial t}$

$$dG_{(p,t)} = \begin{pmatrix} (dF_t)_p & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

F_t È UN EMBEDDING $\forall t$

QUINDI $dG_{(p,t)}$ È INVERTIBILE

È INIETTIVA (OSS F NON LO È)

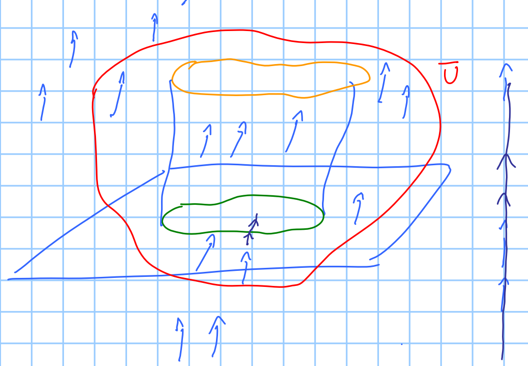
MA SEPARANDO I TEMPI G È INIETTIVA.

È PROPRIA PERCHÉ LA CONTROIMMAGINE DI UN COMPATTO È LIMITATO IN $\mathbb{R}$ e M È COMPATTO QUINDI È CONTENUTO IN UN COMPATTO.

DECIDO DI PRENDERE Y DEFINITO SOLO SU $G(M \times [0,1]) = B$ (B È COMPATTO PERCHÉ G PROPRIA)
LO ESTENDO IN MODO CHE SIA NULLO $U \supset G(M \times [0,1])$ RELATIVAMENTE COMPATTO

INFINE CAMBIO LA COMPONENTE VERTICALE A 1 (ANCHE DOVE PRIMA ERA NULLO)

SE DIMOSTRO CHE Y È COMPLETO E IL SUO FLUSSO MI DARÀ L'ISOTOPIA.



SENZA FORMALIZZARE:

SE STO DENTRO U SONO DENTRO UN COMPATTO QUINDI CAMPO È.

SE STO FUORI INVECE VIVO VERTICALMENTE $\forall t \in \mathbb{R}$

QUINDI PER LA PROP. Y È COMPLETO.

$\phi : N \times \mathbb{R}_t \times \mathbb{R} \longrightarrow N \times \mathbb{R}_t$

$\phi_u : N \times \mathbb{R}_t \longrightarrow N \times \mathbb{R}_t$

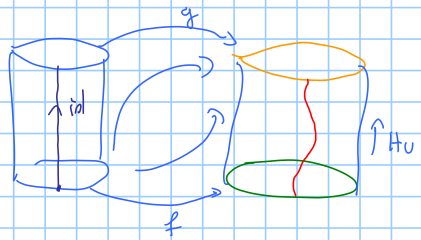
$\phi_u(q,o) = (H(q,u), u)$

PERCHÉ LA COMPONENTE VERTICALE DI Y L'AVEVO FISSATA A 1.

$H(q,u) : N \times \mathbb{R}_u \longrightarrow N$ È L'ISOTOPIA AMBIENTE CERCATA

$H_u \; N \longrightarrow N \qquad H_0 = id \;, H_u$ È DIFFEO $\forall u$

RESTA DA VEDERE CHE $H_1 \circ f = g$



LA TESI CORRISPONDE A DIRE CHE IL DIAGRAMMA COMMUTA. MA POICHÉ H SEGUE LE TRASFORMATE DELLE CURVE DI CAMPO IL DIAGRAMMA COMMUTA.

COR M COMP $f,g : M \longrightarrow N$ EMBEDDING $\Rightarrow N \setminus f(M) \overset{diffeo}{\simeq} N \setminus g(M)$

DIM ESISTE ISOTOPIA AMBIENTE $F_t : N \longrightarrow N$ tc $F_1 \circ f = g$

e CONSEGUENTEMENTE $F_1(f(M)) = g(M)$

e $F_1(\underbrace{N \setminus f(M)}_{\text{APERTI}}) = \underbrace{N \setminus g(M)}_{\text{POICHÉ } M \text{ È COMPATTA}}$

E LO FA IN MODO LISCIO.

COSTRUIRE CONTROESEMPIO SE M NON È COMPATTA.

GLI EMBEDDING DI $\mathbb{R}$ IN $\mathbb{R}^2$ SONO ISOTOPI MA NON AMBIENTALMENTE ISOTOPI.

COROLLARIO OGNI VARIETÀ CONNESSA M È OMOGENEA.

CIOÈ $\forall\, p,q \in M \;\; \exists\, \varphi : M \longrightarrow M$ DIFFEO $\varphi(p) = \varphi(q)$

(VOLENDO ANCHE ISOTOPO ALL'IDENTITÀ)

DIM $N = \{x_0\} \overset{f}{\nearrow} M$, $\overset{g}{\searrow} M$ $\qquad f(x_0) = p$, $g(x_0) = q$

SICCOME N È CONNESSA PER ARCHI ALLORA C'È SEMPRE UN ARCO LISCIO. CHE È UNA ISOTOPIA AMBIENTE CHE FA QUELLO CHE VOGLIO

EX M LISCIA CONNESSA $\forall p, q \in M \Rightarrow$ ESISTE ARCO LISCIO CHE CONNETTE p A q

OSS 2 ARCHI LISCI SI POSSONO SEMPRE CONCATENARE PERCHÈ BASTA ARRIVARE CON VELOCITÀ NULLA AL PUNTO DI COLLEGAMENTO (COME SI FA PER LE ISOTOPIE).

LEZIONE 13

Titolo nota 28/03/2019

OPERAZIONI PER COSTRUIRE ALTRI CAMPI

DATI X e $Y \in \mathfrak{X}(M) \Rightarrow \lambda X + \mu Y \in \mathfrak{X}(M)$

PARENTESI DI LIE $[X,Y] \in \mathfrak{X}(M)$

- $X \in \mathfrak{X}(M)$ $f \in C^\infty(M,\mathbb{R}) = C^\infty(M)$

ALLORA $f \cdot X \in \mathfrak{X}(M)$ $(fX)(p) = f(p)\, X(p) \in T_pM \quad \forall p \in M$

- IN GENERALE, $s \in \Gamma(E)$ e $f \in C^\infty(M) \Rightarrow f \cdot s \in \Gamma(M)$
- $X \cdot f \in C^\infty(M)$ $X(p) \cdot (f) =: Xf(p)$ (DERIVATA DI f LUNGO X)

OSS $X(f \cdot g) = (Xf) \cdot g + f \cdot (Xg)$ CIOÈ VALE LA LEGGE DI LEIBNIZ

ATTENZIONE $(fX)g \neq f \cdot (Xg)$

DEF SE X e $Y \in \mathfrak{X}(M)$ ALLORA

$\mathfrak{X}(M) \ni [X,Y]$ TALE CHE $[X,Y](f) = XYf - YXf \quad \forall f \in C^\infty(M), U \subseteq M$

DIMOSTRO CHE È UNA BUONA DEFINIZIONE, MOSTRANDO CHE VALE LA LEGGE DI DERIVAZIONE

$$[X,Y](p)\,(f) = (XYf - YXf)(p)$$

ALLORA $[X,Y](p)(f \cdot g) = [X,Y](p)f \cdot g(p) + f(p)\,[X,Y](p)\,g(p)$

$$XY(fg) = X\big((Yf) \cdot g\big) + X(f \cdot Yg) =$$

$$= (XYf)g + \cancel{(Yf)(Xg)} + \cancel{(Xf)(Yg)} + f(XYg)$$

$$YX(fg) = (YXf)g + \cancel{(Xf)(Yg)} + \cancel{(Yf)(Xg)} + f(YXg)$$

SOTTRAENDO $\big([X,Y]f\big) \cdot g + f \cdot \big([X,Y]g\big) = [X,Y](fg)$

È CANONICAMENTE DEFINITO

$f : M \to N$ DIFFEO

e $X_1, X_2 \in \mathcal{X}(M) \xrightarrow{\text{TRAMITE } f} Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(N)$

$\Rightarrow [X_1, X_2] \dashrightarrow [Y_1, Y_2]$

QUINDI PUÒ ESSERE LETTO IN CARTE.

PROP X, Y DUE CAMPI IN $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

$$[X,Y]^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}$$

PROP $[X,Y] = X^j \frac{\partial Y}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X}{\partial x^j}$ (CIOÈ POSSO TOGLIERE LE i)

DIM BASTA FAR VEDERE CHE APPLICATA AD $f \in C^\infty(U)$ ALLORA VALE L'UGUAGLIANZA

$$[X,Y](f) = X^j \frac{\partial Y^k}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^k} - Y^j \frac{\partial X^k}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x^k}$$

COROLLARIO SE $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$ (COSTANTE) $\Rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial x}, Y\right] = \frac{\partial Y}{\partial x^1}$

COROLLARIO SE PRENDO 2 CAMPI COORDINATI $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$ $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$$

OSS
- $X, Y \in \mathcal{X}(M) \Rightarrow [X,Y] = -[Y,X]$ È ANTISIMMETRICO.

  ALLORA $[X,X] = 0$

- $[\,,\,] \in \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ BILINEARE E ANTISIMMETRICO.

IDENTITÀ DI JACOBI

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$$

DEF UN'ALGEBRA DI LIE UN'ALGEBRA CON JACOBI

CIOÈ 1) $\mathbb{R}$ SPAZIO VETTORIALE MUNITO DI $[\ ]$

2) $[\ ,\ ]$ BILINEARE

3) ANTISIMMETRICO

4) VERIFICA JACOBI.

ESEMPIO $M(n,n)$ con $[A,B] = A\cdot B - BA$.

OSS $\mathfrak{X}(M)$ CON $[\ ,\ ]$ È UN'ALGEBRA DI LIE.

ESERCIZIO A e B MATRICI $n\times n$

(NON SCONTATO)

$$X(x) = Ax \quad e \quad Y(y) = By \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$$

$$[X,Y](x) = (BA - AB)(x) = -[A,B]x$$

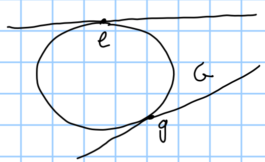
GRUPPI DI LIE

SIA G UN GRUPPO DI LIE

$\forall g$ $L_g : G \longrightarrow G$, $x \longrightarrow gx$ $\quad R_g : G \longrightarrow G$, $x \longrightarrow xg$ DIFFEO.

$$(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$$

$$(dL_g)_e : T_e G \longrightarrow T_g G$$



PROP G GRUPPO ALLORA G È PARALLELIZZABILE (SE IL FIBRATO TANGENTE È BANALE)

DIM $\forall v \in T_e G =: \mathfrak{g}$ DEFINISCO UN CAMPO $X_v(g) = (dL_g)_e(v)$

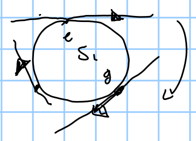
SE $v_1 \dots v_n$ BASE DI $\mathfrak{g}$ $\Rightarrow$ $X_{v_1}(g), \dots X_{v_n}(g)$ SONO UNA BASE $T_g G$ $\forall g \in G$

QUINDI SONO UN FRAME.

ES SE M È PARALLELIZZABILE $\Rightarrow$ M È ORIENTABILE.

DEF UN CAMPO VETTORIALE $X \in \mathcal{X}(G)$ È INVARIANTE A SINISTRA SE

$\forall g, g' \in G$ $\quad (dL_g)_{g'} : T_{g'}G \longrightarrow T_{gg'}G$ MANDA $X(g') \longrightarrow X(gg')$



L_g È UNA ROTAZIONE DI g,

OSS LA MAPPA $T_e G \longrightarrow \mathcal{X}(G)$

$v \longmapsto X_v := (dL_g)_e(v)$

È UN'ISOMORFISMO TRA $\mathfrak{g}$ e $\{$CAMPI INVARIANTI A SINISTRA$\}$

X_v È INVARIANTE A SX (VERO MA NON OVVIO USARE $g \cdot g' = (g \cdot g^{-1})_e \cdot g g'$

DEVO PASSARE DA e.

INOLTRE È SURIETTIVA PERCHÉ UN CAMPO INVARIANTE

A SINISTRA È DETERMINATO DA COSA FA IN $T_e G$

PROP SE X, Y INVARIANTI A SINISTRA $\Rightarrow [X, Y]$ LO È.

DIM $L_g : G \longrightarrow G$ DIFFEO $\Rightarrow$ X VA IN X

Y " " Y

MA ABBIAMO DETTO CHE IL BRACKET $([\,])$ È INVARIANTE PER DIFFEOMORFISMI.

OSS QUINDI I CAMPI VETTORIALI INVARIANTI A SINISTRA SONO UNA

SOTTO ALGEBRA DI LIE, MA LA MAPPA $v \longmapsto X_v$ LA IDENTIFICA

CON $\mathfrak{g}$ E QUINDI EREDITA LA STRUTTURA DI ALGEBRA

E $\boxed{\mathfrak{g} = \text{L'ALGEBRA DI LIE ASSOCIATA A } G}$

CON $v, w \in \mathfrak{g}$ $\quad [v, w] = [X_v, X_w](e)$

ESEMPIO $G = GL(n, \mathbb{R})$ $\quad \mathfrak{g} = T_{Id} G = M(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$

$\cap$ $M(n)$ APERTO

PROP $\forall A, B \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ $[A,B]$ è $= AB - BA$

DIM $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) = M(n) = T_{Id}\, GL(n,\mathbb{R})$

$X_A = X \cdot A = df_*$ $\quad f: M(n) \to M(n)$, $A \mapsto XA$

$X_B = X \cdot B$

$X_A(X) = X \cdot A$ e $X_B(X) = XA$ e $[X_A, X_B] = X_{[A,B]}$

POI SEGUE COME LA DIM $\dot X = A \cdot x$ $\quad \dot Y = By$ $\Rightarrow [X,Y] = -[A,B]$

SOTTO GRUPPO DI LIE

DEF G GRUPPO DI LIE, UN SOTTOGRUPPO DI LIE

UN SOTTOGRUPPO H CHE IMMAGINE DI UN'IMMERSIONE INIETTIVA.

OSS SE $H < G$ e SOTTOVARIETÀ (QUINDI IMMAGINE DI UN EMBEDDING).

ESEMPIO $O(n) < GL(n,\mathbb{R})$ $\quad SL(n,\mathbb{R}) < GL(n,\mathbb{R})$

$\mathfrak{o}(n) = T_{Id}\, O(n) \subseteq T_{Id}\, GL(n) = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ È UNA SOTTOALGEBRA?

DEF $f: M \to N$ LISCIA

$X \in \mathfrak{X}(M)$ $\quad Y \in \mathfrak{X}(N)$

DICO CHE X e Y SONO f-CORRELATI SE $df_p(X(p)) = Y(f(p))$ $\forall p \in M$

ESERCIZIO (TECNICO) SE X e Y SONO f-CORRELATI CON W e Z

NO DIM $\Rightarrow [X,Y]$ è f CORRELATO CON $[W,Z]$

VEDO CHE $H \xhookrightarrow{f} G$ IMMERSIONE INIETTIVA CHE È ANCHE UN OMOMORFISMO DI GRUPPO

MI INDUCE $df_e: \mathfrak{h} \xhookrightarrow[f_*]{} \mathfrak{g}$

IN GENERALE TEO $\forall f: H \to G$ MORFISMO DI GRUPPI DI LIE

$df_e =: f_*: \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ è UN MORFISMO DI ALGEBRE DI LIE.

DIM $v \in h$, $w \in h$ $\qquad f_*[v,w] = [f_* v, f_* w]$

$f_* v \in g \to X_{f_* v}$ campo invariante a sx $\in \mathcal{X}(G)$

$f_* w \in g \to X_{f_* w}$ campo invariante a sx $\in \mathcal{X}(G)$

$\Rightarrow X_v \in \mathcal{X}(H) \to f$ correlato a $X_{f_* v}$

$X_w \in \mathcal{X}(H) \to$ " " a $X_{f_* w}$

E quindi per il lemma tecnico si conservano i braket.

COROLLARIO: $H \hookrightarrow G$ immersione iniettiva

Allora $h \subseteq g$ è una sotto algebra. (con lo stesso braket)

In particolare $O(n) \subseteq gl(n,\mathbb{R})$ e il braket è sempre $[A,B] = AB - BA$

ESEMPIO $G = \mathbb{R}^n$ è un gruppo di Lie $g = \mathbb{R}^n$ e $[A,B] = 0$ (perché il gruppo è abeliano)

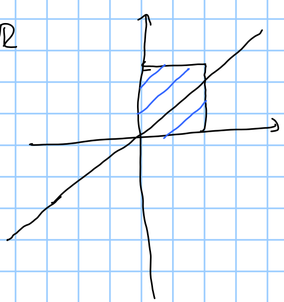
oss G, H g. di Lie $\Rightarrow G \times H$ è di Lie

S^1 Lie $\Rightarrow S^1 \times \dots \times S^1$ sono di Lie.

Sia $G = S^1 \times S^1$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (t, \lambda t) \\ & & \downarrow \pi \\ & & S^1 \times S^1 \\ & \searrow & (e^{t 2\pi i}, e^{\lambda t 2\pi i}) \end{array} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

È un'immersione e se $\lambda \notin \mathbb{Q}$ è iniettiva



Non è un embedding per densità.

LEZIONE 14

Titolo nota 29/03/2019

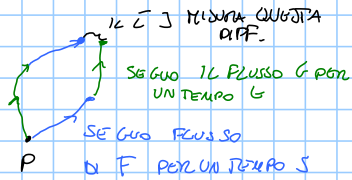
$X, Y \in \mathfrak{X}(M) \Rightarrow [X,Y] \in \mathfrak{X}(M)$

$X \rightsquigarrow \phi$ FLUSSO

$\Phi : U \longrightarrow M \qquad U \subseteq M \times \mathbb{R}$
$(p,t) \longrightarrow \phi(p,t) = \gamma_p(t)$

PROP $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, CON FLUSSI F e G, IN OGNI CARTA VALE

$$\underbrace{G_t \circ F_s(p) - F_s \circ G_t(p)}_{\text{È SENSATA SOLO IN CARTA}} = st[X,Y] + o(s^2+t^2)$$



DIM SI SCRIVE TAYLOR PAGINA DI CONTI (VEDI FIS-MAT)

DEF DUE CAMPI X,Y COMMUTANO SE $[X,Y]=0$

PROP DUE CAMPI COMMUTANO $\Longleftrightarrow$ COMMUTANO I FLUSSI.

DEF DUE FLUSSI COMMUTANO SE $G_t \circ F_s(p) = F_s \circ G_t(p) \quad \forall\ s,t,p$ DOVE ABBIA SENSO

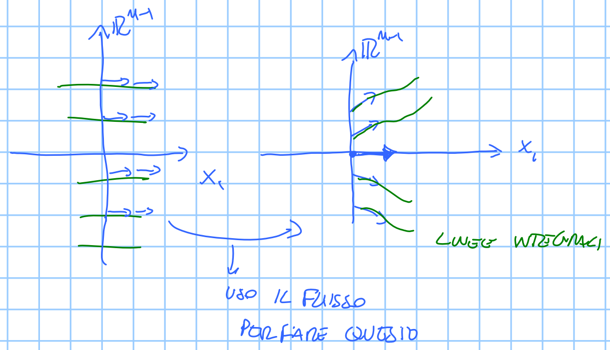
DIM $\Leftarrow$ OVVIO

$\Rightarrow$ (HO BISOGNO DI UN LEMMA)

LEMMA (DI RADDRIZZAMENTO) X CAMPO SU UNA VARIETÀ M, e $X(p) \neq 0 \Rightarrow \exists$ UNA CARTA CHE LO TRASFORMA LOCALMENTE IN $\frac{\partial}{\partial x^1}$ SU $\mathbb{R}^n$

DIM PROP A MENO DI RUOTARE E TRASLARE POSSO SUPPORRE $M = \mathbb{R}^n$

e $X(0) = \frac{\partial}{\partial x_1}$



SIA U UN APERTO SU CUI HA SENSO

$$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \longrightarrow \Phi\big((0, x_2, \dots, x_n), x_1\big)$$

VEDO x_1 COME LA NUOVA t

OSSERVO $(d\varphi)_0 = I$ PERCHÉ φ RISTRETTA ALL'IPERPIANO VERTICALE È L'IDENTITÀ

MENTRE $(d\varphi)_0(e_1) = e_1$ PER COME HO COSTRUITO φ.

QUINDI φ È UN DIFFEO LOCALE E UNA PARAMETRIZZAZIONE. $\varnothing$

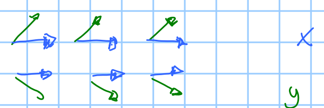
TORNANDO ALLA $\boxed{\Rightarrow}$ DELLA PROP

FISSATO p 1) SE $X(P)=0$ e $Y(P)=0$ $\Rightarrow$ F e G COMMUTANO PERCHÉ RESTANO IN O

2) SE $X(P) \neq 0$ ALLORA LOC $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$ e $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

$0 = [X, Y] = \frac{\partial Y}{\partial x^1}$ $\Rightarrow$ Y È COSTANTE LUNGO x_1 $\Rightarrow$ F e G COMMUTANO LOCALMENTE

PERCHÉ



Y NON CAMBIA LUNGO TRASLAZIONI LUNGO X

OSS PER LA COMMUTAZIONE GLOBALE BASTA DIVIDERE IL TEMPO IN INTERVALLINI DOVE LOCALMENTE F e G COMMUTANO.

LEMMA (RADDRIZZAMENTO SIMULTANEO) $X_1 \dots X_k \in \mathfrak{X}(M)$

SUPPONIAMO $\exists\, p$ t.c. $X_1(P) \dots X_k(P)$ SONO INDIPENDENTI

$\exists$ UNA CARTA (LOCALE) CHE LI TRASFORMA IN CAMPI COORDINATI $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k}$

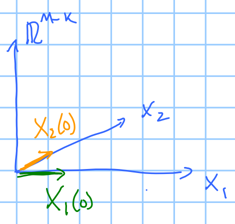
$\Leftrightarrow$ COMMUTANO $[X_i, X_j] = 0$ (OVUNQUE NON SOLO IN P)

$\Rightarrow$) POICHÉ IL $[\ ,\ ]$ È INVARIANTE PER DIFFEO E $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$

HO LA TESI

$\Leftarrow$) PRENDO UNA CARTA IN CUI $P = 0$ E A MENO DI CAMBIAMENTO DI BASE

PER LA INDIPENDENZA POSSO SUPPORRE $X_i(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}$



POICHÈ I FLUSSI COMMUTANO POSSO COSTRUIRE LA φ DI PRIMA USANDO STAVOLTA $\Phi^1, \dots, \Phi^k$ USO $\phi^i_t = \Phi^i(p,t)$ COME NOTAZIONE

$$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$x \longrightarrow \underbrace{\Phi^1_{x_1} \circ \dots \circ \Phi^k_{x_k}}_{\text{SONO TRANQUILLO PERCHÈ COMMUTANO}}(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_m)$$

COME PRIMA DEVO VEDERE 2 COSE

i) MANDA $(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_m) + te_i \longrightarrow$ NELLE LINEE INTEGRALI $\forall i = 1, \dots, k$

$$\varphi[(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_m) + te_i] \underset{\text{SI USA CHE COMMUTANO.}}{=} \phi^i_t(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_m)$$

ii) $(d\varphi)_0 = id$ ESATTAMENTE COME PRIMA.

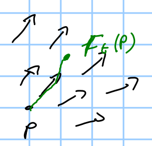
E QUINDI È UNA PARAMETRIZZAZIONE CHE RADDRIZZA

<u>DERIVATA DI LIE</u>

SE $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $s \in \Gamma\, \mathcal{T}^k_h(M)$, F_t FLUSSO DI X

$$\mathcal{L}_X s \in \Gamma\, \mathcal{T}^k_h(M)$$

$$(\mathcal{L}_X s)(p) = \frac{d}{dt} (F_{-t})_* s(F_t(p))\Big|_{t=0}$$



SOPRA $F_t(p)$ C'È UN TENSORE E LO VOGLIO RIPORTARE SOPRA P TRAMITE F_t^{-1} E LO PARAGONO CON QUELLO SU P

<u>RICORDA</u>

$$\left.\begin{array}{l} f : M \longrightarrow N \\ f_* : TM \longrightarrow TN \end{array}\right\} \text{INDUCE}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{e } df \;\; T_pM \longrightarrow T_{f(p)}M \\ \mathcal{T}^h_k(T_pM) \longrightarrow \mathcal{T}^h_k(T_{f(p)}M) \end{array}\right\} \text{INDUCE}$$

EX 1) $\mathcal{L}_X f = X f \qquad f \in C^\infty(M)$

2) $\mathcal{L}_X Y = [X, Y] \qquad Y \in \mathfrak{X}(M)$

3) $\mathcal{L}_X (s \otimes s') = (\mathcal{L}_X s) \otimes s' + s \otimes (\mathcal{L}_X s')$

FOLIAZIONI

DEF SE M È UNA VARIETÀ LISCIA, UNA k-FOLIAZIONE $\mathcal{F}$ È PARTIZIONE DI M IN SOTTOVARIETÀ di dim k IMMERSE INIETTIVAMENTE

TALE CHE LOCALMENTE $\forall p \in M \; \exists \varphi : U(p) : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k_x \times \mathbb{R}^{n-k}_y$ t.c. $\forall$ FOGLIA λ

$\varphi(\lambda \cap U_p) = \bigcup \{ y = c \in \mathbb{R}^{n-k} \}$ (SOTTOSPAZI AFFINI PARALLELI)

ABUSO DI NOTAZIONE SOTTOVARIETÀ IMMERSA è L'IMMAGINE DI UN'IMMERSIONE INIETTIVA

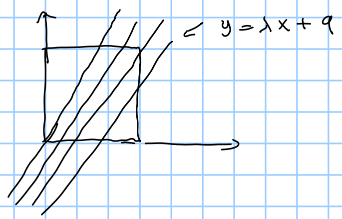
(ANCHE SE PUÒ NON ESSERE UNA SOTTOVARIETÀ)

ESEMPIO 0) $L \subseteq \mathbb{R}^n$ SOTTOSPAZIO AFFINE $\mathcal{F} = \{ L$ e i suoi TRASLATI $\}$

(QUI LE FOGLIE SONO ANCHE EMBEDDED)

1) $\lambda \in \mathbb{R}$ E PARTIZIONO IL TORO CON LE IMMAGINI DELLE RETTE $y = \lambda x + q$

CON LA SOLITA IMMERSIONE

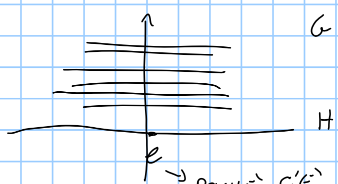


2) $\begin{array}{c} E \\ \pi \downarrow \\ M \end{array}$ FIBRATO $\qquad \mathcal{F} = \{ E_p = \pi^{-1}(p) \}_{p \in M}$ SONO UNA FOLIAZIONE CON FOGLIE EMBEDDED.

ESERCIZIO G GRUPPO DI LIE $\quad H < G$ sgr DI LIE

$\Rightarrow \mathcal{F} = \{ gH \}$ (CLASSI LAT. SX (o DX)) FORMANO UNA FOLIAZIONE

$gH = L_g H$



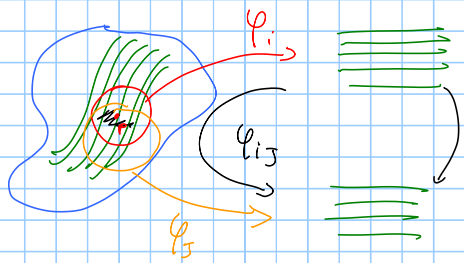
POICHÉ C'È L_g BASTA MOSTRARLO PER e.

DEF (ANALOGA) M VARIETÀ, UNA K-FOLIAZIONE È UN ATLANTE $\mathcal{U} : \{\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}\}$

TALI CHE $\varphi_{ij}(x,y) = \big(\varphi^1_{ij}(x,y), \underbrace{\varphi^2_{ij}(y)}_{\text{DIPENDE SOLO DA } y}\big)$ LOCALMENTE.

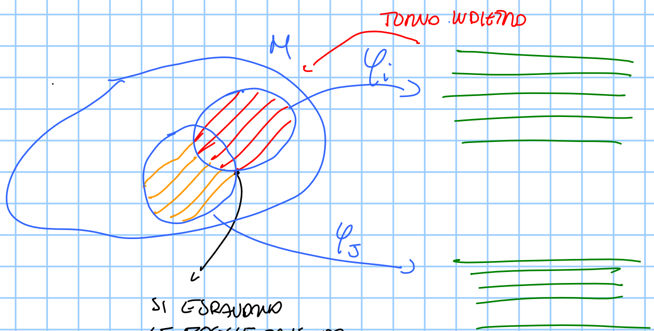
DEF 1) $\Rightarrow$ DEF 2) $\mathcal{F}$ COME PARTIZIONE $\forall p \; \exists \; \varphi : U(p) \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ COME PRIMA...

PRENDO $\mathcal{U} = \{\varphi : U(p) \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}\}$



OGNI COMPONENTE CONNESSA DOVE ANDARE NELLA COMP. CONNESSA E SONO COSE ORIZZONTALI E VANNO IN COSE ORIZZ. QUINDI DIPENDONO SOLO DA y SULLA SECONDA COMPONENTE

2) $\Rightarrow$ 1) SKETCH



SI ESPANDONO LE FOGLIE PASSANDO DA UN APERTO ALL'ALTRO E

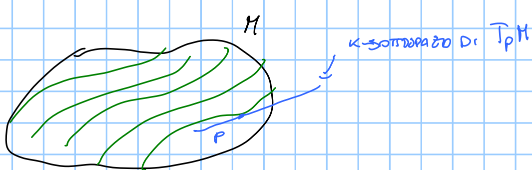
POI SI MOSTRA CHE SI OTTIENE UNA PARTIZIONE NUMERABILE DI FOGLIE.

DISTRIBUZIONE

M VARIETÀ, UNA K-DISTRIBUZIONE D È UN SOTTOFIBRATO DEL TANGENTE DI RANGO K

$D_p \subseteq T_pM$

ESEMPIO SE $\mathcal{F}$ È UNA FOLIAZIONE SU M, I K-SPAZI TANGENTI SONO UNA DISTRIBUZIONE

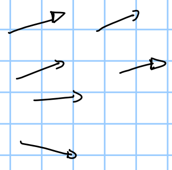


(È UN PO' COME FARE LA DERIVATA)

DEF UNA DISTRIBUZIONE È INTEGRABILE SE È OTTENUTA DA UN $\mathcal{F}$

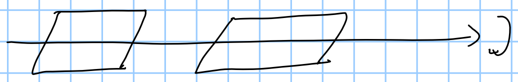
ESEMPIO UN CAMPO MAI NULLO, IN OGNI PUNTO MI DA LA DISTRIBUZIONE DATA DALLE RETTE IN P IN DIREZIONE $X(p)$

E LA FOLIAZIONE CHE MI DANNO È INTEGRABILE GRAZIE ALLE LINEE DI FLUSSO.



PRENDIAMO UNO "SPIEDINO" DI PIANI CHE RUOTA E LO TRASCO VERTICALMENTE IN $\mathbb{R}^3$

QUESTO NON È INTEGRABILE,



LEZIONE 15

Titolo nota 02/04/2019

RICORDIAMO $\mathcal{F}$ K-FOLIAZIONE 1) $\mathcal{F}=\{\lambda_i\}_{i\in I}$ loc BUONA

2) $A=\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$ CON φ_{ij} CON UN CERTO TIPO

D DISTRIBUZIONE → K-SOTTOFIBRATO DI TM (K-SOTTOSPAZI CHE SI MUOVONO IN MODO LISCIO)

$\mathcal{F} \longmapsto D$ PRENDENDO I TANGENTI DELLE FOGLIE (DERIVAZIONE).

DEF D È INTEGRABILE SE È È OTTENUTA DA UNA QUALCHE $\mathcal{F}$

TEO (FRÖBENIUS) D DISTRIBUZIONE SU M È INTEGRABILE ⟺ D È INVOLUTIVA

DEF D DISTRIBUZIONE DI M $X\in\mathfrak{X}(M)$ È TANGENTE A D SE $\forall p\in X$ $X(p)\in D_p$

D SI DICE INVOLUTIVA SE $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ TANGENTI ⟹ $[X,Y]\in\mathfrak{X}(M)$ È TANGENTE.

PROP D È INTEGRABILE ⟺ D È LOC. COSTANTE CIOÈ $\forall p\in M$ $\exists\ \varphi: U(p)\to\mathbb{R}^n$ CARTA CHE TRASPORTA $D|_U$ IN UNA DISTRIBUZIONE COSTANTE CIOÈ $\forall x$ HO $\underbrace{\{x_{k+1}=\dots=x_n=0\}}_{\text{LO STESSO SPAZIO DI DIM. } K.}$

OSS LA PROP ALLEGGERISCE LA NOZIONE DI INTEGRABILE (È RISTRETTA A D SENZA PASSARE DA $\mathcal{F}$)

DIM PROP ⟹) LA FOLIAZIONE HA LE CARTE CHE LA NORMALIZZANO ⟹ LE STESSE CARTE MANDANO D IN UNA COSA LOC COSTANTE

⟸) PRENDO UN ATLANTE FATTO CON LE φ SOPRA E OTTENGO LA DEFINIZIONE 2) DI FOLIAZIONE

DIM (FRÖB) D loc costante ⟺ D INVOLUTIVA

RICORDIAMO IN COOR. $X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ e $Y=Y^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ ⟹ $[X,Y]^j=X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}-Y^i\frac{\partial X^j}{\partial x^i}$

OSS ENTRAMBE LE COSE SONO INVARIANTI PER DIFFEOMORFISMO (PENSARE), QUINDI LE POSSO DIMOSTRARE IN CARTE.

$\Rightarrow$) Se X, Y tg. a D allora $[X,Y]$ tangente D è una cond. loc. allora lo mostro in carte.

Presi $X, Y \in D$ e $\forall p$ prendo una carta in cui D è costante

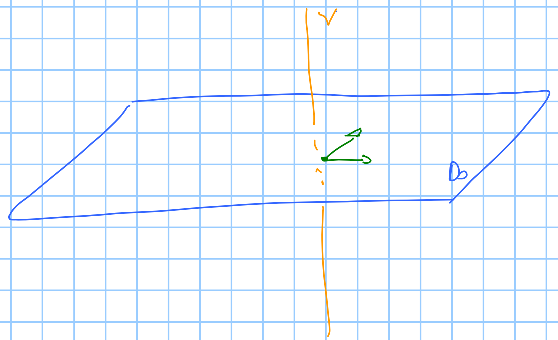
$\Rightarrow$ $X^i = Y^i = 0 \quad \forall\, i > k$ (perché D è un piano orizzontale).

$\Rightarrow$ $[X,Y]^i = 0 \quad \forall\, i > k \Rightarrow [X,Y]$ è tangente

$\Leftarrow$) Il fatto che la tesi è locale basta mostrarlo in $\mathbb{R}^n$.

Prendo carte t.c. $D_0 = \{x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}$ nell'origine.

Su $V = \{x_1 = \dots = x_k = 0\}$ (V è ortogonale a D_0)



Come abbiamo fatto per le Grassmanniane posso trovare $X_1, \dots, X_k$ frame locale per D

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=k+1}^{m} X_i^j \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{tangenti.}$$

$\Rightarrow [X_i, X_j]$ deve essere tangente.

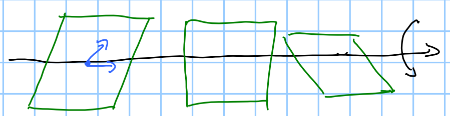
$[X_i, X_j]^\ell = 0 \quad \forall\, \ell = 1, \dots, k \Rightarrow [X_i, X_j](p) \in V$ e $[X_i, X_j](p) \in D_p \Rightarrow [X_i, X_j](p) = 0$

(ho usato che loc. V è in somma diretta con D_p a patto di prendere $U(p)$ piccolo)

Allora uso il teorema di raddrizzamento dove $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ (quindi costante)

quindi $D(p) = \text{span}(X_1(p) \dots X_k(p))$ è cost. orizzontale.

Usando lo spiedino di piani



$$D = \text{span}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}\right) \text{ non è integrabile.}$$

Corollario: Distribuzioni con $k = 1$ sono integrabili.

Dim: Le distribuzioni di rango 1 sono involutive. Usando

ESERCIZIO (UTILE) $[fX, gY] = fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$

X, Y CAMPI e $f, g \in C^\infty$

CONCLUDO $[fX, gY]_{(p)} \in \text{Span}(X(p), Y(p), [X,Y](p))$

SI DIMOSTRA CHE X e Y TANGENTI A D $\Rightarrow [X,Y]$ TANGENTI A D

SE UNO DEI DUE $X(p), Y(p) \neq 0 \Rightarrow X(p) = f(p)\, Y(p)$ PERCHÈ SONO SU UNA RETTA

$= [fY, Y](p) = h \cdot Y$ QUINDI È TANGENTE.

USANDO L'ESERCIZIO

PROP D DISTRIBUZIONE IN M È INVOLUTIVA $\Leftrightarrow \forall p \in M \ \exists X_1 \ldots X_k$ FRAME PER D

TALI CHE $[X_i, X_j]$ È TANGENTE A D.

DIM $\Rightarrow$) VERO $\forall$ FRAME QUINDI OVVIO

$\Leftarrow$) SIANO X, Y TANGENTI $\Rightarrow$ $X = f_1 X_1 + \ldots + f_k X_k$

$Y = g_1 X_1 + \ldots + g_k X_k$ (HO TOLTO I (p))

$\Rightarrow [X,Y] = \sum_{i,j} [f_i X_i, g_j Y_j] \in$ TANG. IN D.

$\text{Span}(X_i, Y_j, [X_i, Y_j]) \in \text{Tang } D$

VOGLIAMO APPLICARE IL TEOREMA DI FROBENIUS AI GRUPPI DI LIE.

DEF SE G È UN GRUPPO DI LIE, ALLORA $G^0 < G$ È LA COMPONENTE CONNESSA DI e.

PROP $G^0 \triangleleft G$ SGR DI LIE NORMALE.

DIM L_g, R_g $\forall g \in G$ $L_g : G \to G$ È UN DIFFEO QUINDI PERMUTA LE COMPONENTI CONNESSE. E MANDA LA COMPONENTE G^0 NELLA COMPONENTE CHE CONTIENE g

SE $g \in G^0$ $h \in G^0 \Rightarrow hg = L_h g \in G^0$ PERCHÈ $h \in G^0$ E QUINDI L_h MANDA G_0 IN SÈ

$L_{g^{-1}}$ MANDA LA COMP. CONNESSA DI g IN G.

ALLORA $g^{-1} \in G_0$ $L_{g^{-1}}\, g \to e$.

CONIUGIO $C_g : \begin{array}{l} G \longrightarrow G \\ h \longrightarrow g^{-1} h g \end{array}$ $\qquad C_g = \underbrace{L_{g^{-1}} \circ R_g}_{\text{COMMUTANO}}$ ISOMORFISMO

$\Rightarrow \quad C_g(G_0) = G_0$ PER STESSO MOTIVO DI CONNESSIONE. $(C_g(e) = e)$

PROP G, H GRUPPI DI LIE CONNESSI $f : G \longrightarrow H$ MORFISMO DI GRUPPO DI LIE.

f È UN RIVESTIMENTO $\Leftrightarrow f_* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ ISOMORFISMO.

(CIOÈ $df_e : T_e G \longrightarrow T_e H$ È ISOMORFISMO)

DIM $\boxed{\Rightarrow}$ OVVIA PERCHÉ RIVESTIMENTO $\Rightarrow df$ SEMPRE INVERTIBILE.

$\boxed{\Leftarrow}$ $df_e : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ $\quad \exists\, U(e_G) \quad V(e_H) \quad f|_U : U \longrightarrow V$ È UN DIFFEO (LOCALE).

$\forall g \in G \quad U(g) = L_g(U(e)) \quad e \quad V(h) = L_h V(e_H)$

X ESERCIZIO $\quad f^{-1}(V(h)) = \bigcup_{\substack{g \in G \\ f(g) = h}} U(g) \quad$ E POI $f|_{U(g)} \longrightarrow V(h)$ È DIFFEO

OSS LA CONNESSIONE SERVE PER AVERE IL RIVESTIMENTO DA

FATTO SE G È UN GRUPPO DI LIE CONNESSO, ESISTE UNA STRUTTURA DI GRUPPO DI LIE SU $\tilde{G}$ (RIVESTIMENTO UNIVERSALE)

(SOLLEVANDO I CAMMINI IN MODO GIUSTO DEFINISCO UN PRODOTTO SU $\tilde{G}$).

TEOREMA G UN GRUPPO DI LIE, $\forall\, \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ SOTTOALGEBRA $\exists!\, H < G$ DI LIE CONNESSO TALE CHE $T_e H = \mathfrak{h}$ ($H \subseteq G^0$ QUINDI NON SERVE G CONNESSO)

INTERPRETAZIONE

LA VOLTA SCORSA $f : G \longrightarrow H \dashrightarrow f : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ E DA QUESTO

ABBIAMO DEDOTTO $H < G \Rightarrow \mathfrak{h} < \mathfrak{g}$ (IL TEOREMA DICE CHE È POSSIBILE FARE IL CONTRARIO.)

DIM $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g} = T_e G$ SIA $\forall g \in G \quad D_g \subseteq T_g G \quad D_g = (dL_g)_e(\mathfrak{h})$

DIMOSTRIAMO CHE D È INVOLUTIVA $\quad X_1^{(e)}, \ldots, X_k^{(e)} \in T_e G$ VETTORI CHE GENERANO $\mathfrak{h}$

$\rightsquigarrow \quad X_i(g) = (dL_g)_e X_i(e)$ È UN FRAME PER D

PER IL COROLLARIO BASTA MOSTRARE CHE $[X_i, X_j]$ SONO TANGENTI PERCHÈ HO UN FRAME MA $[X_i, X_j](0) \in \mathfrak{h}$ QUINDI TANGENTE $\Rightarrow [X_i, X_j](p) \in D_p \ \forall p \in G$ (PERCHÈ $\mathfrak{h}$ È UNA SOTTOALGEBRA).

ALLORA POICHÈ D È INVOLUTIVA PER FROBENIUS $\exists$ $\mathcal{F}$ DI G FOLIAZIONE CON TANGENTI IN D $\Rightarrow$ H È L'UNICA FOGLIA CONTENENTE e.

H È UNA SOTTOVARIETÀ IMMERSA CONNESSA E $T_e H = \mathfrak{h}$

RESTA DA FAR VEDERE CHE $H < G$

<u>OSS</u> POICHÈ LA DISTRIBUZIONE È INVARIANTE PER MOLTIPLICAZIONE A SX ANCHE LA FOLIAZIONE LO È

QUINDI SE $h \in H$ $L_{h^{-1}}$ PERMUTA LE FOGLIE $\Rightarrow$ MANDA LA FOGLIA CHE CONTIENE h NELLA FOGLIA CHE CONTIENE e CHE È ANCORA H

CIOÈ $L_{h^{-1}}(H) = H$ $\forall h \in H$ E QUESTO BASTA PER DIRE $H < G$

<u>MAPPA ESPONENZIALE</u>

$$\left.\begin{array}{ccc} \overset{M(n,\mathbb{R})}{\overset{\parallel}{\mathfrak{gl}}}(n,\mathbb{R}) & \xrightarrow{\exp} & GL(n,\mathbb{R}) \\ A & \longrightarrow & e^A \end{array}\right] \text{CASO PARTICOLARE.}$$

<u>PROP</u> SIA G GRUPPO DI LIE, $X \in \mathfrak{g}$ CAMPO INVARIANTE A SINISTRA

ALLORA X È COMPLETO.

<u>DIM</u> SIA $\gamma_e : I_e \longrightarrow G$ CURVA MASSIMALE IN e PER X.

$$\gamma_e(0) = 0 \qquad \gamma_e'(t) = X(\gamma_e(t))$$

ANCHE LE CURVE SONO INVARIANTI A SINISTRA

$$\gamma_g : I_g \longrightarrow G \qquad I_g = I_e \longrightarrow$$

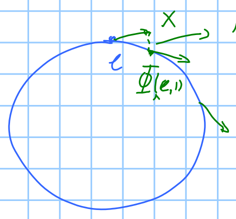
POICHÈ IL DOMINIO È LO STESSO USANDO IL LEMMA CHE $\exists \varepsilon_0$ PER TUTTI $\Rightarrow$ X È COMPLETO.

$$\gamma_g(t) = g \cdot \gamma_e(t)$$

QUINDI $\exists$ $\Phi_X : G \times \mathbb{R} \longrightarrow G$ FLUSSO

DEF $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ LISCIA

$X \longrightarrow \gamma_e^X(1) = \Phi_X(e,1)$

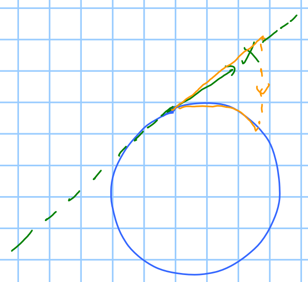


OSS NON È UN OMOMORFISMO DI GRUPPI.

$(e^A \cdot e^B \neq \exp(A+B)$ NELLE MATRICI$)$

OSS $\Phi_{\lambda X}(e,t) = \Phi_X(e, \lambda t)$

COROLLARIO FISSATO X LA MAPPA $\mathbb{R} \longrightarrow G$, $t \longrightarrow \gamma_e^{tX}(1)$ È LA LINEA INTEGRALE DI X CON DERIVATA $X(0)$ ED È UN MORFISMO DI GRUPPI.



DIM $\gamma_e^{tX}(1) = \gamma_e^X(t)$ QUESTO È UNA LINEA INTEGRALE

ALLORA $\gamma_e^X(t) \cdot \gamma_e^X(u) = L_{\gamma_e^X(t)}\, \gamma_e^X(s) = \gamma_e^X(t+u)$ DA VEDERE

DEF UN SOTTOGRUPPO AD UN PARAMETRO DI G GRUPPO DI LIE È UN MORFISMO DI $\mathbb{R} \longrightarrow G$

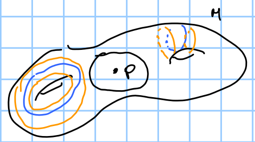
PROP I SOTTOGRUPPI A UN PARAMETRO SONO TUTTI DELLA FORMA SOPRA.

LEZIONE 16

Titolo nota 05/04/2019

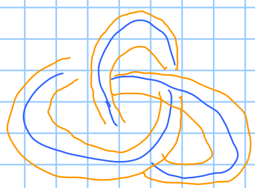
INTORNI TUBOLARI

$p \in M$ trovo $U(p) \cong \mathbb{R}^m$



$N \subseteq M$ sottovarietà

intorno di N dentro M "migliore"



$N \subseteq \mathbb{R}^3$

intorno "migliore"

DEF $N \subseteq M$ sottovarietà (vera non solo iniettivamente immersa ma embedded)

un intorno tubolare per N è un fibrato vettoriale $\begin{array}{c} E \\ \pi\downarrow \uparrow s_0 \\ N \end{array}$ con un embedding $N = s_0(N)$

$f: E \hookrightarrow M$ tale che

1) $f|_N = id|_N$ (dove identifico N con $s_0(N)$)

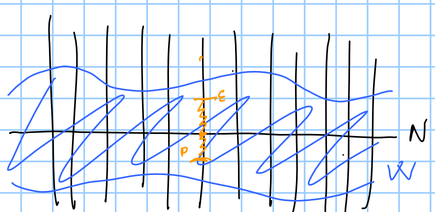
2) $f(E)$ è un intorno aperto di N in M

Cioè è un intorno aperto di N in M con la struttura di fibrato su N con N 0-sezione.

TEOREMA $\exists$ sempre un intorno tubolare con $E \cong \nu N$ (fibrato normale)

LEMMA (di strizzamento)

Sia $\begin{array}{c} E \\ \pi\downarrow \uparrow s_0 \\ N \end{array}$ W intorno di E



$\exists F: E \to W$ t.c.

1) $F|_N = id|_N$

2) $F(E_p) \subseteq E_p$

DIM LEMMA METTO UNA METRICA RIEMANNIANA SU E. $\exists\, \varepsilon : N \to \mathbb{R}_{>0}$ t.c. CONTINUA

$$\{ v \in \nu N \,,\, \|v\| < \varepsilon(\pi(v)) \} \subseteq W$$

$$F(v) = \frac{v}{\sqrt{1-\|v\|}} \cdot \varepsilon(\pi(v))$$

DIM TEO CASO 1 $M = \mathbb{R}^m$ e $N \subseteq \mathbb{R}^m$

$$\nu N = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \{ (p,v) \mid p \in N,\ v \in \nu_p N = T_pN^\perp \}$$

$(\nu N) \to N^n$, $rk = m-n$

$\dim(\nu N) = m$

νN HA BASE DI DIMENSIONE n E LA FIBRA È $m-n$

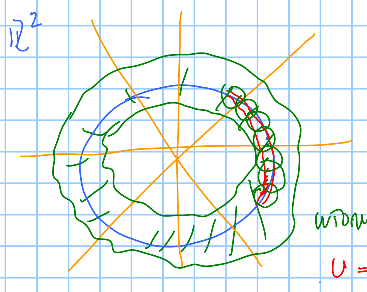
$$\nu N \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$$
$$(p,v) \longrightarrow p+v$$
$$(p,0) \longrightarrow p$$

$T_{(p,0)}\nu N = T_pN \times T_pN^\perp \longrightarrow$ IDENTIFICATI NELLO STESSO $\mathbb{R}^m$

$T_pN \oplus T_pN^\perp = \mathbb{R}^m$

$df_{(p,0)} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ È L'IDENTITÀ. IN PARTICOLARE È UN DIFFEO LOC $\forall p \in N$. VORREI QUINDI FOSSE UN EMBEDDING IN UN INTORNO DI N.

ESERCIZIO $\exists\, \varepsilon : N \to \mathbb{R}_{>0}$ t.c. $f|_{B(p,\varepsilon(p))}$ È UN DIFFEO CON L'IMMAGINE.



$\nu N \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ $f : \nu N \to \mathbb{R}^2$, $(p,v) \mapsto p+v$

SIA $U \subseteq \nu N$ $V = \{ (p,v) \subseteq U \mid \|v\| \leq \frac{\varepsilon(p)}{2} \}$

DICO CHE $f : V \to \mathbb{R}^m$ È UN'IMMERSIONE, INIETTIVA (NON SCONTATA PERCHÉ IL TEO VALE ANCHE PER VARIETÀ NON COMPATTE)

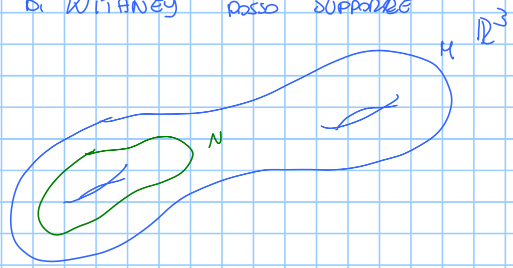
SEMPRE + PICCOLI

$N \subseteq U \subseteq \nu N$ PER LO STIRAMENTO $F : \nu N \to U$

CONCLUDO CON $f \circ F : \nu N \to \mathbb{R}^m$ INTORNO TUBOLARE DI N.

CASO 2 M QUALSIASI, PER IL TEOREMA DI WITHNEY POSSO SUPPORRE

CHE $M \subseteq \mathbb{R}^k$ e $N \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^k$



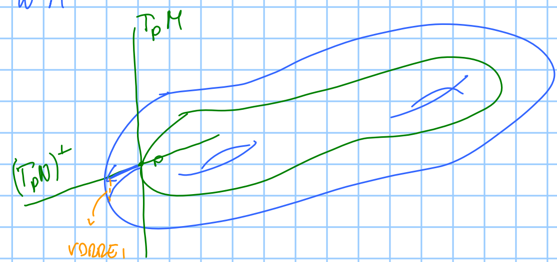
GRAZIE AL CASO $M \subseteq \nu M \subseteq \mathbb{R}^k$ INTORNO TUBOLARE DI M.

$\nu N \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$

$$\nu N = \{(p, v) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k : p \in N, v \in (T_pM \cap T_pN^\perp)\}$$

$\hookrightarrow$ FIBRATO NORMALE DI N IN M

$f : \nu N \to \mathbb{R}^k$
$(p, v) \to (p+v) \notin M$ A PRIORI



PROIETTARLO SU M $\to$ I FIBRATI MI PERMETTONO DI FARLO IN MODO CANONICO

SIA $W = f^{-1}(\nu M)$ (VETTORI DENTRO L'INTORNO TUBOLARE DI M) $\pi : \nu M \to M$

$$\nu N \supseteq W : \xrightarrow{f} \nu M \xrightarrow{\pi} M$$

F

OSS W CONTIENE LA ZERO SEZIONE (N)

$\Rightarrow dF_{(p,0)} = id$ E QUINDI È COME PRIMA

DEF SIANO $N^n \subseteq M^m$ SOTTOVARIETÀ

$i_0 : E_0 \hookrightarrow M$, $E_0 \downarrow N$; $i_1 : E_1 \hookrightarrow M$, $E_1 \downarrow N$ INTORNI TUBOLARI SONO ISOTOPI SE

ESISTE UN'ISOTOPIA $F_t : E_0 \hookrightarrow M$, $E_0 \downarrow N$ (CONTINUA DI t)

IN MODO CHE F_t È UN'INTORNO TUBOLARE $\forall t$ tc.

1) $F_0 = i_0$

2) $F_1 = i_1 \circ \psi$ e $\psi : E_1 \xrightarrow{\sim} E_0$ ISOMORFISMO (con $E_1 \to N$, $E_0 \to N$)

OSS ISOTOPI $\Rightarrow$ ISOMORFI.

TEOREMA $N \subseteq M$ GLI INTORNI TUBOLARI DI N SONO TUTTI ISOTOPI ($\Rightarrow$ ISOMORFI)

LEMMA (VEDI DI GTD) $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ EMBEDDING $\Rightarrow$ È ISOTOPO A df_0
$f(0)=0$

DIM LEMMA $F_t(v) = \dfrac{f(tv)}{t}$ $F_0(v)$ NON HA SENSO

$f(x) = g_1(x)x_1 + \dots + g_n(x)x_n$ $F_t(v) = g_1(tx)x_1 + \dots + g_n(tx)x_n$ È BEN DEFINITA IN $t=0$

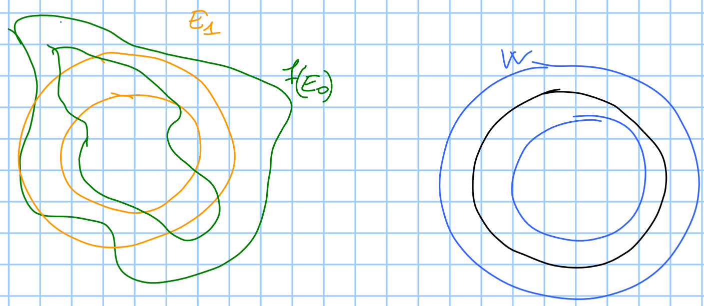
e $F_0 = df_0$

$g_i(0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(0)$

DIM TEO

$$\begin{array}{ccc} E_0 \overset{f}{\hookrightarrow} M & \quad & E_1 \hookrightarrow M \\ \downarrow & & \downarrow \\ N & & N \end{array} \qquad N \subseteq E_1 \subseteq M$$

a) POSSO SUPPORRE $f(E_0) \subseteq E_1$ SIA $W = f^{-1}(E_1)$ È UN APERTO CHE CONTIENE N



$\Rightarrow g : E_0 \to W$ STRIZZAMENTO

SOSTITUISCO f CON $f \circ g$ $(E_0) \subseteq E_1$

LA COSA È SENSATA DATO CHE f e $f \circ g$ SONO ISOTOPE PERCHÉ

LEMMA GLI STRIZZAMENTI DEFINITI PRIMA (QUELLI CON ε) SONO ISOTOPI ALL'IDENTITÀ. E PER QUELLI VALE CHE

$$g_t : E_0 \to E_0$$
$$v \to tv + (1-t)V$$

b) $f(E_0) \subseteq E_1$ ADESSO POSSO FARE COME PRIMA SU $\mathbb{R}^n$

DEFINISCO $F_t : E_0 \to E_1$

$v \longrightarrow \dfrac{f(tv)}{t}$

(NEL SENSO $v=(p,v)$ e $tv=(p,tv)$)

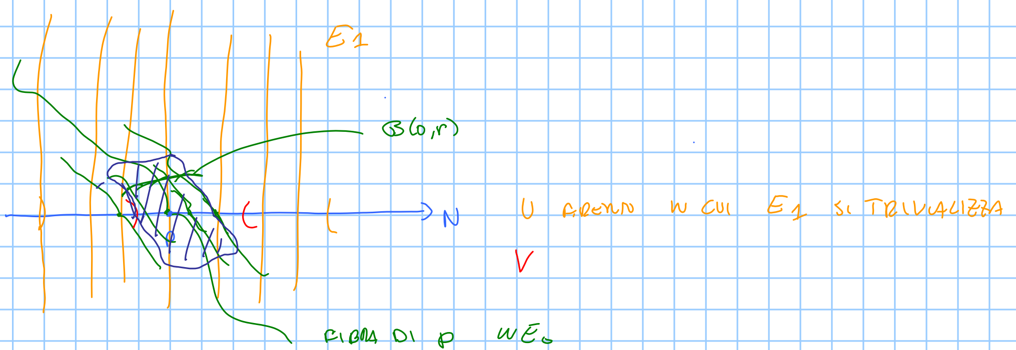
$v \in E_0 \Rightarrow tE_0$ HA SENSO IN E_0

$f(tv) \in E_1 \Rightarrow$ HA SENSO DIVIDERLO PER t

$F_1 = id$

TESI $F_0 =$ HA SENSO ED È UN ISOMORFISMO DI FIBRATI $F_0 : E_0 \to E_1$ su N

OSS $F_t(p,0) = (p,0)$ QUINDI LA ZERO SEZIONE VA NELLA ZERO SEZIONE PERCHE f È L'IDENTITÀ SU N.



PER CONTINUITÀ DI f $\exists\, V \subseteq U$ CHE TRIVIALIZZA $E_0\big|_V = V \times \mathbb{R}^{m-n}$

$\exists\, r>0$ tc $\underline{f(V \times \mathcal{B}(0,r))} \subseteq U \times \mathbb{R}^{m-n}$

$f : V \times \mathcal{B}(0,r) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^{m-n}$ ($\mathcal{B}(0,r) \subseteq \mathbb{R}^{m-n}$)

$f(x,0) = (x,0) \quad \forall p \in V$

VOGLIO FARE TAYLOR NELLE SECONDE COORDINATE.

$F(t) : (x,y) \to \left(f_1(x,ty), \dfrac{f_2(x,ty)}{t}\right)$

$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$

$f_2(x,y) = g_1(x,y)\, y_1 + \dots + g_{m-n}(x,y)\, y_{m-n}$

TAYLOR IN $(x,0)$

OSS LE MOL. E DIV PER t AGISCONO SOLO SULLE COMP. VETTORIALI DI (x,y) CIOÈ SOLO SU y.

$$F_0(x,y) = \Big(\underset{\substack{\| \\ x}}{f_1(x,0)},\ \underbrace{g_1(x,0)\,y_1 + \dots + g_{m-n}(x,0)\,y_{m-n}}_{\frac{df_2}{\partial y}(0)} \Big)$$

$F_0(x,y)$ È DRITTO $\underbrace{(x,*) \longrightarrow (x,\circ)}_{\text{COSE CHE STANNO SOPRA LO STESSO } x}$ E LO FA IN MODO LINEARE

E F_0 è INVERTIBILE PER AVERE CHE è UN ISOMORFISMO DI FIBRATI.

MA $df = \begin{pmatrix} I & * \\ 0 & \frac{df_2}{\partial y} \end{pmatrix}$ f è UN EMBEDDING $\Rightarrow \frac{df}{\partial y}$ È INVERTIBILE

<u>COROLLARIO</u> M VARIETÀ CONNESSA, $f,g : \mathbb{R}^m \hookrightarrow M$ EMBEDDING QUALSIASI

SONO SEMPRE ISOTOPI A MENO DI PRECOMPORRE UNA DELLE 2 CON UNA

RIFLESSIONI ($g \sim g \circ r$ $r : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ RIFLESSIONE)

<u>DIM</u> 1) POSSO SUPPORRE $f(0) = g(0)$

ALTRIMENTI $f(0) = p \neq q = g(0)$ ESISTE ISOTOPIA AMBIENTE

$F_t : M \to M$ DIFFEO CON $F_0 = id$ e $F_1(p) = F_1(f(0)) = q = g(0)$

$\Rightarrow$ CAMBIO f CON $f_1 = F_1 \circ f$ e $f_1(0) = g(0)$

$f : \mathbb{R}^m \hookrightarrow M$ EMBEDDING è UN INTORNO TUBOLARE DI $f(0)$

$\downarrow$ FIBRATO SU $\{\cdot\}$

$\{0\}$

QUINDI f, g SONO ISOTOPI A MENO DI

PRECOMPORRE CON ISOMORFISMO DI FIBRATI φ

$f \sim g \circ \varphi$ $\varphi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ISOMORFISMO LINEARE.

$\varphi \in GL(m, \mathbb{R})$ HA 2 COMPONENTI CONNESSE $\Rightarrow$ φ è ISOTOPO ALL'ID SE STA NELLA COMP. CONNESSA DELL'ID

O φ è ISOTOPO A r.

LEZIONE 17

Titolo nota 09/04/2019

TEOREMA (VOLTA SCORSA)

$M \subseteq N$ SOTTOVARIETÀ EMBEDDED, ESISTE UNICO INTORNO TUBOLARE $\simeq \nu M$ IN N

E L'UNICITÀ È A MENO DI ISOTOPIA.

PROP $f : M \to N$ CONTINUA TRA VARIETÀ LISCE e $S \subseteq M$ CHIUSO $f|_S$ LISCIA

$\Rightarrow \exists\, g : M \to N$ tc $g|_S = f|_S$ e g è LISCIA E OMOTOPA A f.

DIM GIÀ VISTO CON $N = \mathbb{R}^n$

USANDO WHITNEY $N \subseteq \mathbb{R}^k$ $\Rightarrow$ $f : M \to N \subseteq \mathbb{R}^k$ $\Rightarrow g : M \to \mathbb{R}^k$ $g|_S = f|_S$

g LISCIA (MA g PUÒ USCIRE DA N MA SE M. RICORDO CHE DIPENDE DA ε)

SIA νN INTORNO TUBOLARE

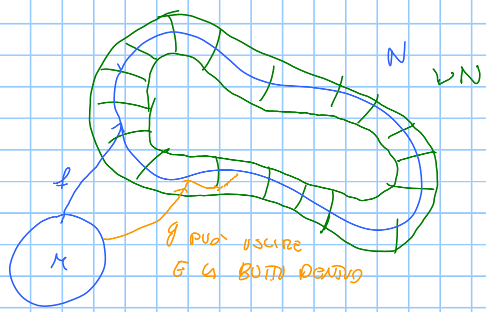
ESISTE UNA FUNZIONE $\varepsilon : N \to \mathbb{R}_{>0}$

tc $B(q, \varepsilon(q)) \subseteq \nu N$

CHIAMO $\varepsilon' : M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{R}_{>0}$

ADESSO LA g LA POSSO ESTENDERE

IN MODO CHE $|f(x) - g(x)| < \varepsilon'(x)$



$$\Rightarrow \quad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & \nu N \\ & \searrow^{g' = \pi \circ g} & \downarrow \pi \\ & & N \end{array}$$

e $g'|_S = g|_S = f|_S$ e g' è LISCIA

INOLTRE CERCO G_t OMOTOPIA tc $G_0 = f$ e $G_1 = g'$

$G_t = \pi \circ \big(t g + (1-t) f \big)$ FUNZIONA $\checkmark$ $t g(x) + (1-t) f(x) \in B \subset \nu N$

E SU S CONTINUA A VALERE L'IDENTITÀ.

COROLLARIO $f, g : M \to N$ LISCE f OMOTOPA A g IN SENSO CONTINUO $\Leftrightarrow$ SE LO SONO IN SENSO LISCIO

DIM $\Leftarrow$) OVVIO $\Rightarrow$) $F_t : M \times [0,1] \to N$ OMOTOPIA CONTINUA, ESTENDO PER CONTINUITÀ:

$F_t : M \times \mathbb{R} \to N$ IN MODO CONTINUO

$S = M \times \{0,1\}$ $\quad F|_S$ LISCIA PERCHÉ f e g SONO LISCE

$\Rightarrow \exists\, F' : M\times[0,1] \to N$ LISCIA t.c. $F'|_S = F|_S$

DEF (X, τ) SPAZIO TOPOLOGICO $\quad \forall k \geq 0 \quad \pi_k(X) = \{ f : S^k \to X \}/_{\text{omotopia}}$

$k \geq 1$ È UN GRUPPO, ($k=1$ È IL GRUPPO FONDAMENTALE)

PROP $\pi_k(S^m) = \{e\}$ SE $k < m$

DIM $f: S^k \to S^m$ CONTINUA, f È OMOTOPA A g LISCIA $\Rightarrow$ g NON È SURIETTIVA

$\Rightarrow \exists\, \infty \in S^m$ e $\infty \notin \operatorname{Img} g \Rightarrow S^m \setminus \{\infty\} \cong \mathbb{R}^m$ (MAPPA STEREOGRAFICA) $\quad g: S^k \to \mathbb{R}^m \Rightarrow g \sim$ PUNTO

OSS (NO DIM) $\pi_m(S^m) = \mathbb{Z}\ \forall m, \quad \pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$ (CI STA LA FIBRAZIONE DI Höpf È UN GENERATORE)

TRASVERSALITÀ

DEF V SPAZIO VETTORIALE, U e W SOTTOSPAZI SONO TRASVERSI SE $U+W=V$

DEF $f: M \to N \quad g: W \to N$ LISCE (STESSO CODOMINIO) SONO TRASVERSE SE

$\forall p \in M, \forall q \in W$ t.c. $f(p) = g(q)$.

ALLORA $\operatorname{Img} df_p + \operatorname{Img} dg_q = T_{\underset{g(q)}{\overset{f(p)}{}}} N$ SI INDICA $f \pitchfork g$

DEF $f: M \to N$ e $S \subseteq N$ SOTTOVARIETÀ, f È TRASVERSA A S

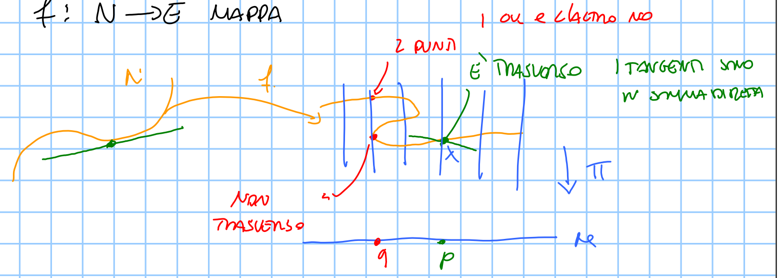
$f \pitchfork S$ SE $f \pitchfork i_S$ DOVE $i_S : S \hookrightarrow N$

DEF $W, S \subseteq N$ SOTTOVARIETÀ SONO TRASVERSE $W \pitchfork S$ SE $i_W \pitchfork i_S$

PROP $\begin{array}{c} E \\ \downarrow \pi \\ M \end{array}$ FIBRATO QUALSIASI, $f: N \to E$ MAPPA

$p \in M$ ALLORA $f \pitchfork E_p$

$\Leftrightarrow$ p È VALORE REGOLARE PER $f \circ \pi$



DIM (IDEA) DAL DISEGNO SI VEDE CHE $f \pitchfork E_p$ SE IL TANGENTE DI UN PUNTO DI N VA

IN UN TRASVERSO DI E_p $\Rightarrow$ COMPONENDO CON π LA MAPPA HA DIFF. SURIETTIVO

(PERCHÉ $\operatorname{Ker} \pi_x = E_p$) (VEDERE LIBRO PER DETTAGLI)

PROP $f: M \to N$ e $W \subseteq N$ SOTTOVARIETÀ, $f \pitchfork W \Rightarrow f^{-1}(W) \subseteq M$ È UNA SOTTOVARIETÀ DI M CON LA STESSA CODIMENSIONE DI W

DIM SE $W = \{p\} \subseteq N$ $\quad f \pitchfork \{p\} \iff \forall q \in M$ tc $f(q) = p$

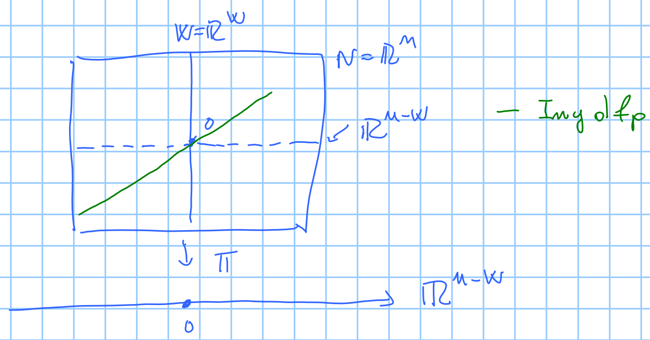
$$\mathrm{Img}\, df_q + \{e\} = T_p N$$

$\iff$ p è VALORE REGOLARE

SE p è REGOLARE $\Rightarrow$ LOCALMENTE f È UNA SOMMERSIONE $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^h \to \mathbb{R}^k$ E LA SUA CONTROIMMAGINE È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE QUINDI UNA VARIETÀ.

LA TESI È TUTTA LOCALE CIOÈ: $\forall p \in Z = f^{-1}(W)$ $\exists U(p) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^m$ e $Z \cap U \to L$ LINEARE

$\forall p \in Z$, $q = f(p) \in W \subseteq N$ LOC. POSSO SUPPORRE $W = \mathbb{R}^w$ e $N = \mathbb{R}^n$



POICHÉ $f \pitchfork W \Rightarrow$ $\mathrm{Img}\, df_p + T_q W = \mathbb{R}^n = T_q N$

$\iff 0 \in \mathbb{R}^{n-w}$ è VALORE REGOLARE PER $\pi \circ f$

$\Rightarrow$ $f^{-1}(W) = (\pi \circ f)^{-1}(0)$ È QUINDI SE 0 è VALORE REGOLARE $\Rightarrow f^{-1}(W)$ è UNA VARIETÀ, e $n-w$ è LA CODIMENSIONE

IN PARTICOLARE 2 SUPERFICI IN $\mathbb{R}^3$ SONO TRASVERSE $\Rightarrow$ SI INCONTRANO IN CURVE.

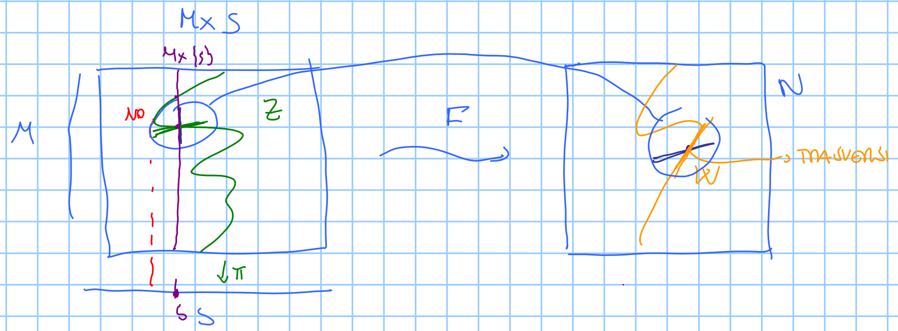
TEOREMA DI TRASVERSALITÀ DI THOM (MATEMATICO FIELD ANNI '60)

$F: M \times S \longrightarrow N \supseteq W$ SOTTOVARIETÀ.

SE $F \pitchfork W \Rightarrow F_s \pitchfork$ A W PER QUASI OGNI $s \in S$

DOVE $F_s: M \longrightarrow N$ (UNA SPECIE DI OMOTOPIA GENERALIZZATA).
$p \longrightarrow F(p,s)$

IDEA DIM $Z = F^{-1}(W) \subseteq M \times S$ SOTTOVARIETÀ



TESI SE $s \in S$ È VALORE REGOLARE PER $\pi|_Z$ ALLORA $F_s \pitchfork W$

C'È DA SCRIVERE BENE CHE I TANGENTI FANNO LE COSE GIUSTE (X DETTAGLI VEDERE IL LIBRO).

COROLLARIO $f: M \to \mathbb{R}^n$ e $W \subseteq \mathbb{R}^n$ SOTTOVARIETÀ, $f_s(x) \to f(x)+s$ $s \in \mathbb{R}^n$

ALLORA PER QUASI OGNI s $f_s \pitchfork W$

DIM $F: M \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ È TRASVERSA A W PERCHÉ F È UNA
$(x,s) \longrightarrow f(x)+s$ SOMMERSIONE PER COSTRUZIONE
$dF_{(x,s)} = [\quad | Id]$ È SURIETTIVO.

QUINDI VALE TOHM

COROLLARIO Z, W SOTTOVARIETÀ IN $\mathbb{R}^n$ PER QUASI OGNI $s \in S$ $(Z+s) \pitchfork W$

OSS $\dim(Z) + \dim(W) < \mathbb{R}^n$ ALLORA $Z \pitchfork W \Leftrightarrow Z \cap W = \emptyset$

IN $\mathbb{R}^3$ 2 CURVE (GROVIGLI) BASTA TRASLARNE UNA PER SEPARARLE.

PER PASSARE DA $\mathbb{R}^m$ A VARIETÀ QUALSIASI SI USA EMBEDDING DI WHITNEY + INTORNO TUBOLARE

COR $f: M \to N$, $W \subseteq N$ ESISTE $g\, M \to N$ OMOTOPA A f TC $g \pitchfork W$

DIM $f: M \to N \subseteq \mathbb{R}^k$ (WITHNEY) $N \subseteq \nu N \subseteq \mathbb{R}^k$ $\varepsilon: N \to \mathbb{R}_{>0}$ tc $B(x, \varepsilon(x)) \subset \nu N$

$F: M \times B(0,1) \to N \subseteq \mathbb{R}^k$ $B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^k$

$(p, s) \to \pi\left(f(p) + \underbrace{s \cdot \varepsilon(f(p))}_{\text{STO DENTRO } \nu N}\right)$

dF DOVREBBE ESSERE SURIETTIVO (COMP. DI DIFFERENZIALI SURIETTIVI)

PER TOHM CONCLUDO.

LEZIONE 18

Titolo nota 11/04/2019

VARIETÀ CON BORDO

DEF X SPAZIO TOPOLOGICO, UNA CARTA È UN OMEOMORFISMO $\varphi : U \to V$ $U \subseteq X$, $V \subseteq \mathbb{R}^n_+$

CON $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$

DEF UN ATLANTE LISCIO È $\{\varphi : U_i \to V_i\}$ TC. φ_{ij} È LISCIA E $\bigcup U_i = X$

DEF UNA VARIETÀ CON BORDO È UNO SP. TOPOLOGICO CON UN ATLANTE LISCIO

DEF SE M È UNA VARIETÀ CON BORDO, IL BORDO

$$\partial M = \{x \in M \mid \varphi(x) \in \partial\mathbb{R}^+_m = \{x_n = 0\}\}$$

PER QUALCHE φ

EX BASTA ANCHE UNA CARTA $\Rightarrow$ TUTTE VERIFICANO LA STESSA COSA

OSS SE M HA DIMENSIONE n ALLORA ∂M HA IN MODO NATURALE UNA STRUTTURA DI VARIETÀ $(n-1)$-DIMENSIONALE.

DIM BASTA PRENDERE L'ATLANTE DI M RISTRETTO A ∂M E IDENTIFICARE $\{x_n = 0\}$ CON $\mathbb{R}^{n-1}$

OSS $\partial(\partial M) = \emptyset$

DEF M VARIETÀ SENZA BORDO, UN DOMINIO REGOLARE $D \subseteq M$ È UN SOTTOINSIEME TALE CHE $\forall x \in D$ $\exists\, \varphi : U(x) \to V \subseteq \mathbb{R}^n$

TC $\varphi(U \cap D) = \mathbb{R}^n_+ \cap V$

PROP $D \subseteq M$ DOMINIO REGOLARE, È IN MODO NATURALE UNA VARIETÀ CON BORDO

DIM L'ATLANTE È DATO DALLE CARTE SOPRA. E OSSERVARE CHE $V \cap \mathbb{R}^n_+$ È APERTO IN $\mathbb{R}^n_+$

DEF LA PARTE INTERNA DI N (VARIETÀ TOPOLOGICA) $\Rightarrow$ $\operatorname{int} N = N \setminus \partial N$

PROP M VARIETÀ SENZA BORDO, $f: M \to \mathbb{R}$ x_0 VALORE REGOLARE.

SIA $D = f^{-1}((-\infty, x_0])$ È UN DOMINIO REGOLARE CON BORDO $f^{-1}(x_0) = \partial D$

DIM $x \in D$ SE $f(x) < x_0 \Rightarrow U(x) \subseteq D$

PRENDO UNA QUALSIASI CARTA E SPOSTARLA IN MODO CHE $\varphi(U(x)) \subsetneq \mathbb{R}^m_+$

SE $f(x) = x_0$ MA x_0 È VALORE REGOLARE $\Rightarrow f$ È UNA SOMMERSIONE,

ALLORA LOCALMENTE $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_m) \to x_m$ $\Rightarrow D$ È LOC $= \{x \mid x_m \leq x_0\}$

A MENO DI CAMBIARE f CON $f - x_0$ $x_m \leq 0$

ESEMPIO $D^m \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\|^2 \leq 1\} = f^{-1}(-\infty, 1]$ $f(x) = \|x\|^2$ È DOMINIO IN $\mathbb{R}^m$

e $\partial D^m = S^{m-1}$

DEF T_pM DEFINITO CON LE DERIVAZIONI FUNZIONA ANCHE SUL BORDO

MENTRE CON LE CURVE AVREI SOLO METÀ SPAZIO.

PROP $T_p \partial M$ È UN SOTTOSPAZIO DI T_pM PER $p \in \partial M$

FIBRATI CON BASE M

$$\begin{array}{ccc} E & & U \times \mathbb{R}^m \\ \downarrow & & \downarrow \\ M \ni p & & U(p) \end{array}$$

AD ESEMPIO $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$

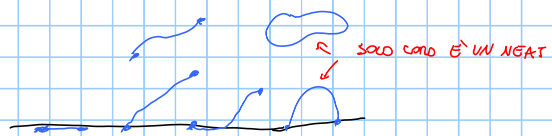
DEF $f: M \to N$ (EVENTUALMENTE CON BORDO)

$\forall p \in M$ $df_p: T_pM \to T_{f(p)}N$ È BEN DEFINITO

E LE DEFINIZIONI DI IMMERSIONE E EMBEDDING (E ANCHE SOMMERSIONE) FUNZIONI

DEF N VARIETÀ (EVENTUALMENTE CON BORDO) UNA SOTTOVARIETÀ È L'IMMAGINE DI UN EMBEDDING $f: M \hookrightarrow N$ (M QUALSIASI)

ESEMPI $M = [0,1]$ $N = \mathbb{R}^2_+$

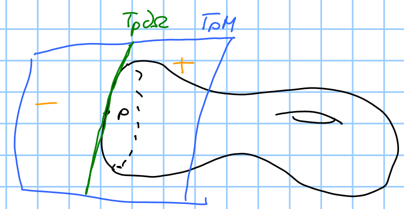


DEF Una sottovarietà $M \subseteq N$ è un **neat** se

1) $\partial M = M \cap \partial N$ e $M \pitchfork \partial N$

OSS ∂M è sottovarietà di M.

ORIENTAZIONE Se M è orientata, ∂M riceve un'orientazione indotta.



DEF $v \in T_pM$ è esterno se

$v_1 \dots v_{m-1} \in T_p\partial M$ base è positiva

se $v\, v_1 \dots v_{m-1} \in T_pM$ è positiva

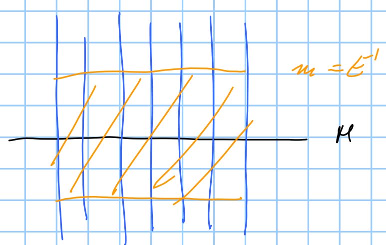
Questa delle 4 convenzioni possibili si chiama $\boxed{\text{OUTWARD FIRST}}$

quello fuori — messo come primo.

FIBRATI IN DISCHI

$E \to M$ rango k, metrica riemanniana su E e $E' \subseteq E$

$E' = \{ v \mid \|v\| \leq 1 \}$ $\qquad E'_p \subseteq E_p \cong$ Disco D^k



ESERCIZIO E' è un dominio regolare di E (basta mostrare che $\|x\|$ ha uno come valore regolare su E) quindi una sottovarietà con bordo.

DEF Intorno tubolare compatto, $N \subseteq M$ entrambe senza bordo

$N \subseteq \nu N \subseteq M$ fissando una metrica riemanniana su νN ottengo

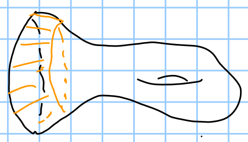
$N \subseteq \bar{\nu} N \subseteq \nu N \subseteq M \qquad \bar{\nu} N = \{ v \in \nu N \mid \|v\| \leq 1 \}$

ESERCIZIO Se N è compatto allora $\bar{\nu} N$ è compatto ed è l'intorno tubolare compatto.

OSS L'intorno tubolare non si estende facilmente a varietà con bordo.

COLLARE DEL BORDO

DEF M VARIETÀ CON BORDO, UN COLLARE PER M È UN EMBEDDING f DI $\partial M \times [0,1] \hookrightarrow M$ TC $f(x,0) = x$ LA CUI IMMAGINE È UN INTORNO DEL BORDO



TEOREMA (NO DIM) $\exists!$ COLLARE A MENO DI ISOTOPIA (BISOGNEREBBE RIADATTARE LA DIMOSTRAZIONE DI ESISTENZA E UNICITÀ DELL'INTORNO TUBOLARE).

INCOLLAMENTO DI VARIETÀ PER IL BORDO

M, N CON BORDO E $\varphi : \partial M \to \partial N$ DIFFEOMORFISMO

IN TOPOLOGIA SAREBBE FACILE $X = M \sqcup N /_{\sim}$ $p \sim \varphi(p)$

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE X È UNA VARIETÀ TOPOLOGICA (LA STRUTTURA LISCIA NON È OVVIA)

STRADA ALTERNATIVA: USARE I COLLARI.

HO $\partial M \times [0,1]$ E $\partial N \times [0,1]$

ALLORA $X = (M \setminus \partial M) \sqcup (N \setminus \partial N) /_{\sim}$

$$(p,t) \sim (\varphi(p), 1-t) \qquad t \in (0,1)$$

FATTO IN DIMENSIONE $m \geq 7$ ESISTONO VARIETÀ OMEOMORFE MA NON DIFFEOMORFE A S^m E SONO FINITE $\forall m$. QUESTE VARIETÀ SI CHIAMANO SFERE ESOTICHE. SI OTTENGONO TUTTE ATTACCANDO 2 DISCHI PER IL BORDO

SOMMA CONNESSA

M^n, N^n VARIETÀ CONNESSE SENZA BORDO ORIENTATE.

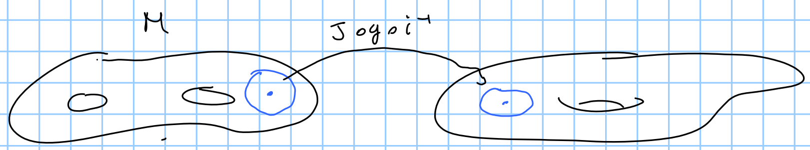
$i: \mathbb{R}^n \hookrightarrow M$ PRESERVA ORIENTAZIONE (SONO TUTTI ISOTOPI)

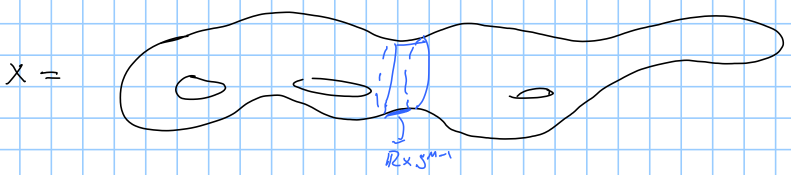
$j: \mathbb{R}^n \hookrightarrow N$ INVERTE ORIENTAZIONE (SONO TUTTI ISOTOPI)

SIA $X = (M \setminus i(0)) \sqcup (N - j(0)) / \sim$

$i(v) \sim j\left(\frac{v}{\|v\|^2}\right)$ $\qquad g: \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}^n$, $v \mapsto \frac{v}{\|v\|^2}$

È UN VETTORE CON NORMA RECIPROCA DI v.





$X = M \# N$ NON DIPENDE DA NIENTE. (PERCHÉ SONO ISOTOPE)

L'ORIENTAZIONE $\overset{-}{J} \circ \overset{-}{g} \circ \overset{+}{i^{-1}} = +$ QUINDI SI PRESERVA

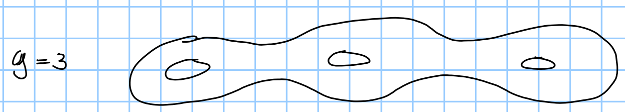
EX $\#$ È UN'OPERAZIONE SU L'INSIEME DELLE n-VARIETÀ ORIENTATE CONNESSE A MENO DI DIFFEOMORFISMO.

e $\#$ È COMMUTATIVA e ASSOCIATIVA

e $M \# S^n = M$

PER LE SUPERFICI

LA SUPERFICIE DI GENERE $g \geq 0$ È LA SOMMA CONNESSA DI g TORI



$g = 0$ È S^2 IL TORO È $g = 1$

TEOREMA (CLASSIFICAZIONE DI SUP) (NO DIM).

UNA SUP. COMPATTA, ORIENTABILE, CONNESSA, SENZA BORDO È DIFFEO A UNA SUPERFICIE DI ORDINE g.

NOTA STORICA

M^n $\quad \underset{\text{om}}{M \sim S^n} \Leftarrow \underset{\text{omeo}}{M \approx S^n} \Leftarrow \underset{\text{diffeo}}{M \cong S^n}$

$\Rightarrow$ SEMPRE

$n \geq 5$ SMALE ('60)

$n = 4$ FREEDMAN ('80)

CONGETTURA DI POINCARÉ $\leftarrow$ $n = 3$ PERELMAN ('00)

(3 METAGLUE FIELDS)

(NO VEDREMO $N \geq 6$)

$\Rightarrow$ QUASI MAI

$n = 2, 3$

SPESSO FALSO $n \geq 5$ (SFERE ESOTICHE)

$\boxed{n = 4}$ RISPOSTA APERTA..

COSE MOLTO STRANE DELLE 4-VARIETÀ.

LEZIONE 19

Titolo nota 12/04/2019

K-FORME DIFFERENZIALI

OGGI: M^m VARIETÀ (PUÒ AVERE BORDO)

DEF UNA K-FORMA È UNA SEZIONE $\omega \in \Gamma \Lambda^k(M) = \Omega^k(M)$ SPAZIO VETTORIALE $C^\infty(M)$-MODULO

CIOÈ $\forall p \in M$, $\omega(p) \in \Lambda^k(T_pM)$

$\omega(p)(v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}$ IN MODO ANTISIMMETRICO

$(f \cdot \omega)(p) = f(p) \cdot \omega(p)$

ESISTE UN PRODOTTO QUINDI HO UN'ALGEBRA

$\omega \in \Omega^k(\Omega)$ $\eta \in \Omega^h(\Omega)$

$(\omega \wedge \eta)(p) = \omega(p) \wedge \eta(p)$ e $\omega \wedge \eta \in \Omega^{k+h}(\Omega)$

CONTINUA A VALERE CHE $(\omega \wedge \eta) = (-1)^{k \cdot h} (\eta \wedge \omega)$

$\Omega^* = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \Omega^i(M)$ È UN'ALGEBRA

IN COORDINATE IN $\mathbb{R}^m$ $\underset{e_1^*}{\overset{\shortparallel}{dx^1}}, \dots, \underset{e_m^*}{\overset{\shortparallel}{dx^m}}$ SONO UNA BASE DI $\Lambda^1(\mathbb{R}^m) = (\mathbb{R}^m)^*$

$\{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \mid 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le m\}$ BASE DI $\Lambda^k(\mathbb{R}^m)$

OGNI K-FORMA IN $U \subseteq \mathbb{R}^m$ SI SCRIVE IN MODO UNICO

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le m} f_{i_1 \dots i_k}(x)\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \sum_I f_I(x)\, dx^I$$

CHIAMO $I = (i_1, \dots, i_k)$

SE VOGLIAMO UNA SCRITTURA UNICA GLI i_n SONO PRESI IN MODO CRESCENTE.

ALTRIMENTI MI DEVO RICORDARE $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$ $(\Rightarrow dx^i \wedge dx^i = 0)$

MA L'UNICITÀ SI PERDE.

ESEMPIO 2 FORMA in $\mathbb{R}^3$

$$xy^3\, dx\wedge dy + e^z\, dx\wedge dz + y^2\, dy\wedge dz$$

SE HO UN'ALTRA CARTA CON VARIABILI $\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n$

ALLORA $dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}_j} d\bar{x}^j$

ESEMPIO: $\begin{cases} x = \bar{y} + \bar{z} \\ y = \bar{y}^2 \\ z = -\bar{x} \end{cases}$

$$(\bar{y}+\bar{z})\, \bar{y}^6\, (d\bar{y}+d\bar{z})\wedge(2\bar{y}\, d\bar{y}) + e^{-\bar{x}}(d\bar{y}+d\bar{z})\wedge(-d\bar{x}) + \bar{y}^4\,(2\bar{y}d\bar{y}\wedge -d\bar{x}) =$$
$$= (2\bar{y}^5 + e^{-\bar{x}})\, d\bar{x}\wedge d\bar{y} + \dots$$

$dx = d\bar{y} + d\bar{z}$ $\quad dz = -d\bar{z}$

$dy = 2\bar{y}\, d\bar{y}$

ESEMPIO $f \in C^\infty(M)$ $\quad df \in \Omega^1(M)$

ESERCIZIO $df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n \overset{\text{not. di Einst.}}{=} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ IN CARTA

RICORDA $\Omega^k(M) = \{0\}$ SE $k > n$ e $\dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k}$ se $k \leq n$

ESEMPIO UNA n FORMA IN $U \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad \omega(x) = f(x)\, dx^1\wedge \dots \wedge dx^n$

È QUASI COME UNA FUNZIONE MA

SE USO $\bar{x}^i$ $\quad \omega = f(\bar{x}) \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\right) d\bar{x}^1 \wedge \dots d\bar{x}^n$

MENTRE UNA FUNZIONE CAMBIA SOLO PER $f(x) \to f(\bar{x})$ LA DIFFERENZA È QUEL DETERMINANTE.

PULL-BACK $f: M \longrightarrow N$ INDUCE SEMPRE UNA $f^*\ \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ $\forall k$

(CIOÈ DA $\Omega^*(N) \to \Omega^*(M)$).

$$\omega \longrightarrow f^*\omega \qquad f^*\omega(p)(v_1, \dots, v_k) = \omega(f(p))(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k))$$

$$v_i \in T_pM$$

OSS POICHÈ ω È ALTERNANTE ANCHE $f^*\omega$ LO È

e $f^*(\omega\wedge\eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$ $\rightarrow$ (RIFLETTICI)

PULL - BACK IN CARTE $\quad f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$\omega = \sum_I \alpha_I \, dx^I = \sum_I \alpha_I \, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

$$f^*\omega = \sum_I \alpha_I \circ f \quad \underset{\substack{\shortparallel \\ \text{DIFFERENZIALE DI } f_i}}{df^{i_1}} \wedge \dots \wedge df^{i_k} \qquad f = (f_1, \dots, f_n)$$

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} xy \\ y+z \end{pmatrix} \begin{matrix} = X \\ = Y \end{matrix} \qquad \omega = Y \, dX$$

$$f^*\omega = \overbrace{(y+z)}^{Y \circ f} \overbrace{(y\,dx + x\,dy)}^{df^1}$$

VALE IN $\mathbb{R}^n$

$$\int f(x) \underbrace{dx^1 \dots dx^n}_{\substack{\text{SOLO} \\ \text{UN SIMBOLO} \\ \text{PER ORA}}} = \int f(\bar{x}) \left| \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \right) \right| d\bar{x}^1 \dots d\bar{x}^n$$

CASO LOCALE $\quad \omega \in \Omega^n(U) \quad U \subseteq \mathbb{R}^n$

$\omega = f(x) \, dx^1 \wedge \dots dx^n$ IN MODO UNICO

$$\int_U \omega := \underbrace{\int_U f}_{\text{QUELLO DI ANALISI}}$$

IL VALORE ASSOLUTO DI TEORIA DELLA MISURA SALVA TUTTO

OSS SE $\varphi : U \to V$ È UN DIFFEO + (MANTIENE L'ORIENTAZIONE) $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\int_U \omega = \int_V \varphi_* \omega$$

φ_*: PULL BACK DI φ^{-1} $\quad \varphi_* = (\varphi^{-1})^*$

DEF M VARIETÀ ORIENTATA, $\omega \in \Omega^n(M)$ $\quad \mathrm{supp}(\omega) = \{$CHIUSURA DELL'INSIEME DEI PUNTI IN CUI È $\neq 0\}$ COMPATTO

$\mathbb{R} \ni \int_M \omega \qquad$ (VOGLIO ARRIVARE A DEFINIRLO

CASO SEMPLICE $\quad \mathrm{supp}\, w \subseteq U \xrightarrow[\varphi]{\sim +} V \subseteq \mathbb{R}^n$ DIFFEO + $\quad \varphi$ CARTA DI $\mathbb{R}^n$

ALLORA $\quad \int_M w = \int_V \varphi_* w \in \mathbb{R}$

OSS IN QUESTO CASO È BEN DEFINITA.

SUPPONIAMO $\quad \mathrm{supp}\, w \subseteq U' \xrightarrow[\varphi']{\sim +} V' \subseteq \mathbb{R}^n$

$\int_{V'} \varphi'_* w \in \mathbb{R}$ $\quad$ CHI MI DICE CHE È UGUALE A PRIMA.

$\varphi' \circ \varphi^{-1} : V \longrightarrow V'$ $\quad$ È UN DIFFEO DA $V \cap V'$ IN PARTENZA E IN ARRIVO $\quad \mathrm{supp}\, U \subseteq U \cap U'$ QUINDI COSÌ È UN DIFFEO E LA FORMULA DI ANALISI 2 MI DA L'UGUAGLIANZA.

CASO GENERALE : $\quad$ PRENDO $\{\varphi_i : U_i \longrightarrow V_i\}$ ATLANTE, $\{\rho_i\}$ PARTIZIONE DELL'UNITÀ SUBORDINATA.

$$w = \sum_i \underbrace{(\rho_i w)}_{w_i} \qquad \mathrm{supp}\, w_i \subseteq U_i$$

w_i È UNA K FORMA. MA SOLO IN UNA ZONA COMPATTA (SUPP. DI w) UN NUMERO FINITO È $\neq 0$ QUINDI LA SOMMA È BEN DEFINITA.

DEF $\quad \int_M w = \sum_i \int_M w_i$

PROP È UNA BUONA DEFINIZIONE CIOÈ NON DIPENDE DALLA PARTIZIONE

SIA $\{\varphi'_i : U'_i \longrightarrow V'_i\} \quad \{\rho'_i\}$

$$\int_M w = \sum_i \int_M \underbrace{\Big(\sum_j \rho'_j\Big)}_{=1} w_i = \sum_{i,j} \int_M w\, \rho_i \rho'_j = \sum_j \int_M w_j \Big(\sum \rho_i\Big) = \sum_j \int_M w_j$$

ANALOGAMENTE SI DEFINISCE $\forall\, S \subseteq M$ BORELIANO.

SE $S = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} S_i \quad$ e $\quad \int_S w = \sum_i \int_{S_i} w$

ESEMPIO $T = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{m}$

$(\vartheta_1 \dots \vartheta_m) \in T$ $\qquad d\vartheta^i \in \Lambda^1(T)$

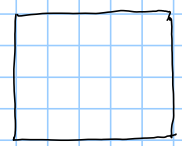
$\vartheta_i \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ $\qquad$ MA $\vartheta^i \notin C^\infty(T)$

RIFLETTERE CHE ϑ^i NON È C^∞ PER PERIODICITÀ MA LA SUA DERIVATA NON CAMBIA.

$$\omega = d\vartheta^1 \wedge \dots \wedge d\vartheta^m \in \Omega^m(T)$$

$$\int_T \omega = \int_{(0,2\pi)^m} d\vartheta^1 \dots d\vartheta^m = (2\pi)^m$$

HO TOLTO PARETI DI MISURA NULLA



e $\vartheta_1 \dots \vartheta_m$ SONO VARIABILI

$(0,2\pi)^m \subseteq \mathbb{R}^m/2\pi\mathbb{Z}^m$

DOMINIO FONDAMENTALE. APERTO DENSO

DEF M^m, ω UNA k-VARIETÀ e $S \subseteq M$ DI DIMENSIONE k, S ORIENTATA. $k<m$

$\operatorname{Supp}\omega$ cpt (OPPURE S cpt)

$$\int_S \omega := \int_S i^*\omega$$

DOVE $i : S \hookrightarrow M$ INCLUSIONE

$$i^* \; \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^k(S)$$
$$\omega \longrightarrow i^*\omega$$

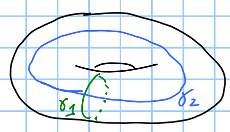
DEF $\Omega^k_c(M) \subseteq \Omega^k(M)$ k-FORME A SUPPORTO COMPATTO

PROP $\omega \in \Omega^k_c(M)$, M VARIETÀ ORIENTATA e $-M(\circ\bar{M})$ LA VARIETÀ CON ORIENTAZIONE OPPOSTA, ALLORA

$$\int_{-M} \omega = -\int_M \omega$$

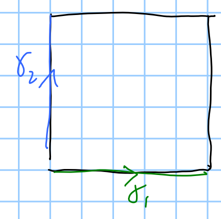
ESERCIZIO $T = S^1 \times S^1$

$(\vartheta_1, \vartheta_2) \in \left(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\right)^2$



$\gamma_1(t) = (t, 0)$

$\gamma_2(t) = (0, t)$



$\omega = d\vartheta^1$

$\int_{\gamma_1} d\vartheta^1 = 2\pi \qquad \int_{\gamma_2} \omega = 0$

LEZIONE 20

Titolo nota 30/04/2019

M m-VARIETÀ $\Omega^k(M) = \{k\text{-FORME}\}$ · PULL-BACK $f: M \to N$

SE M È ORIENTATA E $\omega \in \Omega^m_c(M)$ $\int_M \omega \in \mathbb{R}$ SONO INTEGRABILE,

$S^k \subseteq M^m$ SOTTOVARIETÀ ORIENTATA $\forall \omega \in \Omega^k_c(M) \Rightarrow \int_S \omega \in \mathbb{R} = \int_S i_S^* \omega$

OPPURE S COMPATTA E $\omega \in \Omega^k_{???}(M)$

DEF M m-VARIETÀ ORIENTATA, UNA FORMA VOLUME È UNA $\omega \in \Omega^m(M)$

t.c. $\omega(p)(v_1 \dots v_m) > 0$ $\forall p \in M$ E PER OGNI BASE $\{v_1 \dots v_m\}$ POSITIVA DI T_pM

DEF DATA ω FORMA VOLUME $\forall S \subseteq M$ BORELIANO IL VOLUME DI $(S) := \int_S \omega \geq 0$

OSS SE $\mathring{S} \neq \emptyset$ ALLORA $Vol(S) > 0$

IN CARTA (ORIENTATA) $\omega = f(x)\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m \Rightarrow \int \omega = \int f$

$\omega > 0 \iff f > 0 \quad \forall x$

PROP DATA M ORIENTATA, ESISTE SEMPRE UNA FORMA VOLUME.

DIM PRESO $\{\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^m\}$ ATLANTE ORIENTATO, $\varphi_i(U_i) = V_i$

SU V_i HO $\omega_i = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ (FORMA DI VOLUME EUCLIDEA SU $\mathbb{R}^m$)

LA PORTO SU U $\omega_i = \varphi_i^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m) \in \Omega^m(U_i)$

PRESA $\{f_i\}$ SUBORDINATA A $\{U_i\}$ $f_i \omega_i \in \Omega^m_c(U_i)$

E QUINDI SI ESTENDE A $\overline{\omega_i}$ su M (METTO A ZERO FUORI DA $M \setminus U_i$)

POSSO DEFINIRE

$$\omega = \sum_i \overline{\omega_i} = \sum_i f_i \omega_i \in \Omega^m(M) \text{ È SEMPRE POSITIVA}$$

SOMMA LOC FINITA E HA SENSO.

PERCHÉ LOC. È COMB. LINEARI DI COSE POSITIVE A COEFF. POS.

$$\omega(p)(v_1 \dots v_m) = \sum_{\substack{i \\ \text{FINITA}}} \underbrace{f_i(p)}_{\geq 0} \underbrace{\omega_i(p)(v_1, \dots v_m)}_{\geq 0} > 0$$

DEF (M, g) VARIETÀ RIEMANNIANA ($g(p)$ PRODOTTO SCALARE DEF + SU T_pM)

SE M È ORIENTATA LA VARIETÀ HA UNA FORMA VOLUME CANONICA INDOTTA DA g

MA ABBIAMO VISTO CHE UN PRODOTTO SCALARE g SU V VETTORIALE ORIENTATO INDUCE UN GENERATORE DI $\Omega^n(V)$

$\Rightarrow$ $\omega_g(p) :=$ QUEL GENERATORE È CARATTERIZZATA $\omega_g(p)(v_1 \dots v_n) = 1$ CON $v_1 \dots v_n$ BASE ORTONORMALE.

DERIVATA (ESTERNA) DI K FORME

DEF SIA (IN $\mathbb{R}^n$) $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ $\quad \omega = \sum_I f_I \, dx^I$ $\quad$ RICORDO $\Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M)$, $f \longrightarrow df$

DEFINISCO $d\omega = \sum_I df_I \wedge dx^I \in \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n)$

DEF/PROP DATA $\omega \in \Omega^k(M)$ M VARIETÀ, DEFINISCO $d\omega \in \Omega^{k+1}(M)$ IN CARTE COME HO FATTO SOPRA. LA COSTRUZIONE È BEN DEFINITA ED È UNA MAPPA LINEARE $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ TC

0) PER $k=0$ d È QUELLA CHE CONOSCEVO

1) SE $\omega \in \Omega^k(M)$ $\eta \in \Omega^h(M)$ $\quad d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (d\eta)$

2) $d(d\omega) = 0 \quad \forall \omega$

DIM MOSTRIAMO CHE IN $\mathbb{R}^n$ LINEARE + 0) + 1) + 2) CARATTERIZZANO d UNIVOCAMENTE

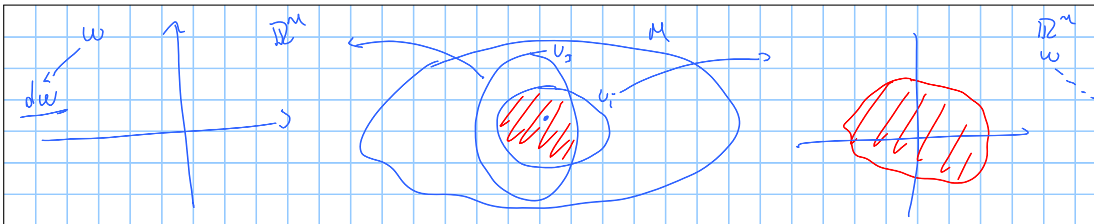
$$\omega = \sum_I f_I \, dx^I$$

D.RE ω LINEARE VUOL DIRE GUARDARE $d(f_I \overset{k=0 \text{ È COME SE FOSSE UN } \wedge}{\cdot} dx^I) =$

$= d(f_I \cdot dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \underset{\text{PER 1)}}{=}$ DIPENDE DA $\underset{\text{PER 0)}}{d f_I}$ E $d(dx^i)$ $= 0 \to$ PER 2 OSSERVANDO $dx^i = d(x^i)$

QUINDI SU OGNI CARTA IL DIFFERENZIALE È DETERMINATO DALLE SUE PROPRIETÀ

NON DIPENDE DALLA CARTA



dω potrebbero non coincidere su M

Ma visti su $\mathbb{R}^n$ devono coincidere perché $d\omega$ è univocamente caratterizzata su $\mathbb{R}^n$

Resta da vedere che su $\mathbb{R}^n$ valgono 0) 1) 2) + lineare

$$\omega = \sum_I f_I \, dx^I \qquad d\omega = \sum df_I \wedge dx^I$$

È lineare ok

0) ok se $k=0$ è il differenziale di f.

2) d lineare basta prendere $\omega = f\, dx^I$

$$d\omega = df \wedge dx^I = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i \wedge dx^I$$

$$d(d\omega) = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx^j \wedge dx^i \right) \wedge dx^I = 0$$

perché prima o poi hanno un wedge in comune in ogni membro

1) $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ $\quad \eta \in \Omega^h(\mathbb{R}^n)$

$$d(\omega \wedge \eta) = d(f\, dx^I \wedge g\, dx^J) = d\left[(fg)(dx^I \wedge dx^J)\right] =$$

$$\underset{\text{def. d. in } \mathbb{R}^n}{\overset{d}{=}} d(fg) \wedge dx^I \wedge dx^J = df\, g \wedge dx^I \wedge dx^J + f\, dg \wedge dx^I \wedge dx^J =$$

$$= (df \wedge dx^I) \wedge (g\, dx^J) + f \wedge dx^I \wedge \underbrace{(-1)^k}_{k \text{ scambi}} dg\, dx^J$$

$$d\omega \wedge \eta \quad + \quad \omega \wedge (-1)^k d\eta$$

Riassumendo possiamo fare

- pull-back → integrale su sottovarietà
- integrare → es $f: M \to N$ liscia $\quad \forall \omega \in \Omega^k(N)$ $\quad f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$
- derivare → teorema di Stockes

Molte cose già viste sono forme

$d(d\omega)$ in $\mathbb{R}^3$ — grad, div, rotore

1-forma $\underbrace{f_1 dx^1 + f_2 dx^2 + f_3 dx^3}_{\text{campo}}$

grad: $f \to$ campi, $k=0$

div: campi $\to$ fun, $k=2$

rotore: campi $\to$ campi, $k=1$

$d(d\omega) = 0$ è una rilettura di

div (rot) = 0

rot (grad) = 0

2 FORME $f_3(dx^1 \wedge dx^2) + f_2(dx^1 \wedge dx^3) + f_3(dx^1 \wedge dx^2)$ → CAMPO

3 FORME $f\ dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \leftrightarrow$ FUNZIONI.

ESEMPIO LE EQ DI MAXWELL.

PRESO $\mathbb{R}^{3,1}$ SPAZIO DI MINKOSKI $g = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

$F \in \Omega^2(\mathbb{R}^{2,1})$ CAMPO ELETTRO-MAGNETICO (HA 6 COMPONENTI)

$B \quad B_3\, dx \wedge dy + B_2\, dx \wedge dz + B_3\, dy \wedge dz$

$E \quad E_1\, dx \wedge dt + E_2\, dy \wedge dt + E_3\, dz \wedge dt$

1) $dF = 0$

2) $d(*F) = J$ 3 FORMA (4 COMPONENTI) QUINDI È UN QUADRIVETTORE.

↓ VEDI ESERCIZI

NON DIPENDE DALLE CARTE

E QUESTO È QUELLO CHE SI USA NELLA RELATIVITÀ GENERALE.

TEOREMA DI STOCKES

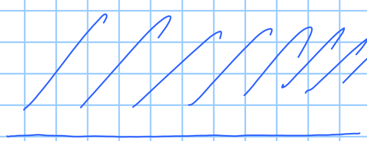
M^{m+1} VARIETÀ (CHE PUÒ AVERE BORDO ∂M m-DIMENSIONALE) ORIENTATA (QUINDI ∂M HA UN'ORIENTAZIONE INDOTTA)

(NOTO $\left.\begin{matrix}\partial(\partial M) = \emptyset \\ d(dw) = 0\end{matrix}\right\}$ CERCO UN LEGAME.)

DOVREI SCRIVERE $i^* w$ $\quad i : \partial M \to M$

$\forall\, w \in \Omega^m_c(M)$ VALE $\displaystyle\int_{\partial M} w = \int_M dw$.

DIM IN CARTE $M = \mathbb{R}^{m+1}_+$



$x_{n+1} = 0 \sim \mathbb{R}^n$

$$w = \sum_{i=1}^{m} f_i\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^{m+1}$$

SUPPONGO i FISSATO PERCHÉ TANTO LA LINEARITÀ MI PERMETTE DI FARLO SU

$$w = f\, dx^1 \wedge \ldots \overset{i}{\vee} \ldots \wedge dx^{m+1}$$

CASO $i \leq m$

$$\int_{\partial \mathbb{R}^{m+1}_+ = \mathbb{R}^m} f \, dx^1 \wedge \dots \overset{i}{\vee} \wedge dx^{m+1} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} i^*\left(f \, dx^1 \wedge \dots \overset{i}{\vee} \wedge dx^{m+1}\right) =$$

SOPRAVVIVE POICHÉ $i \leq m$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} (i^* f) \, (i^* dx^1) \wedge \dots \wedge \underbrace{(i^* dx^{m+1})}_{=0} = 0$$

SOPRAVVIVE SOLO $j = i$

$$d\omega = \sum_{j=1}^{m+1} \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^1 \dots \overset{i}{\vee} \wedge dx^{m+1} = (-1)^i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{m+1}$$

CHE È A SUPPORTO COMPATTO

$$\int_{\mathbb{R}^{m+1}_+} d\omega = (-1)^m \int_{\mathbb{R}^{m+1}_+} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{m+1} = (-1)^i \int \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^1 \dots dx^{m+1} = 0$$

PER DEF DI INTEGRALE DI UNA $m+1$ IN $\mathbb{R}^{m+1}$

CASO $i = m+1$

$$(-1)^{m+1} \int_{\mathbb{R}^{m+1}_+} \frac{\partial f}{\partial x^{m+1}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{m+1} = (-1)^{m+1} \int_{\mathbb{R}^{m+1}_+} \frac{\partial f}{\partial x^{m+1}} dx^1 \dots dx^{m+1} =$$

f A SUPP. COMPATTO

$$= (-1)^{m+1} \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\partial f}{\partial x_m} dx^{m+1} \right) dx^1 \dots dx^m =$$

$$= (-1)^{m+1} \int_{\mathbb{R}^m} - f(x_1 \dots, x_m, 0) \, dx^1 \dots dx^m =$$

$$= (-1)^m \int_{\mathbb{R}^m} f(x_1 \dots x_m, 0) \, dx^1 \dots dx^m$$

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m = (-1) \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$$

CON ORIENTAZIONE INDOTTA DA $\mathbb{R}^{m+1}_+$ CHE NON COINCIDE CON QUELLA POSITIVA DI $\mathbb{R}^m$ SE m È DISPARI E QUINDI VIENE QUEL $(-1)^m$ CHE MI SERVE

ORIENTAZIONE POSITIVA

CASO GENERALE $\omega \in \Omega^m_c(M)$

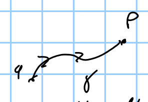
SOMMA FINITA PERCHÉ ω È A SUPP. COMPATTO

COME PRIMA CON PARTIZIONE DELL'UNITÀ $\omega = \sum \underbrace{f_i\,\omega}_{\omega_i \in \Omega^m(M)}$ supp $\omega_i \subseteq U_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathbb{R}^{m+1}_+$

PER LE ω_i STOCKES È VERO PERCHÉ POSSO PASSARE IN CARTE MA STOCKES È LINEARE PERCHÉ USA SOLO DIFFERENZIALI E INTEGRALI. QUINDI PASSA ALLA SOMMA DELLE ω_i

CONSEGUENZE DI STOCKES in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

- $\mathbb{R}^2$ γ CURVA COMPATTA



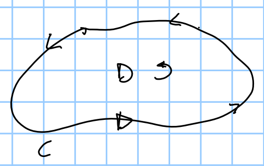
$f \in C^\infty(\gamma)$

$$f(p)-f(q) = \int_{\partial\gamma} f = \int_\gamma df$$

(IN $\mathbb{R}$ È IL TEO FOND. DEL CALCOLO INTEGRALE)

DOVE USO CHE L'ORIENTAZIONE IN UN PUNTO È ASSEGNARE UN SEGNO + o −

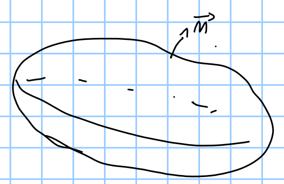
- IN $\mathbb{R}^2$



$$\omega = f_1\,dx^1 + f_2\,dx^2$$

$$\int_C \omega = \int_D d\omega = \int_D \left(\frac{d f_2}{\partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial x^2}\right) dx^1 dx^2$$

IN $\mathbb{R}^3$



$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ CON BORDO $\partial\Omega$

SE SCRIVIAMO BENE VIENE IL TEO DELLA DIVERGENZA.

X CAMPO SU Ω $\quad \int_\Omega \operatorname{div} X = \int_{\partial\Omega} X \cdot \vec{n}$

IN $\mathbb{R}^3$ TEO DI STOCKES

X CAMPO VETTORIALE SU S SUP. CON BORDO

$$\int_S \operatorname{rot} X \cdot \vec{n} = \int_{\partial S} X \cdot \vec{t}$$

LEZIONE 21

Titolo nota 02/05/2019

M^n VARIETÀ QUALSIASI (EVENTUALMENTE CON BORDO)

$\Omega^k(M)$ OSS SE $k > m$ $\Omega^k(M) = \{0\}$

$\forall\ \omega \in \Omega^k(M)$ $d(d\omega) = 0$

DEF $\omega \in \Omega^k(M)$ È CHIUSA SE $d\omega = 0$

ω È ESATTA SE $\exists\ \eta \in \Omega^{k-1}(M)$ $d\eta = \omega$

PROP ω ESATTA $\Rightarrow$ ω È CHIUSA

ESEMPI SE $k = m$ $\Rightarrow$ ω È SEMPRE CHIUSA $d\omega \in \Omega^{m+1}(M) = \{0\}$

SE M È COMPATTA ORIENTABILE E SENZA BORDO. SE ω È UNA FORMA VOLUME ESATTA

INFATTI SE ω È UNA FORMA VOLUME $\int_M \omega > 0$

SE FOSSE ESATTA $\exists\ \eta$ tc $d\eta = \omega$

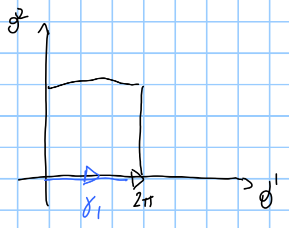
$$0 < \int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta = 0$$

ESEMPI TORO $S^1 \times S^1$ (θ^1, θ^2) $\omega =$ "$d\theta^1$" $d\theta^1 \in \Omega^1(T)$

ω È CHIUSA MA NON È ESATTA

LOCALMENTE $d\omega = d(d\theta^1) = 0$

CHIAMANDO γ_1



ESERCIZIO $\int_{\gamma_1} \omega = 2\pi$ SE PER ASSURDO $\omega = d\eta$

$$\int_{\gamma_1} d\eta = 0$$ STOCKES PERCHÉ γ_1 NON HA BORDO

3) $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (ρ, θ) $\omega = d\theta$ CHIUSA MA NON ESATTA

$$\int_{S^1} d\theta = 2\pi$$

COMOLOGIA DE RHAM

M^m VARIETÀ QUALSIASI. $\Omega^k(M)$ K-FORME

SOTTOSPAZIO $Z^k(M) = \{$ FORME CHIUSE $\}$ SOTTOSPAZIO DI $\Omega^k(M)$ $k \leq m$

$\cup$ $B^k(M) = \{$ FORME ESATTE $\}$ " " $\Omega^k(M)$

DEF $H^k_{dR}(M) = Z^k(M) / B^k(M)$ e $b^k(M) = \dim H^k(M)$ K-ESIMO NUMERO DI BETTI.

(dR = DE RHAM)

OSS $b^k(M) = 0$ $\forall\, k > m$

DEF $\chi(M) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i b^i(M)$ QUANDO I $b^i < +\infty$ $\forall i$ QUESTA SI CHIAMA

CARATTERISTICA DI EULERO – POINCARÉ

OSS SE $M = M_1 \cup \dots \cup M_h$ COMPONENTI CONNESSE (FINITE)

$$\Omega^k(M) = \Omega^k(M_1) \oplus \dots \oplus \Omega^k(M_h)$$

TUTTO SI SPEZZA

$$H^k(M) = H^k(M_1) \oplus \dots \oplus H^k(M_h)$$

QUINDI POSSO LAVORARE SU M CONNESSA

CASO $k=0$ PROP M CONNESSA $H^0(M) = \mathbb{R}$ CANONICAMENTE

IN PARTICOLARE $b^0(M) = 1$

DIM $H^0(M) = \{0$-FORME "FUNZIONI" CHIUSE$\} / \{0$-forme ESATTE$\} = \{f \in C^\infty(M) \mid df \equiv 0\}$

$\{0$-forme ESATTE$\}$ = SOLO LO 0 (0 NON ESISTONO)

$\{f \in C^\infty(M) \mid df \equiv 0\} = \{$ FUNZIONI LOCALMENTE COSTANTI $\}$ = $\{f \in C^\infty(M) \mid$ COSTANTI $\}$ → POICHÉ M È CONNESSO

COR M QUALSIASI $b^0(M) =$ n° DI COMP. CONNESSE DI M

PROP $H^k(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{SE } K=0 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \quad (\forall K>0) \end{cases}$ (QUANDO SUCCEDE COSÌ SI DICHE CHE LA COMOLOGIA È BANALE)

DIM $K=0$ OK, $K\geq 2$ OK

$K=1$ $\quad H^1(\mathbb{R}) = \{1\text{-FORME CHIUSE}\} / \{1\text{-FORME ESATTE}\} = \Omega^1(\mathbb{R}) / \{1\text{-FORME ESATTE}\} = 0$

$\iff \{1 \text{ FORME ESATTE}\} = \Omega^1(\mathbb{R}) \iff \omega = f(x)\,dx$

$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \qquad \omega = dF$

SCOPO: FAR VEDERE CHE ANCHE LA COMOLOGIA DI $\mathbb{R}^n$ È BANALE. (LEMMA DI POINCARÉ)

CONSEGUENZE: SE $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ CHIUSA È SEMPRE ESATTA.

ES $n=3$ $\quad \text{rot} \circ \text{grad} = 0$ $\quad$ SE HO QUALCOSA IL CUI $\text{ROT}=0 \Rightarrow$ È IL GRADIENTE DI QUALCOSA ∇ (POTENZIALI)

$\text{div} \circ \text{rot} = 0$ $\quad$ " " LA " $\text{div} = 0 \Rightarrow$ È UN ROTORE DI QUALCOSA (POTENZIALI VETTORI)

DEF M VARIETÀ QUALSIASI $\quad H^*(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} H^k(M)$

PROP L'OPERAZIONE $\wedge$ "SCENDE" IN $H^*(M)$ CIOÈ È BEN DEFINITA.

DIM $[\omega] \in H^k(M)$ e $[\eta] \in H^h(M)$

DEFINENDO $[\omega \wedge \eta] =: [\omega] \wedge [\eta]$ DEVO FAR VEDERE CHE

ω, η CHIUSE $\Rightarrow \omega \wedge \eta$ CHIUSA

$d(\omega \wedge \eta) = \overset{0}{d\omega} \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \overset{0}{d\eta} = 0$

ADESSO FACCIO VEDERE CHE NON DIPENDE DAI RAPPRESENTANTI.

SE $[\eta] = [\eta']$ $\Updownarrow$ $\eta' - \eta = \xi$ $\quad$ TESI $[\omega \wedge \eta'] - [\omega \wedge \eta] = [\omega \wedge (\eta + d\xi)] \iff [\omega \wedge d\xi] = 0 \iff \omega \wedge d\xi$ è ESATTA

MA $\omega \wedge d\xi = d(\omega \wedge \xi) \pm \overset{0}{d\omega} \wedge \xi$

ALLORA $H^*(M)$ È UN'ALGEBRA ASSOCIATIVA (NON COMMUTATIVA ANZI ANTI COMMUTATIVA)

e $[\omega]\wedge[\eta] = (-1)^{hk}[\eta]\wedge[\omega]$ (DA QUI IN AVANTI TOLGO [ ])

FUNTORIALITÀ

$f: M \to N$ LISCIA $f^*: \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ PULL-BACK

POICHÈ IL d COMMUTA CON IL PULL-BACK COSE ESATTE VANNO IN COSE ESATTE E CHIUSE IN CHIUSE TRAMITE f^*

ALLORA è BEN DEFINITA $f^*: H^*(N) \to H^*(M)$

E VALGONO LE STESSE PROPRIETÀ:

1) $(f\circ g)^* = g^* \circ f^*$

2) $(id_M)^* = id_{H^k(M)}$

COROLLARIO SE f È UN DIFFEOMORFISMO $\Rightarrow f^*$ È UN ISOMORFISMO DI ALGEBRE

SCOPO $f,g: M \to N$ OMOTOPE $\Rightarrow f^* = g^*$

COMPLESSI DI COCATENE

DEF UN COMPLESSO DI COCATENE È $C = \{C_0 \xrightarrow[(d_0)]{d} C_1 \xrightarrow[(d_1)]{d} C_2 \xrightarrow[(d_2)]{d} \cdots\}$ ← NOTAZIONE DIVERSA

C_i spazi vettoriali di omomorfismi

TALE CHE $d^2 = 0$ $(d_{i+1}\circ d_i = 0)$

$\alpha \in C_i$ è un COCICLO SE $d\alpha = 0$

è un COBORDO SE $\exists\, \beta \in C_{i-1}$ SE $d\beta = \alpha$

LA COMOLOGIA DI C È $H^i = Z^i / B^i$

$Z^i = \{$ CICLI DI $C^i\}$

$B^i = \{$ BORDI DI $B^i\}$

ESEMPIO SE $C_i = H^i(M)$ e d è IL DIFFERENZIALE $\Rightarrow H^*$ è LA COMOLOGIA DI DE RHAM

DEF UN MORFISMO DI COCATENE $f: C \to D$ È UN DIAGRAMMA COMMUTATIVO

$$\begin{array}{ccccccccc}
C_0 & \to & C_1 & \to & C_2 & \longrightarrow & C_3 & \to \\
{\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f} & \\
D_0 & \to & D_1 & \to & D_2 & \longrightarrow & D_3 & \to
\end{array}$$

OSS UN MORFISMO DI COCATENE INDUCE UN MORFISMO IN COMOLOGIA

$$f_* : H^*(C) \longrightarrow H^*(D)$$

SIANO f, g DUE MORFISMI

DEF UNA OMOTOPIA DI COCATENE È UNA FAMIGLIA $h_i : C_i \longrightarrow D_{i-1}$

$$\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[r] \arrow[d, shift right, "f_0"'] \arrow[d, shift left, "g_0"] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, shift right, "f_1"'] \arrow[d, shift left, "g_1"] \arrow[dl] & C_2 \arrow[r] \arrow[d, shift right, "f_2"'] \arrow[d, shift left, "g_2"] \arrow[dl] & C_3 \arrow[d, shift right, "f_3"'] \arrow[d, shift left, "g_3"] \\
D_0 \arrow[r] & D_1 \arrow[r] & D_2 \arrow[r] & D_4
\end{tikzcd}$$

$$f - g = h \circ d + d \circ g$$

PROP SE ESISTE UN'OMOTOPIA h TRA f e g ALLORA $f_* = g_*$

DIM $(f-g)_* = 0$ (CIOÈ MANDA COCICLI IN COBORDI)

$$(f-g)(\text{cociclo}) = d \circ \underbrace{f(c)}_{\text{cobordo}} + f \circ \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{d(c)}$$

CONTRAZIONI

V SPAZIO VETTORIALE, $v \in V$ $\quad \omega \in \Lambda^k(V) \dashrightarrow i_v(\omega) \in \Lambda^{k-1}(V)$

$$i_v(\omega)(v_1 \dots v_{k-1}) = \omega(v, v_1, \dots, v_{k-1})$$

M VARIETÀ $\quad X \in \mathfrak{X}(M)$ ALLORA $\quad i_X : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k-1}(M)$

$$\omega(p) \longrightarrow i_{X(p)}\, \omega(p)$$

ESERCIZIO $\boxed{\text{FORMULA DI CARTAN}}$

$$\mathcal{L}_X = i_X \circ d + d \circ i_X$$

DERIVATA DI LIE

Lezione 21

LEZIONE 22

Titolo nota 03/05/2019

TEOREMA $f, g: M \to N$ OMOTOPE ALLORA $f^* = g^* : H^*(N) \to H^*(M)$

OSS IN COMOLOGIA

ESERCIZIO $\boxed{\text{FORMULA DI CARTAN}}$ $\forall \omega \in \Omega^k(M)$, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$

$$\mathcal{L}_X(\omega) = d \circ i_X + i_X \circ d$$

SKETCH SE $p \in M$ tc $X(p) \neq 0$ $\rightsquigarrow$ (CAMBIO CARTA) $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$ e $\omega = \sum_I f_I \, dx^I$

SE $X(p) = 0$ NON CI HO PENSATO "CIT"

SIA V UNO SPAZIO DI DIMENSIONE FINITA REALE. $\alpha : [0,1] \to V$

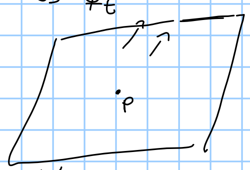
HA SENSO PARLARE DI RAPPORTO INCREMENTALE E DERIVATE.

QUINDI SI PUÒ DEFINIRE $\alpha' : [0,1] \to V$

PERCHÈ SCELTA UNA BASE $V \cong \mathbb{R}^n$ E CI HA SENSO E VEDERE CHE LA DERIVATA COMMUTA CON I CAMBI DI BASE

HA SENSO ANCHE DEFINIRE $\beta(t) = \int_0^t \alpha$

SE $V = \Lambda^k(W)$ HO $X \rightsquigarrow \Phi_t$ $\omega \in \Omega^k(M)$



$\Lambda^k(T_pM)$

VOGLIO UNA CURVA IN $\Lambda^k(T_pP)$

$$\omega_t(p) = \phi_{-t}^*\left(\omega(\phi_t(p))\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_X = \dot{\omega}_0$$

DIM TEOREMA

$$\begin{tikzcd}
\Omega^{k-1}(N) \arrow[r, "d"] \arrow[d, shift right, "f^*"'] \arrow[d, shift left, "g^*"] & \Omega^k(N) \arrow[r, "d"] \arrow[d, shift right, "f^*"'] \arrow[d, shift left, "g^*"] \arrow[dl, "h"] & \Omega^{k+1}(N) \arrow[d, shift right, "f^*"'] \arrow[d, shift left, "g^*"] \arrow[dl, "h"] \\
\Omega^{k-1}(M) \arrow[r, "d"'] & \Omega^k(M) \arrow[r, "d"'] & \Omega^{k+1}(M)
\end{tikzcd}$$

CERCO h OMOTOPIA TALE CHE

$f^* - g^* = d \circ h + h \circ g$

SE TROVO h HO LA TESI

$\exists \quad F : M \times [0,1] \longrightarrow N$ OMOTOPIA $\quad F_t : M \longrightarrow N$

$\frac{\partial}{\partial t}$ CAMPO "PREDILETTO"

$F_0 = g$

$F_1 = f$

$$h : \Omega^k(N) \longrightarrow \Omega^{k-1}(M)$$

$$\omega \longrightarrow \int_0^1 i_{\frac{\partial}{\partial t}} F_t^*(M)\, dt$$

$$\forall\, p \in M \qquad h(\omega)(p) = \int_0^1 \left(i_{\frac{\partial}{\partial t}} F^*(\omega)\right)(p,t)\, dt$$

$$h(\omega)(p)(v_1, \dots, v_{k-1}) = \int_0^1 \left(i_{\frac{\partial}{\partial t}} F^*(\omega)\right)(p,t)(v_1 \dots v_{k-1})$$

$$f^*, g^* : \Omega^k(N) \longrightarrow \Omega^k(M)$$

$$\left(f^* - g^*\right)(\omega) = \left(F_1^* - F_0^*\right)(\omega) =$$

POICHÉ $F_t : M \longrightarrow N$ HO $F_t^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$

$F_t^*(\omega)$ È UNA CURVA DI k FORME QUINDI È INTEGRABILE.

$$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(F_t^*(\omega)\right) =$$

SERVE A TOGLIERE LA t

SI PUÒ ANCHE NON DIMOSTRARE

$$= \int_0^1 \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}} \underbrace{F^*(\omega)}_{\in\, \Omega^k(M \times [0,1])} dt =$$

$$= \int_0^1 \left(d \circ i_{\frac{\partial}{\partial t}} + i_{\frac{\partial}{\partial t}} \circ d\right)\left(F^*(\omega)\right)(p,t)\, dt =$$

(VOGLIO DIRE $= d \circ h + h \circ d$)

PULL-BACK E d COMMUTANO

$$= \int_0^1 \left(d \circ i_{\frac{\partial}{\partial t}}\right) F^*(\omega)\, dt + \int_0^1 \left(i_{\frac{\partial}{\partial t}} \circ d\right)\left(F^*(\omega)\right)$$

COMMUTANO VEDI ☺

$$d \circ \underbrace{\int_0^1 i_{\frac{\partial}{\partial t}} F^*(\omega)}_{d \circ h(\omega)} + \underbrace{\int_0^1 i_{\frac{\partial}{\partial t}} F^*(d\omega)\, dt}_{(h \circ d)(\omega)}$$

ESERCIZIO

$$w_t \;\to\; w'_t \qquad w_t \;\to\; \int_0^t w_s\,ds \qquad w_t \;\to\; dw_t$$

dw_t → commuta con le due operazioni sopra

COROLLARIO Se $M \sim N$ sono omotopicamente equivalenti

allora $b^i(M) = b^i(N)$ (cioè hanno la stessa coomologia)

DIM $M \sim N$ $\exists\, f, g$ t.c. $M \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} N$ $\quad f\circ g \sim id_N$, $\quad g\circ f \sim id_M$

per teo ⇒

$$\begin{aligned} (f\circ g)^* &= (id_N)^* & \qquad (g\circ f)^* &= (id_M)^* \\ g^*\circ f^* &= id & f^*\circ g^* &= id \end{aligned}$$

Allora f^* e g^* sono una l'inversa dell'altra e inducono isomorfismi tra $H^k(M)$ e $H^k(N)$ $\forall k$

COR M contrattile ⇒ $H^*(M)$ è banale

COR " ogni forma chiusa è esatta

SUCCESSIONE DI MAYER-VIETORIS

DEF Una successione esatta è una successione (di oggetti algebrici)

(può non avere l'inizio) $\to V_i \xrightarrow{d_i} V_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} V_{i+2}$

t.c. $\mathrm{Img}\, d_i = \mathrm{Ker}\, d_{i+1}$

(è come dire che è una coomologia banale).

ESEMPI

1) $0 \to V \xrightarrow{f} W$ è esatta ⇔ f è iniettiva
$\quad 0 \longmapsto 0$

2) $V \xrightarrow{g} W \to 0$ è esatta ⇔ g è surgettiva

3) $0 \to V \xrightarrow{f} W \to 0$ è esatta ⇔ f è un isomorfismo.

4) $0 \to V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z \to 0$ SUCCESSIONE ESATTA CORTA

f è INIETTIVA, g è SURIETTIVA e $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g$

ESERCIZIO SIA $\to V_i \xrightarrow{d_i} V_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} V_{i+2} \to$ DI SPAZI VETTORIALI

SE È ESATTA ANCHE $V_i^* \xleftarrow{d_i} V_{i+1}^* \xleftarrow{d_i} V_{i+2}^*$ È ESATTA.

$\Rightarrow$

e $V_i \otimes W \xrightarrow{d_i \otimes id_W} V_{i+1} \otimes W \xrightarrow{d_i \otimes id_W} V_{i+2} \otimes W$

CON LA PROPRIETÀ UNIVERSALE POSSO DEFINIRE $V \otimes W$ ANCHE PER SPAZI DI DIMENSIONE INFINITA

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r] \arrow[dr, "\forall\ \text{bil}"'] & V \otimes W \arrow[d, dashed, "\exists\ \text{lin}"] \\
& Z
\end{tikzcd}$$

ALLORA $V_i \otimes W \xrightarrow{d_i \otimes id_W} V_{i+1} \otimes W$

$$\begin{tikzcd}
& V_{i+1} \otimes W \\
V_i \times W \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad (v, w) \mapsto d_i(v) \otimes w$$

TEO SIA $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ SUCCESSIONE ESATTA CORTA DI COMPLESSI DI COCATENE

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & A_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & B_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & C_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & A_i \arrow[r] \arrow[d, "d"] & B_i \arrow[r] \arrow[d, "d"] & C_i \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & A_{i+1} \arrow[r] & B_{i+1} \arrow[r] & C_{i+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\to \tilde{z}$ SURIETTIVA $\Rightarrow \exists\, \beta$ tc $\to \alpha$

$\downarrow d$

$d(\beta) \to C_i$ VA A 0 ALLORA $\exists\, \gamma \in A_{i+1}$ $f(\gamma) = d(\beta)$

ALLORA $\delta_i : C_i \to A_{i+1}$, $\alpha \mapsto \gamma$

IL DIAGRAMMA COMMUTANO OVUNQUE. E OGNI RIGA È ESATTA

ALLORA INDUCE UNA SUCCESSIONE ESATTA LUNGA

$$H^{i-1}(C) \xrightarrow{\delta} H^i(A) \xrightarrow{f^*} H^i(B) \xrightarrow{g^*} \underset{[\alpha]}{H^i(C)} \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(A) \xrightarrow{f^*}$$

PER UNA CERTA δ

TEOREMA M varietà $M = U \cup V$ aperti

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dr, "l"] & \\ U \cap V \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & U \cup V = M \\ & V \arrow[ur, "m"'] & \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} & H^k(U) \arrow[dl, "i^*"'] & \\ H^k(U \cap V) & & H^k(M) \arrow[ul, "l^*"'] \arrow[dl, "m^*"] \\ & H^k(V) \arrow[ul, "j^*"] & \end{tikzcd}$$

sono solo restrizioni perché pull-back di inclusioni

Esiste successione esatta lunga (detta successione di Mayer-Vietoris)

$$H^k(M) \xrightarrow{(l^*, m^*)} H^k(U) \oplus H^k(V) \xrightarrow{j^* - i^*} H^k(U \cap V) \xrightarrow{d} H^{k+1}(M)$$

(dove j^* e i^* sono le estensioni di j^* e i^* che mandano a zero l'altra componente)

per un'opportuna scelta di d.

Dim: basta far vedere che questa successione di complessi è esatta

$$0 \to \Omega^k(M) \xrightarrow{(l^*, m^*)} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{j^* - i^*} \Omega^k(U \cap V) \to 0$$

Verifichiamo

- (l^*, m^*) è iniettiva perché $U \cup V = M$
- $\mathrm{Img}(l^*, m^*) = \ker j^* - i^*$

  $\subseteq$ perché se sto in quelli immagine dentro da una stessa ω su M è quindi coincide su $U \cap V \Rightarrow j^* - i^*$ vale 0

  $\supseteq$ stare nel $\ker j^* - i^*$ vuol dire coincidere sull'intersezione. Allora $\exists\, \omega \in \Omega^k(M)$ che vale quello sull'uni. Allora $(l^*, m^*)(\omega) = \ker j^* - i^*$

- $j^* - i^*$ è surgettiva $\omega \in \Omega^k(U \cap V)$

Presa f_U e f_V partizione dell'unità ho $\overbrace{-f_U \cdot \omega}^{\eta_2}$ definita su U

$\underbrace{f_V\, \omega}_{\eta_1}$ '' su V

e le estendo a zero su V e U rispettivamente

Allora $(j^* - i^*)(\eta_1 - \eta_2) \underset{\text{solo su } U \cap V}{=} f_V\, \omega + f_U\, \omega = (f_U + f_V)\, \omega = \omega \quad \forall \omega$

APPLICAZIONI

PROP $$H^k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{SE } k=0 \text{ O } k=n \\ 0 & \text{ALTROVE} \end{cases}$$

ESERCIZIO $0 \to V_1 \to \dots \to V_k$ SPAZI VETTORIALI DI DIMENSIONE FINITA ESATTA

ALLORA $\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \dim(V_i) = 0$

DIM PROPOSIZIONE S^n $\quad U = S^n \setminus \{N\}$ $\quad V = S^n \setminus \{S\}$

$U \cong \mathbb{R}^n$ $\quad V \cong \mathbb{R}^n$ CONTRATTILI

$U \cap V \cong S^{n-1} \times \mathbb{R} \underset{\text{OMOTOPIA}}{\sim} S^{n-1}$

IN S^1

$$0 \to \underset{\substack{\| \\ \mathbb{R}}}{H^0(S^1)} \to \underset{\substack{\| \\ \mathbb{R}}}{H^0(U)} \oplus \underset{\substack{\| \\ \mathbb{R}}}{H^0(V)} \to \underset{\substack{\| \\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}}}{H^0(U\cap V)} \xrightarrow{\delta} \underset{\substack{| \\ ?}}{H^1(S^1)} \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{H^1(U)} \oplus \underset{\substack{\| \\ 0}}{H^1(V)} \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{H^1(U\cap V)}$$

USANDO L'ESERCIZIO $H^1(S^1) = \mathbb{R}$

ALLORA PASSANDO ALL'INDUZIONE

$$\underset{\substack{\| \\ 0}}{H^{i-1}(U)} \oplus \underset{\substack{\| \\ 0}}{H^{i-1}(V)} \to \underbrace{H^{i-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{\delta} H^i(S^n)} \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{H^i(U)} \oplus \underset{\substack{\| \\ 0}}{H^i(V)} \to$$

$i \geq 2$ CONTRATTILI

QUESTO PER COSA CONTA DEVE ESSERE ISOMORFISMO

$\Rightarrow H^n(S^n) = \mathbb{R}$ e $H^i(S^n) = 0$ $\quad i \neq 0, n$

IL CASO $i = 1$ VA FATTO A PARTE $n \geq 2$

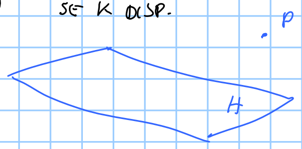
$$0 \to \underset{\substack{\| \\ \mathbb{R}}}{H^0(S^n)} \to \underset{\substack{\| \\ \mathbb{R}}}{H^0(U)} \oplus \underset{\substack{\| \\ \mathbb{R}}}{H^0(V)} \to \underset{\substack{\| \\ \mathbb{R}}}{H^0(U\cap V)} \xrightarrow{\delta} H^1(S^n) \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{H^1(U)} \oplus \underset{\substack{\| \\ 0}}{H^1(V)}$$

STAVOLTA $U \cap V$ È CONNESSO

$\Rightarrow H^1(S^n) = 0$ PER L'ESERCIZIO

PROP $$H^k(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & k \text{ PARI } k \leq 2n \\ 0 & \text{SE } k \text{ DISP.} \end{cases}$$

DIM $\mathbb{C}P^n = U \cup V$



H IPERPIANO P PUNTO $P \notin H$

$\Rightarrow V = \mathbb{C}P^n \setminus H$

$U = \mathbb{C}P^n \setminus \{P\}$

PRESI AD ESEMPIO $H = \{x_0 = 0\}$ e $P = [1, 0 \dots 0]$

$V \cong \mathbb{C}^n$

$U \cap V \cong \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\} \cong S^{2n-1} \times \mathbb{R} \sim S^{2n-1}$

$\mathbb{R}^2$

U è UN FIBRATO CON $\mathbb{C}$ COME FIBRA E BASE H $\sim$ $H \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ FINIRE I CONTI.

<u>ES</u> $E \to M$ VETTORIALE $\Rightarrow$ $E \sim M$

LEZIONE 23

Titolo nota 07/05/2019

- INVARIANZA PER OMOTOPIA $\to$ $H^1($CONTRATTILE$)$ = BANALE
- MAYER – VIETORIS $M = U \cup V$ $\quad U, V, U \cup V, U \cap V$
- $H^k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & k=0 \text{ o } k=n \\ 0 & k \neq 0 \ k \neq n \end{cases}$
- $H^k(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & k \text{ PARI } \leq 2n \\ 0 & \text{ALTRIMENTI.} \end{cases}$

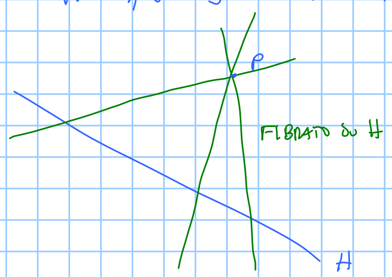
$S^2 \cong \mathbb{C}P^1$ $\quad$ $i=0 \quad i=1 \quad i=2$: $\quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad)$ n° di b

$S^4 \ncong \mathbb{C}P^4$ $\quad S^4$: $1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1$

$\mathbb{C}P^4$: $1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1$

DIM COMOLOGIA $\mathbb{C}P^n$

$H = \{x_0 = 0\}$ $\qquad p = [1, 0, \dots, 0]$



$U = \mathbb{C}P^n \setminus H \cong \mathbb{C}^n$

$V = \mathbb{C}P^n \setminus p \cong H \cong \mathbb{C}P^{n-1}$

$U \cap V = \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \cong S^{2n-1} \times \mathbb{R} \sim S^{2n-1}$

$$\underbrace{H^{k-1}(S^{2n-1})}_{\substack{0 \\ k \neq 1, 2n}} \xrightarrow{\delta} H^k(\mathbb{C}P^n) \to \underbrace{H^k(\mathbb{C}^n)}_{\substack{0 \\ k \neq 0}} \oplus H^k(\mathbb{C}P^{n-1}) \to \underbrace{H^k(S^{2n-1})}_{\substack{0 \\ k \neq 0 \ 2n-1}} \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(\mathbb{C}P^n)$$

E CONTROLLARE A MANO I CASI $0, 1, 2n-1$ e $2n$

COMOLOGIA A SUPPORTO COMPATTO

$\Omega_c(M)$ $\quad$ M VARIETÀ QUALSIASI

SE $\omega \in \Omega_c(M)$ $\quad d\omega \in \Omega_c^{k+1}(M)$ PERCHÉ $\operatorname{supp} d\omega \subset \operatorname{supp} \omega$

$$0 \to \Omega_c^0(M) \xrightarrow{d_0} \Omega_c^1(M) \xrightarrow{d_1} \dots \to$$

$$H_c^k(M) = \frac{\operatorname{Img} d_{k-1}}{\ker d_k}$$

OSS SE M È COMPATTA RITROVO TUTTO COME PRIMA ($\operatorname{supp} \omega$ È CHIUSO IN UN COMPATTO).

OSS $\omega \in \Omega^k_c(M)$ $\eta \in H^h_c(M) \Rightarrow \omega \wedge \eta \in \Omega^{k+h}_c(M)$

PERCHÈ $\text{supp}\ \omega\wedge\eta \subseteq \text{supp}\ \omega \cap \text{supp}\ \eta$

QUINDI $H^*_c(M) = \bigoplus_{k\geq 0} H^k_c(M)$ È UN'ALGEBRA ASSOCIATIVA CON $\wedge$

OSS $M = M_1 \sqcup \dots \sqcup M_n$ COMPONENTI CONNESSE $\omega \in \Omega^k_c(M)$ $\omega = \bigoplus_i \omega_i$ $\omega_i \in \Omega^k_c(M_i)$

e $H^k_c(M) = \bigoplus H^k_c(M_i)$

PROP M CONNESSA $H^0_c(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{SE } M \text{ È COMPATTA} \\ 0 & \text{SE } M \text{ NON È COMPATTA} \end{cases}$ (M PUÒ AVERE BORDO)

M COMPATTO f COSTANTE SU TUTTA M

M NON COMPATTO ESISTE SOLO LA COSTANTE NULLA A SUPP. COSTANTE

$H^0_c(M) = \{$ 0-FORME A SUPPORTO COMPATTO CHIUSE $\}$

loc costanti

PROP $H^k_c(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & k=1 \\ 0 & k\neq 1 \end{cases}$

DEF $b^k_c(M) = \dim H^k_c(M)$ NUMERI DI BETTI COMPATTI

OSS $b^k_c(\mathbb{R})$: 0 , 1

$b^k(\mathbb{R})$ 1, 0 SCAMBIATI

IN GENERALE SE M È ORIENTATA $\vee$ SENZA BORDO ALLORA $\int_M : \Omega^m_c \longrightarrow \mathbb{R}$

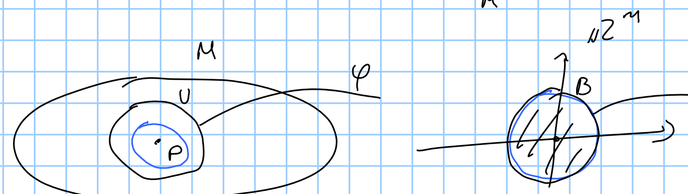
$\omega \longrightarrow \int_M \omega$ HA SENSO PERCHÈ ω È A SUPP. COMPATTO.

PER STOKES QUESTA MAPPA SCENDE IN COOMOLOGIA PERCHÈ FA ZERO SULLE ESATTE

PERCHÈ M È SURIETTIVA

$\int_M : H^m_c(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ è SURIETTIVA.

BASTA TROVARE $\omega \in \Omega^m_c(M)$ CON $\int_M \omega \neq 0$ $(d\omega = 0)$



$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ POSITIVA SU B e NULLA FUORI

PRESA $\omega = f(x)\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ EUCLIDEA

$\omega' = \varphi^* \omega$ ESTESA A 0 FUORI DA U

$$\int_M \omega' = \int_{\mathbb{R}^m} \omega = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) > 0$$

COROLLARIO $b^m_c(M) > 0$

COROLLARIO $H^k_c(M)$ VEDE LA DIMENSIONE (È IL PIÙ GRANDE INDICE TALE CHE IL NUMERO DI BETTI IN QUELL'INDICE È $\neq 0$)

QUINDI NON È INVARIANTE PER OMOTOPIA

DIM CHE $H^1_c(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

MOSTRO CHE $\int_{\mathbb{R}} : H^1_c(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ È INIETTIVA (CHE È SURGETTIVA LO SO)

SE $\int_{\mathbb{R}} \omega = 0 \Rightarrow \exists\, \eta \in \Omega^0_c(\mathbb{R})$ t.c. $d\eta = \omega$

SE $\omega = f(x)\, dx \in \Omega^1_c(\mathbb{R})$ CON supp f COMPATTO,

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$ $\quad dF = \omega$ e $\int \omega = 0$ IMPLICA $F(x)$ HA SUPPORTO COMPATTO.

TEO (LEMMA DI POINCARÈ - COMPATTA)

$$H^k_c(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$$

DIM $0 < k < m$ ($k=0$ GIÀ VISTO) $\quad \omega \in \Omega^k_c(\mathbb{R}^m)$ $\quad d\omega = 0$ ALLORA LA TESI $\exists\, \eta \in \Omega^{k-1}_c(\mathbb{R}^m)$ t.c. $d\eta = \omega$

IDENTIFICO $\mathbb{R}^m = S^m \setminus \{p\}$ QUINDI $\mathbb{R}^m \subseteq S^m$

QUINDI $\operatorname{supp} \omega \subset B(0,R) = B$

OSS $S^m \setminus B \cong$ AD UNA PALLA CHIUSA (PERCHÉ HO IL PUNTO ALL'INFINITO)

$\Rightarrow$ CONTRATTILE

ESTENDO A ZERO $\omega \in \Omega^k(S^m)$ CHIUSA $H^k(S^m) = 0$ SE $k \neq 0, m$

ALLORA $\exists\, \eta' \in \Omega^{k-1}(S^m)$ $\quad d\eta' = \omega$

$d\eta' = 0$ SU $S^m \setminus B$ CONTRATTILE $\Rightarrow \exists\, \xi \in \Omega^{k-2}(S^m \setminus B)$ $\quad d\xi = \eta'$

VEDI DOPO $k=1$

PRESA $f : S^m \longrightarrow \mathbb{R}$ A CAMPANA INTORNO AL PUNTO ALL'INFINITO p

$\eta = \eta' - d(\rho\xi)$ $\qquad d\eta = d\eta' = \omega$

SUPP DI η È COMPATTO DISGIUNTO DA P

IN UN INTORNO DI P $\quad \rho = 1$ ALLORA $\eta = \eta' - \overset{\eta'}{\overset{\shortparallel}{d\xi}} = 0$

<u>K=1</u> $\quad d\eta'$ È UNA FUNZIONE COSTANTE PERCHÈ $d\eta' = 0$ ALLORA SOTTRAENDO A η QUELLA COSTANTE. η È 0 IN UN INTORNO DI B^c

<u>K=n</u> $\quad \int_{\mathbb{R}^n} : H^n_c(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ SURIETTIVA È INIETTIVA?

$\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0 \Rightarrow \int_{S^n} \omega = 0 \Rightarrow \omega = d\eta'$ E POI COME PRIMA....

<u>OSS</u> $\int_{S^n} \omega = 0 \iff \omega \in \Omega^n(S^n)$ È ESATTA

<u>DIM</u> $\quad \int_{S^n} \; \underset{\mathbb{R}}{\underset{\shortparallel}{H^n(S^n)}} \longrightarrow \mathbb{R}$

<u>OSS</u> $U \subseteq M$ APERTO $\quad i : U \longrightarrow M$ INCLUSIONE INDUCE $\; i^* : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^k(U)$

$\qquad i_* : \Omega^k_c(U) \longrightarrow \Omega^k_c(M)$

QUI INVECE HO CHE IL SUPP. COMPATTO SI CONSERVA.

<u>N.B.</u> IL PULL-BACK DI UNA FORMA A SUPPORTO COMPATTO NON È DETTO SIA A SUPP. COMPATTO (A MENO CHE f NON SIA PROPRIA)

<u>MAYER VIETORIS</u> $\qquad M = U \cup V$

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dr, "\ell"] & \\ U\cap V \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & M \\ & V \arrow[ur, "m"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & H^k_c(U) \arrow[dr, "\ell_*"] & \\ H^k_c(U\cap V) \arrow[ur, "i_*"] \arrow[dr, "j_*"'] & & H^k_c(M) \\ & H^k_c(V) \arrow[ur, "m_*"'] & \end{tikzcd}$$

<u>TEO</u>

$\exists \delta$ t.c. $\quad H^{k-1}_c(M) \xrightarrow{\delta} H^k_c(U\cap V) \xrightarrow[(i_*, j_*)]{} H^k_c(U) \oplus H^k_c(V) \xrightarrow[m_* - \ell_*]{} H^k_c(M) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}_c(U\cap V)$

DIM $0 \longrightarrow \Omega_c^k(U \cap V) \xrightarrow[(i_*, j_*)]{} \Omega_c^k(U) \oplus \Omega_c^k(V) \xrightarrow[(m_* - \ell_*)]{} \Omega_c^k(M) \longrightarrow 0$

DA VEDERE CHE È ESATTA

QUASI ALLO STESSO MODO DELLA VOLTA SCORSA $m_* - \ell_*$ SURIETTIVA CON PARTIZIONE DELL'UNITÀ

DUALITÀ DI POINCARÉ

IPOTESI DI LAVORO: M ORIENTATA E SENZA BORDO DI DIMENSIONE m

$$H^k(M) \times H_c^{m-k}(M) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{MAPPA BILINEARE}$$
$$(\omega, \eta) \longrightarrow \int_M \omega \wedge \eta$$

QUESTA INDUCE UNA MAPPA

SOLO DUALE ALGEBRICO.

$$PD : H^k(M) \longrightarrow H_c^{m-k}(M)^*$$
$$\omega \longrightarrow \left(\eta \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \omega \wedge \eta\right)$$

POINCARÉ-DUALE

TEO PD È UN'ISOMORFISMO.

PROP $M = M_1 \sqcup M_2 \ldots$ $\sqcup$ PUÒ AMMETTERE INFINITE COMP. CONNESSE

$H^k(M) = \prod_i H^k(M_i)$ È VERO $\rightarrow$ $\Omega^k(M) = \prod_i \Omega^k(M_i)$

$\cup$

$H_c^k(M) = \bigoplus_i H_c^k(M_i)$ $\qquad \Omega_c^k(M) = \bigoplus_i \Omega_c^k(M_i)$

SE LE COMP. SONO IN NUMERO FINITO VALE L'UGUALE

ESERCIZIO $V_1, V_2, \ldots$ SPAZI VETTORIALI $\left(\bigoplus_i V_i\right)^* = \prod_i (V_i)^*$

$\supseteq$ QUASI OVVIO

DIM TEO OSS $PD : H^k(\mathbb{R}^m) \xrightarrow{\sim} H_c^{m-k}(\mathbb{R}^m)^*$ $\quad k=0$ $\left(k \neq 0 \text{ ENTRAMBI NON} = 0\right)$

$\qquad \| \qquad\qquad\qquad \|$
$\qquad \mathbb{R} \qquad\qquad\qquad \mathbb{R}$

EQUIVALE A DIMOSTRARE CHE

$$H^0(\mathbb{R}^n) \times H^n_c(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{È UNA FORMA NON BANALE}$$
$$(\omega, \eta) \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} \omega \wedge \eta$$

$\forall$ ω FUNZIONE COSTANTE, η A CAMPANA COME PRIMA $\int_{\mathbb{R}^n} \omega \wedge \eta \neq 0$

PROP SE $M = U \cup V$ SE PD È ISOMORF. PER U, V, $U \cap V$ ALLORA LO È ANCHE PER M

DIM

$$H^{k-1}(U)\oplus H^{k-1}(V) \to H^{k-1}(U\cap V) \to H^k(M) \longrightarrow H^k(U)\oplus H^k(V) \longrightarrow H^k(U\cap V) \longrightarrow$$

$$H^{n-k+1}(U)\oplus H^{n-k+1}(V) \leftarrow H^{n-k+1}(U\cap V) \leftarrow H^{n-k}(M) \leftarrow H^{n-k}(U)\oplus H^k(V) \leftarrow H^{n-k}(U\cap V)$$

SE HO UNA SUCC. ESATTA QUELLA DUALE È ESATTA CAMBIANDO LE FRECCE

$$\begin{tikzcd}
H^{n-k+1}(U)^*\oplus H^{n-k+1}(V)^* \arrow[r] & H^{n-k+1}(U\cap V)^* \arrow[r] & H^{n-k}(M)^* \arrow[r] & H^{n-k}(U)^*\oplus H^{n-k}(V)^* \arrow[r] & H^{n-k}(U\cap V) \\
H^{k-1}(U)\oplus H^{k-1}(V) \arrow[r] \arrow[u, "DP"] & H^{k-1}(U\cap V) \arrow[r] \arrow[u, "DP"] & H^k(M) \arrow[r] \arrow[u, "DP"] & H^k(U)\oplus H^k(V) \arrow[r] \arrow[u, "DP"] & H^k(U\cap V) \arrow[u, "DP"] \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

COSA NON OVVIO IL DIAGRAMMA COMMUTA SE C'È δ $\to$ QUESTO INVECE COMMUTA SI CURO PERCHÈ NON C'È δ

(POTREI AVERE PROBLEMI ALMENO DEI SEGNI CON $m^* - \ell^*$ o $\ell^* - m^*$)

$\xrightarrow{DP}$ DEVO CONTROLLARE CHE SIA UN ISOMORFISMO

LEMMA DEI 5: (DIM X ESERCIZIO)

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "a"] & B \arrow[r] \arrow[d, "b"] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"] & D \arrow[r] \arrow[d, "d"] & E \arrow[d, "e"] \\
F \arrow[r] & G \arrow[r] & H \arrow[r] & I \arrow[r] & J
\end{tikzcd}$$

SE LE RIGHE SONO ESATTE E IL DIAGRAMMA COMMUTA

E a b d e SONO ISOMORF $\Rightarrow$ c È ISOMORFISMO

PROP SE PD È LO PER $M_1, M_2, \ldots$ ALLORA LO È ANCHE PER $M_1 \sqcup M_2 \sqcup \ldots$

DIM PD $H^k(M_i) \xrightarrow{\sim} H^{n-k}_c(M_i)^*$ ISO $\forall i$

$$H^k(M) = \prod H^k(M_i) \qquad \left(H_c^{n-k}(M)\right)^* = \left(\bigoplus H_c^{n-k}(M_i)\right)^* \overset{\text{x esercizio}}{=} \prod_i H_c^{n-k}(M_i)^*$$

PD : $H^k(M) \longrightarrow H_c^{m-k}(M)^*$ FACENDO o IL PD PRODOTTO DI TUTTI QUELLI CHE HO.

LEMMA M^m VARIETÀ $\mathcal{A} = \{\text{APERTI DI } M\}$ tc

1) $U \subseteq M$ e $U \cong \mathbb{R}^m \Rightarrow U \in \mathcal{A}$

2) $U, V, U \cap V \in A \Rightarrow U \cup V \in \mathcal{A}$

3) $U_i \in A$ DISGIUNTI NUMERABILI $\Rightarrow \bigsqcup_i U_i \in A_i$

ALLORA IN $\mathcal{A}$ CI SONO TUTTI GLI APERTI DI M., IN PARTICOLARE $M \in \mathcal{A}$

(PER LA DIM VEDERE LIBRO)

DIM DI POINCARÈ :

$\mathcal{B} = \{$ APERTI IN M PER CUI PD È ISOMORFISMO $\}$

$\mathcal{B}$ SODDISFA 1), 2), 3) $\Rightarrow \mathcal{B}$ SONO TUTTI GLI APERTI IN PARTICOLARE $M \in \mathcal{B}$

LEZIONE 24

Titolo nota 09/05/2019

DUALITÀ DI POINCARÉ

M ORIENTATA, SENZA BORDO, CONNESSA

$$PD : H^k(M) \xrightarrow{\sim} H_c^{m-k}(M)^* \quad \text{ISOMORFISMO}$$

COROLLARIO

SE M È COMPATTA ALLORA $b^k(M) = b^{m-k}(M) \underline{< +\infty}$ → UNICA COSA NON OVVIA

OSS $H_c^k(M) = H^k(M)$ SE M È COMPATTA.

DIM $V \overset{i}{\hookrightarrow} V^{**}$ È UN ISOMORFISMO $\iff$ $\dim V < +\infty$ (X BUONO)

$$\underbrace{H^k(M) \simeq \left(H^{m-k}(M)\right)^* \simeq H^k(M)^{**}}_{i}$$

i (DA VERIFICARE) $\Rightarrow$ $b^k(M) = \dim H^k(M) < +\infty$

COROLLARIO SE $\overset{\text{M COMPATTA E}}{\vee}$ dim M È DISPARI, $\chi(M) = 0$

DIM $\chi(M) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i b^i(M) = 0$

COROLLARIO $\int_M : H_c^m(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ È UN ISOMORFISMO

DIM ABBIAMO GIÀ VISTO CHE È SURIETTIVA

$$\dim H_c^m(M) \underset{\text{PER POINC}}{=} \dim H^0(M) = 1$$

OSS QUESTO MI DICE CHE UNA M FORMA A SUPPORTO COMPATTO IL CUI INTEGRALE È NULLO È IL DIFFERENZIALE DI QUALCOSA.

FORMULA D'INTERSEZIONE

SE $\underset{2m}{\overset{}{\dim M}}$ È PARI, M COMPATTA

$$b : H^m(M) \times H^m(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\omega, \eta) \longmapsto \int_M \omega \wedge \eta$$

OSS $b(\omega,\eta) = \int_M \omega\wedge\eta = \int_M (-1)^m \eta\wedge\omega = (-1)^m b(\eta,\omega)$

b è ANTISIMMETRICA SE m È DISP.

b è SIMMETRICA SE m È PARI

OSS b NON È MAI DEGENERE.

SE m È DISPARI b È ANTISIMMETRICA NON DEGENERE

$\Rightarrow b \underset{\text{IN UNA BASE}}{\cong} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b^m$ È PARI

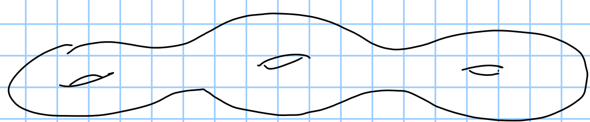
$\Rightarrow \chi(M)$ È PARI (SCRIVI)

SE m È PARI (m MULTIPLO DI 4) $\vee$ b È SIMMETRICO NON DEGENERE. CON SEGNATURA $\sigma = (i_+, i_-, 0)$ IL PRODOTTO SCALARE.

DEF SEGNATURA DI M $\sigma(M) = i_+ - i_- \in \mathbb{Z}$ (SOLO IN QUESTO CASO)

OSS SIA $-M$ M ORIENTATA IN SEGNO OPPOSTO $\sigma(-M) = -\sigma(M)$

EX SE M È SPECCHIABILE, (ESISTE $\varphi: M \to M$ DIFFEO CHE INVERTE L'ORIENTAZIONE) ALLORA $\sigma(M) = 0$ DOVE DEFINITA.

ESEMPIO $\underset{\text{BUCHI}}{S_g} =$  SONO TUTTE SPECCHIABILI

OSS $\chi(\mathbb{CP}^n) = n+1$

$\chi(\mathbb{CP}^2) = 3$ $\qquad 1 \; 0 \; \underset{b^2}{1} \; 0 \; 1$

$\Rightarrow \mathbb{CP}^2$ NON È SPECCHIABILE.

COR SE $\dim M = 4m$ E M SPECCHIABILE $\Rightarrow \chi(M) =$ PARI

$0 =$ PARI $= \sigma(M) \Rightarrow i_+ - i_-$ PARI $\Rightarrow i_+ + i_- = b^m(M)$ È PARI

FORMULA DI KÜNNETH

SCOPO: CALCOLARE COOMOLOGIA DI $M \times N$ CONOSCENDO QUELLE DI M E N

M, N QUALSIASI, E $b^i(N) < +\infty$ $\forall i$

ESERCIZIO: M CON BORDO, $N = M \setminus \partial M$ ALLORA $M \sim N$ OMOTOPE (SEGUE IL COLLARE DEL BORDO)

ESEMPIO: $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ NON HA NUMERI DI BETTI FINITI $(b^1 = +\infty)$

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\pi_N"] \arrow[d, "\pi_M"] & N \\ M & \end{tikzcd}$$

COSTRUISCO

$$\Omega^k(M) \times \Omega^h(N) \longrightarrow \Omega^{k+h}(M \times N)$$ È UNA FORMA BILINEARE.

$$(\omega, \eta) \longmapsto \pi_M^* \omega \wedge \pi_N^* \eta$$

OSS: SE $d\omega = 0$ E $d\eta = 0$ $\Rightarrow$ $d(\pi_M^* \omega \wedge \pi_N^* \eta) = 0$

ANCHE SULL'ESATTEZZA BENE. QUINDI PASSA BENE AL QUOZIENTE

$$\begin{tikzcd} H^k(M) \times H^h(N) \arrow[r] \arrow[d, "\text{FORMA CANONICA FORME BIL}"'] & H^{k+h}(M \times N) \\ H^k(M) \otimes H^h(N) \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

$$(\omega, \eta) \longmapsto \pi_M^* \omega \wedge \pi_N^* \eta$$

FISSO $m = k + h$

TEO: $\Psi_m \quad \bigoplus_{k=0}^{m} \left(H^k(M) \otimes H^{m-k}(N) \right) \longrightarrow H^m(M \times N)$ È UN ISOMORFISMO.

(NO DIM)

(COME POINCARÉ SU INDUZIONE SU APERTI DI M DIM. CHE È VERO SU (U, N) CON $U \subseteq M$)

ALTRA VERSIONE PER SCRIVERLA

$\Psi \quad H^*(M) \otimes H^*(N) \longrightarrow H^*(M \times N)$ SOMMANDO SOPRA SU m

COROLLARIO (OPERATIVO)

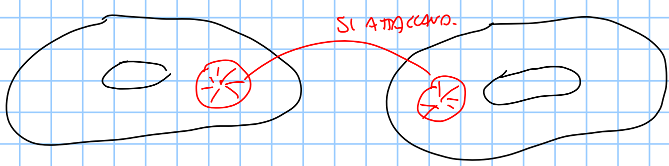
$$b^m(M\times N) = \sum_{k=0}^{m} b^k(M)\cdot b^{m-k}(N)$$

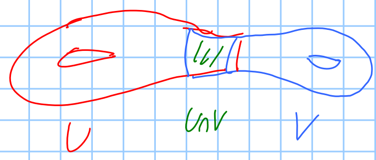
COROLLARIO $T = S^1\times S^1$ HA 1 2 1 COME NUMERI DI BETTI

$$b^1(T) = \overset{1}{b^1(S^1)}\cdot \overset{1}{b^0(S^1)} + \overset{1}{b^0(S^1)}\,\overset{1}{b^1(S^1)} = 2$$

COR $M = \underbrace{S^1\times\dots\times S^1}_{m\text{-VOLTE}}$ $\quad b^k(M) = \binom{m}{k}$

SOMMA CONNESSA (RICORDA)





QUESTO SI PRESTA BENE A MEYER VIETORIS. DI $M\# N$

STEP 1 BETTI DA $M\to U$ e $N\to V$

STEP 2 USARSI PER BETTI DI M SOMMA CONNESSA a N

Ex M e N CONNESSE, COMPATTE, ORIENTATE, SENZA BORDO

$$b^i(M\# N) = b^i(M) + b^i(N) \qquad 0 < i < m$$

COROLLARIO BETTI DI S_g 1 2g 1

DIM $S_g = \underbrace{T\#\dots\# T}_{g}$

SOTTOVARIETÀ e COOMOLOGIA

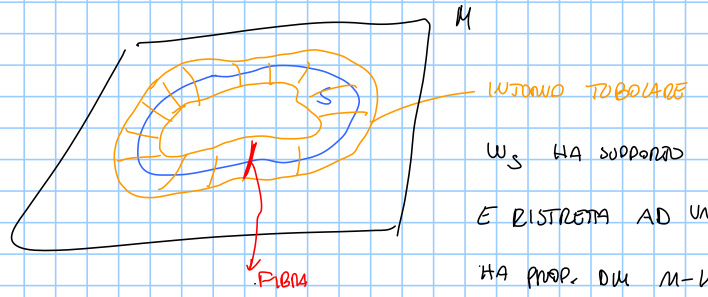
SE M^m COMPATTA, CONNESSA E ORIENTATA E SENZA BORDO

SE $S^k\subset M^m$ SOTTOVARIETÀ COMPATTA ORIENTATA $\int_S : H^k(M)\longrightarrow \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \int_S \in H^k(M)^* \overset{\text{Poinc.}}{=} H^{m-k}(M) \ni [S]$$

Qual è la $m-k$ che può rappresentare S? (domanda lecita)

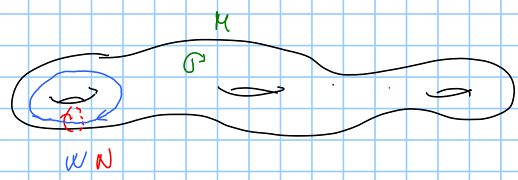
Posso rapp. $[S]$ $\quad \omega_S \in \Omega^{m-k}(M)$ con $[S]=[\omega_S]$



ω_S ha supporto sull'intorno tubolare e ristretta ad una fibra (che ha prop. dim $m-k$) ω_S è a campana.

$\boxed{\text{Trasversalità e coomologia}}$

M (con le 4 ipotesi belle)

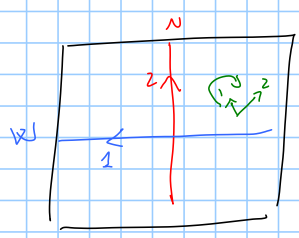


W, N sottovarietà belle di M

<u>OSS</u> se $W \pitchfork N = S$ è naturalmente orientato (non dice come)

Se W e N hanno dim 1 e S è unione finita di punti

Passando al TG del disegno



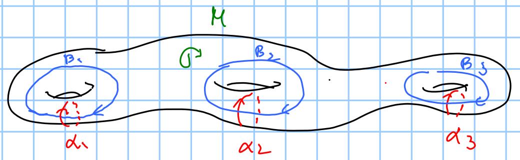
Quindi S ha un'orientazione $+$ perché coerente con quella di M.

(se facessi $N \pitchfork W$)

<u>TEO</u> $\quad W \pitchfork N = S \Rightarrow [W]\wedge[N] = [S]$

codimensioni $k \quad h \quad k+h$ $\qquad [W] \in H^k \quad [N] \in H^h \quad [S] \in H^{k+h}$

Ricordando $H^1(S_g) = \mathbb{R}^{2g}$ esiste b antisimmetrica $\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ si vede



$\mathbb{R}^6$

$[\beta_j] \in H^1(S_3)$

$[\alpha_j] \in H^1(S_3)$

COROLLARIO

$$b : H^k(M) \times H^{m-k}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\omega, \eta) \longrightarrow \int_M \omega \wedge \eta$$

SE W HA cod k e N cod $m-k$ SOTTOVARIETÀ

SE $W \pitchfork N \Rightarrow b([W], [N]) = \sum \text{SEGNI} (W \pitchfork N)$

ALLORA SCRIVO LA MATRICE DI b CON $[\alpha_i]$ $[b_j]$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I_3 \\ I_3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{[\alpha_j] \; [\beta_j]\} \text{ SONO UNA BASE}$$

W $\mathbb{CP}^m$

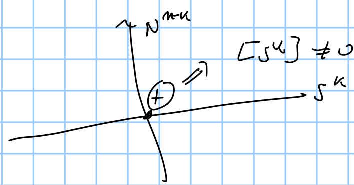
è INTERESSANTE $b : \underset{[S^k]}{H^{2k}(\mathbb{CP}^m)} \times \underset{[N^{m-k}]}{H^{2m-2k}(\mathbb{CP}^m)} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad H^*(\mathbb{CP}^m)$ $\mathbb{R}, 0, \mathbb{R}, 0$

$S^k \subseteq \mathbb{CP}^m$ SOTTOSPAZIO DI cod k (COMPLESSO) (2k REALE)

$\cong$

$\mathbb{CP}^{m-k}$ $\qquad [S^k] \in H^{2k}(\mathbb{CP}^m) = \mathbb{R}$ è UN GENERATORE

$\forall S^k \; \exists \; N^{m-k} \qquad S^k \pitchfork N^{m-k}$



$[S^k] \neq 0 \Rightarrow$ è UN GENERATORE.

LEZIONE 25

Titolo nota 10/05/2019

GEOMETRIA RIEMANNIANA

DEF M LISCIA g METRICA RIMANNIANA (CIOÈ SU TM) (g DEF + APPROCCI)

LA COPPIA (M, g) SI DICE VARIETÀ RIEMANNIANA

DEF UNA ISOMETRIA È UN DIFFEOMORFISMO $\varphi : M \to N$ TRA VARIETÀ RIMANNIANE (M, g), (N, h) TALE CHE $g_p(v, w) = h_{\varphi(p)}(d\varphi_p(v), d\varphi_p(w))$

$\forall p \in M \quad \forall v, w \in T_pM$

OSS $\underset{\text{SOTTOGRUPPO}}{\mathrm{Isom}(M) \subseteq \mathrm{Diffeo}(M)}$ (FOLCLORE: $\mathrm{Isom}(M)$ È SEMPRE UN GRUPPO DI LIE (DIFFICILE DA DIM))

ES 1) $(\mathbb{R}^n, g_E)$ METRICA EUCLIDEA $\quad (g_E)_p(x, y) = {}^t x \, y$

MODI X COSTRUIRE METRICHE

2) $U \subseteq \mathbb{R}^n$

g_p È UNA MATRICE SIMMETRICA DEFINITA POS CHE VARIA IN MODO LISCIO $\forall p \in U$

3) $g_p = f(p) \, I_n$ CON $f : U \to \mathbb{R}_{>0}$ LISCIA

DEF $$\cos\theta = \frac{g_p(v, w)}{\sqrt{g_p(v,v)}\sqrt{g_p(w,w)}}$$ (ANGOLI TRA VETTORI)

NOMENCLATURA g SI CHIAMA TENSORE METRICO.

LUNGHEZZA DI UNA CURVA

DEF $\gamma : I \to M \qquad \gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$

$$L(\gamma) = \int_I \|\gamma'(t)\| \, dt$$

OSS VALGONO LE SOLITE PROP. DEGLI INTEGRALI CURVILINEI.

e IN PARTICOLARE $L(\gamma)$ è INVARIANTE PER RIPARAMETRIZZAZIONE

SIA $\varphi: J \to I$ DIFFEO $\gamma \circ \varphi = \tilde{\gamma}$ e $L(\gamma \circ \varphi) = L(\gamma)$

$$\int_J \|(\gamma \circ \varphi)'(t)\| dt \overset{\varphi t = s}{=} \int_I \|\gamma'(s)\| ds$$

DEF (M,g) VARIETÀ RIEMANNIANA, M CONNESSA

$p, q \in M$

$$d(p,q) = \inf \{ L(\gamma) \mid \gamma : [a,b] \to M \quad \gamma(a) = p \quad \gamma(b) = q \}$$

OSS inf PUÒ NON ESSERE MIN, $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ PRESI DUE PUNTI TIPO $(-1,0)$ $(1,0)$

LA DISTANZA È 2 MA NON È UN MIN

PROP (M,d) È UNO SPAZIO METRICO COMPATIBILE CON LA TOPOLOGIA DI M

DIM
- $d(p,q) \geq 0$ e $d(p,q) = 0 \iff p = q$ ($\Rightarrow$ NON BANALE UNICA COSA CHE DIMOSTRIAMO)
- SIMMETRIA $d(p,q) = d(q,p)$
- DIS TRIANGOLARE $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$ STANDO ATTENTO A CONCATENARE LE DUE CURVE RIPARAMETRIZZANDO IN MODO CHE L'ATTACCATURA SIA LISCIA

$\Downarrow$

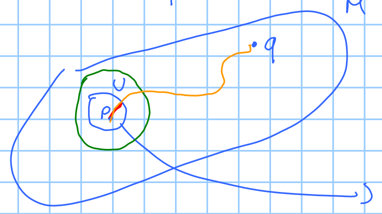
STO USANDO UNA NOZIONE PIÙ DEBOLE DI RIPARAMETRIZZAZIONE

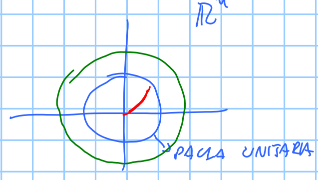
$$J \xrightarrow{\varphi} I \xrightarrow{\gamma} M$$

CHIEDO SOLO $\varphi' \geq 0$ E NON DIFFEO.

PRESI $p \neq q$ DIMOSTRO CHE ESISTE $\varepsilon > 0$

$$0 < L(\sim) < L(\sim) \quad \forall \sim$$





φ è DIFFEO, TRASPORTA LA METRICA DI M SU $\mathbb{R}^n$ IN g_{ij}

IN SOSTANZA $\forall \varepsilon > 0$ / $\forall \gamma$ tc' γ COLLEGA O A $R \in S^{n-1}$ $L(\gamma) \geq \varepsilon$

SE g_{ij} $L_E(\gamma) \geq 1$

$$\int_I \|\gamma'(t)\|_E \, dt$$

EUCLIDEA

INOLTRE $\forall p \in \mathbb{R}^n$ $\exists \alpha, \beta$.

$\alpha \|v\|_E \leq \|v\|_g \leq \beta \|v\|_E$ (LE NORME SONO EQUIVALENTI)

e α e β POSSONO ESSERE SCELTE IN MODO DA DIPENDERE DA p IN MODO LISCIO.

QUINDI PER COMPATTEZZA $\exists$ $m = \min_{p \in D^n} \alpha(p)$

$\forall v \in T_p D^n$ $\forall p \in D^n$

$$\Rightarrow 0 < m \leq \int \|\gamma'(t)\|_E \cdot m \leq \int \|\gamma'(t)\|_g = L_g(\gamma)$$

(SISTEMARE I DETTAGLI MA L'IDEA È CHIARA)

VOLUME

(M, g) METRICA RIEMANNIANA ORIENTATA $\Rightarrow$ $\omega \in \Omega^n(M)$ FORMA VOLUME.

DEF/PROP M, N RIEMANNIANE $\Rightarrow$ $M \times N$ STRUTTURA RIEMANNIANA IN MODO NATURALE

$T_{(p,q)} M \times N = T_p M \times T_q N$ PRODOTTO SCALARE INDOTTO.

LEZIONE 26

Titolo nota 01/06/2019

LEZIONE 27

Titolo nota 16/05/2019

(M, g) e una connessione ∇

DEF ∇ e g sono **compatibili** se il trasporto parallelo è un'isometria

PROP Data (M, g) e ∇ sono equivalenti

i) ∇ e g sono compatibili

ii) $\forall\ \gamma$ curva immersa, X, Y campi su γ

$$\frac{d}{dt} \langle X(t), Y(t) \rangle = \langle \frac{D}{dt} X(t), Y(t) \rangle + \langle X(t), \frac{D}{dt} Y(t) \rangle$$

iii) $\forall\ p \in M$, $v \in T_pM$, X e Y vicino a p

$$\underbrace{v \langle X, Y \rangle}_{\text{derivata rispetto a } v} = \langle \underbrace{\nabla_v}_{\text{derivata covariante}} X, Y \rangle + \langle X, \nabla_v Y \rangle$$

iv) In (ogni) carta deve valere

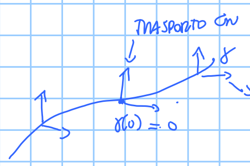
g_{ij} Γ_{ij}^k $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{ei} \Gamma_{kj}^e + g_{ej} \Gamma_{ki}^e$ nel punto.

DIM ii) $\Rightarrow$ i) facile

se X e Y sono paralleli $\left(\frac{DX(t)}{dt} = 0 \right)$

$\Rightarrow \langle X(t), Y(t) \rangle =$ costante $\Rightarrow$ il trasporto parallelo conserva g $\Rightarrow$ è un'isometria.

i) $\Rightarrow$ ii)



li chiamo ancora $e_1 \dots e_n \in T_{\gamma(t)}M$ i trasportati

a $t = 0$ scelto $e_1, \dots, e_n \in T_pM$

ortonormale rispetto a g

la compatibilità mi dice che con il trasporto

restano una base ortonormale

$X = X^i e_i$ $\quad Y = Y^i e_i$ (oss X^i Y^i e_i dipendono da t)

CI SONO DEI -1 DATO LA g NON DEF POS.

$$\frac{d}{dt}\langle X(t), Y(t)\rangle = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} X^i Y^i \left(= X^i Y^j g_{ij}^{*} \right) = \sum_i \frac{dX^i}{dt} Y^i + Y^i \frac{dY^i}{dt}$$

e_i BASE ORTONORMALE

EVENTUALI I

$$\frac{DX}{dt} = \frac{D}{dt}(X^i e_i) = \frac{dX^i}{dt} e_i + X^i \underset{0}{\underset{\parallel}{De_i}}$$

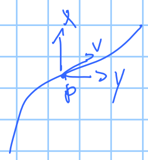
È UNA FUNZIONE

OSS I -1 SI SISTEMANO PERCHÈ COMPAIONO ALLO STESSO INDICE DATO DA $\langle e_i, e_i \rangle$

PERCHÈ e_i ORTONORMALE

$$\left\langle \frac{DX}{dt}, Y \right\rangle = \sum_i \frac{dX^i}{dt} Y^i$$

ii) $\Leftrightarrow$ iii)



TOLGO IN (ii) LA DIP. DA γ E VIENE (iii) DALLA DEF DI ∇

iii) $\Leftrightarrow$ iv)

DEVO SCRIVERE LA (iii) IN CARTE $\forall p$ $\forall v$ $\forall X$ e $\forall X$

$$V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$V^l \frac{\partial}{\partial x^l}\left(X^i g_{ij} Y^j\right) = g_{il}\left(V^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + V^j X^k \Gamma^i_{jk}\right) Y^l +$$
$$+ g_{il}\left(V^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} + V^j Y^k \Gamma^i_{jk}\right) X^l$$

$\parallel$

$$\cancel{V^l \frac{\partial X^i}{\partial x^l} g_{ij} Y^j} + \cancel{V^l X^i g_{ij} \frac{\partial Y^j}{\partial x^l}} + V^l \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} X^i Y^j = \left(\cancel{g_{il} V^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} Y^l} + g_{il} V^j X^k \Gamma^i_{jk} Y^l\right)$$
$$+ \left(\cancel{g_{il} V^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} X^l} + g_{il} V^j Y^k \Gamma^i_{jk} X^l\right)$$

$$\cancel{V^l} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \cancel{X^i} \cancel{Y^j} = g_{ij} \cancel{V^j} \cancel{X^k} \Gamma^i_{jk} \cancel{Y^l} + g_{il} \cancel{V^j} \cancel{Y^k} \Gamma^i_{jk} \cancel{X^l}$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} = g_{ij} \Gamma^i_{jk} + g_{il} \Gamma^i_{jk}$$ (SISTEMANDO GLI INDICI HO CATESI)

TEOREMA

DATA (M,g) $\exists!\ \nabla$ (DETTA DI LEVI-CIVITA) CHE SIA SIMMETRICA E COMPATIBILE CON g. IN CARTE $\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\right)$ $(\square)$

DIM MOSTRO CHE IN CARTA ∇ SIMMETRICA E COMPATIBILE $\Rightarrow$ IN CARTE VALE $(\square)$

SI PRENDE $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{li}\Gamma^l_{kj} + g_{lj}\Gamma^l_{ki}$ SI PERMUTANO ijk E SI SCRIVE 3 VOLTE

SI SOMMA E SI DOVREBBE OTTENERE $(\square)$

$\Leftarrow$ IN CARTA SE Γ^k_{ij} LI DEFINISCO CON $(\square)$ $\Rightarrow$ ∇ VIENE SIMM. E COMPATIBILE

SCAMBIO i E j E TORNA. SOST. IN $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$

DEF BEN POSTA PER L'UNICITÀ.

ISOMETRIA

$$\begin{array}{ccc} (M,g) & \xrightarrow{\psi} & (N,h) \\ \vdots & & \vdots \\ \nabla^M & \dashrightarrow & \nabla^N \end{array} \qquad \psi \text{ ISOMETRIA}$$

LEVI CIVITA

(IN GENERALE $M \xrightarrow[\text{DIFFEO}]{\sim} N$, $\nabla^M \dashrightarrow \nabla^N$)

SOTTOVARIETÀ: $N \subseteq M$ SOTTOVARIETÀ

$g_M \dashrightarrow g_N$ $\quad \forall p \in N$ $\quad g_p : T_pN \times T_pN \to \mathbb{R}$, $\quad T_pN \times T_pN \subseteq T_pM \times T_pM$

E SE g_M È DEF + ANCHE g_N LO È

LE FORME VOLUME NON PASSANO | MA PASSANDO $g_M \to g_N$ INDUCE FORME VOLUME E UNA ∇^N

$\nabla \not\to$ LE CONNESSIONI NON PASSANO

ALLORA UNO SI CHIEDE CHE CI SIA TRA LA CONNESSIONI IN M E N

PROP $N \subseteq M$ (M,g) RIEMANNIANA (ALLORA ANCHE $(N,g|)$ LO È)

∇^M CONNESSIONE SU M E ∇^N CONNESSIONE INDOTTA DA $g|$

SIA $X \in \mathfrak{X}(N)$ $\quad v \in T_pN$ CON $p \in N$ $\quad \boxed{\nabla^N_v X = \pi(\nabla^M_v X)}$

$\forall$ ESTENSIONE DI X IN UN APERTO DI M

$T_pN \xleftarrow{\pi} T_pM$ $\qquad \pi =$ PROIEZIONE INDOTTA A g

DIM SIA ∇ CONNESSIONE SU N

$$\nabla_v X = \pi\left(\nabla_v^M X\right)$$

ESERCIZIO ∇ È UNA CONNESSIONE SIMMETRICA E COMPATIBILE CON g DEFINITA SU N

ALLORA PER LEVICIVITA $\nabla = \nabla^N$ (O VEDERE LIBRO).

ESEMPIO $(\mathbb{R}^m, g_e)$

$N^n \subseteq \mathbb{R}^m$ SOTTOVARIETÀ

$$\nabla_v^N X = \pi\Big(\underbrace{\nabla_v^{\mathbb{R}^m}}_{\text{VEDIAMO CHI È}} X\Big) = \pi\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)$$ È LA PROIEZIONE DI UNA DERIVATA DIREZIONALE DI UNA QUALSIASI ESTENSIONE.

$\Gamma_{ij}^k = 0$ PERCHÈ $g_{ij} = \delta_{ij}$ E LE SUE DERIVATE SONO ZERO

$\boxed{\text{GEODETICHE}}$

(M, ∇) (NON SERVE g)

DEF UNA GEODETICA È UNA CURVA $\gamma : I \longrightarrow M$ (IMMERSIONE $\gamma'(t) \neq 0$)

TALE CHE $\gamma'(t)$ È PARALLELO RISPETTO A γ

RICORDIAMO X CAMPO SU γ SE $\overset{\text{IN CARTE}}{V}$ $0 = \frac{DX}{dt} = \frac{dX^k}{dt}(t) + \gamma'(t)^i X(t)^j \Gamma_{ij}^k$

IN CARTE γ È UNA GEODETICA $\Longleftrightarrow$ $\ddot{x}^k(t) + \dot{x}(t)^i \dot{x}(t)^j \Gamma_{ij}^k(x(t)) = 0$

USANDO $\gamma(t) = x(t)$ (COME I FISICI)
$X(t) = \dot{x}(t)$

DEF UNA GEODETICA $\gamma : I \to M$ È MASSIMALE SE NON SI ESTENDE A UNA GEODETICA $\eta : J \to M$ CON $I \subsetneq J$

PROP $\forall p \in M$ $\forall v \in T_pM$ ESISTE UNICA GEODETICA MASSIMALE $\gamma_v : I_v \to M$
TC $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$

OSS $0 \in I_v$

DIM L'EQ DI PRIMA MI DA UN SISTEMA DI EQ. DIFF. AL SECONDO ORDINE E $\gamma_v(0)=p$ e $\gamma_v'(0)=v$ MI DANNO UN PROBLEMA DI CAUCHY E QUINDI HO L'ESISTENZA E UNICITÀ DELLA MASSIMALE.

OSS SE ERO PARTITO $(M,g) \dashrightarrow \nabla$ (LEVI CIVITA), γ GEODETICA

$\Rightarrow \quad \|\gamma'(t)\| =$ COSTANTE

OVVIO PERCHÈ $\gamma'(t)$ È PARALLELO A $\gamma(t)$ E QUINDI SI TRASPORTA IN UN VETTORE A LUI ISOMETRICO

DEF CON UN PO' DI ABUSO γ_0 È LA GEODETICA COSTANTE (ANCHE SE NON È UN'IMMERSIONE)

PROP (M, ∇) $\quad p \in M \quad v \in T_pM \quad \gamma_v : I_v \longrightarrow M$ GEODETICA MASSIMALE

γ_v E $\gamma_{\lambda v}$ SONO LA STESSA CURVA RIPARAMETRIZZATA

$$\gamma_v(\lambda t) = \gamma_{\lambda v}(t)$$

DIM VERIFICANO LE STESSE CONDIZIONI INIZIALI DEL PROB. DI CAUCHY

FLUSSO GEODETICO

(M, ∇) INDUCE UN CAMPO VETTORIALE SU TM

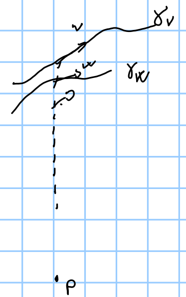
$v \in TM$ DEVO DEFINIRE $X(v) \in T_v(TM)$

$$v \longrightarrow \gamma_v : I_v \longrightarrow M \qquad \begin{aligned} \gamma_v(0) &= p \\ \gamma_v'(0) &= v \end{aligned}$$

$\gamma_v' : I_v \longrightarrow TM$ CON $\gamma_v'(t) \in T_{\gamma(t)} M$

$\Rightarrow \quad X(v) = d(\gamma_v')_0(1) \in T_v(TM)$ (È MORALMENTE LA DERIVATA SECONDA)

TM



M

PER COSTRUZIONE LE CURVE INTEGRALI DI X

SONO LE GEODETICHE MASSIMALI

DEF ALLORA IL FLUSSO ϕ ASSOCIATO A X SI CHIAMA FLUSSO GEODETICO

LEZIONE 28

Titolo nota 17/05/2019

FLUSSO GEODETICO

(M,g) VARIETÀ RIEMANNIANA,

$\forall v \in TM \quad \exists\, \gamma_v : I_v \longrightarrow M$ GEODETICA MASSIMALE

$\gamma'_v : I_v \longrightarrow TM \qquad X(v) = d(\gamma'_v(0))(1) = "\gamma''_v(0)"$

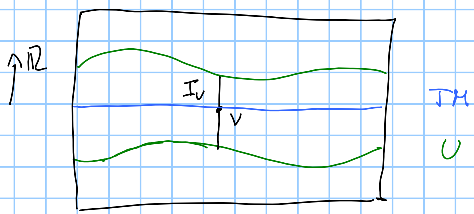
È LISCIO PERCHÉ $\gamma_v(t)$ DIPENDE IN MODO LISCIO DAI DATI INIZIALI v e p

LE LINEE INTEGRALI DI X SONO $\gamma'_v : I_v \longrightarrow TM$

ALLORA IL FLUSSO $\phi : U \longrightarrow TM \qquad U \subseteq TM \times \mathbb{R}$ INTORNO DI $TM \times \{0\}$

ASSOCIATO A X

$\Rightarrow \; U \cap (\{v\} \times \mathbb{R}) = \{v\} \times I_v$



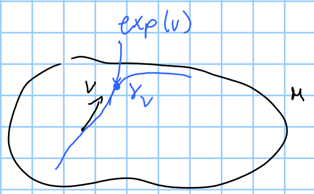
MAPPA ESPONENZIALE

- MATRICI
- $\mathfrak{g} \longrightarrow G$ exp

} GIÀ VISTI

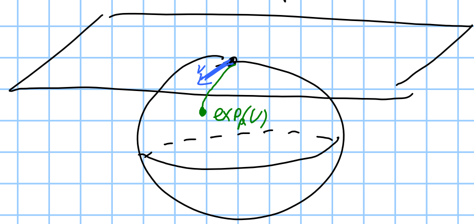
DEF $\exp : V \longrightarrow M \qquad V \subset TM \qquad V = \{v \mid 1 \in I_v\}$

$v \longmapsto \gamma_v(1)$



DEF

DATO $p \in M \qquad V_p := V \cap T_pM \qquad \exp_p = \exp|_{V_p} \qquad \exp_p : V_p \longrightarrow M$



PROP V è un aperto (in particolare V_p è aperto)

V_p è un aperto stellato in $0 \in T_pM$

Ricordando $\gamma_{cv}(t) = \gamma_v(ct)$ segue dove è definito $\boxed{\exp_p(tv) = \gamma_v(t)}$

DIM V è aperto perché si scrive in funzione di U e U è aperto

$V = \{v \mid v \times [0,1] \subset U\}$

La relazione di riscalamento ci dà il fatto che è stellato

$\exp_p(tv) = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t)$

PROP $\exp_p : V_p \subset T_pM \longrightarrow M$ è un diffeomorfismo loc in $0 \in V_p$

DIM $d(\exp_p)_0 : T_pM \longrightarrow T_pM$ è l'id $(\exp_p(0) = p)$ quindi è invertibile

$v \longrightarrow d(\exp_p)_0(v) = \gamma'_v(0) = v$

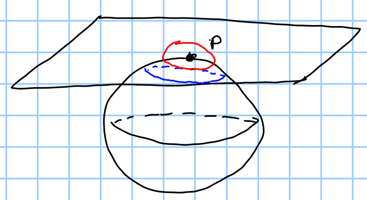
Allora è diffeo locale.

Con $\exp_p : V_p \longrightarrow M$ si usa $\exp_p$ come "carta"

identifico $T_pM \cong \mathbb{R}^n$ con un isometria data mandando base ortonormale di T_pM nella base canonica, quindi questa carta è quasi canonica

dipende solo dalla scelta della base in T_pM.

DEF Le coordinate $x_1 \dots x_n$ che derivano da $\exp_p$ sono dette coordinate normali



Identifico $T_pM \cong \mathbb{R}^n$

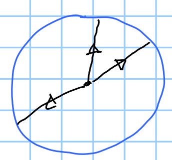
Poiché $\exp_p$ è diffeo loc

$\Rightarrow \exists r > 0$ t.c. $\exp_p|_{B(0,r)} : B(0,r) \hookrightarrow M$ è diffeo

con l'immagine

L'immagine $\exp_p(B(0,r))$ è una palla geodetica e lì sopra ci sono le coordinate $x_1 \dots x_n$ coordinate normali

su quella palla c'è una metrica g_{ij}



PRIMA INF: LE CURVE CHE ESCONO DALL'ORIGINE CON V COSTANTE SONO GEODETICHE

PROP IN COORDINATE NORMALI (SONO MOLTO VICINO A ESSERE LA METRICA RIEMANNIANA)

1) $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$ 2) $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(0) = 0$ (NON È DETTO LE DERIVATE SECONDE SIANO

3) $\Gamma^k_{ij}(0) = 0$ 4) $\frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x^l}(0) + \frac{\partial \Gamma^k_{jl}}{\partial x^i}(0) + \frac{\partial \Gamma^k_{li}}{\partial x^j}(0) = 0$

DIM 1) DERIVA DALLA DEF

3) $x(t) = tv$ È UNA GEODETICA PER $t < \|v\|$ E $\forall v$ INFATTI

$$\ddot{x}^k + \dot{x}^i \dot{x}^j \Gamma^k_{ij} = 0$$

$$0 + v^i v^j \Gamma^k_{ij}(0) = 0 \Rightarrow \Gamma^k_{ij}(0) = 0$$

4) DERIVANDO L'EQ DELLE GEODETICHE

$$\cancel{\dddot{x}^k} + \cancel{\ddot{x}^i \dot{x}^j \Gamma^k_{ij}} + \dot{x}^i \cancel{\ddot{x}^j} \Gamma^k_{ij} + \dot{x}^i \dot{x}^j \frac{\partial \Gamma^l_{ij}}{\partial x^l} \dot{x}^l = 0$$

$$v^i v^j v^l \frac{\partial \Gamma^l_{ij}}{\partial x^l}(0) = 0 \Rightarrow 4) \text{ IN MODO NON BANALE}$$

2) $$\frac{\partial \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{g}}{\partial x} = \overset{1)}{g}\,\overset{\overset{3)}{0}}{\Gamma} + \overset{1)}{g}\,\overset{\overset{3)}{0}}{\Gamma} \text{ IN } t=0 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(0) = 0$$

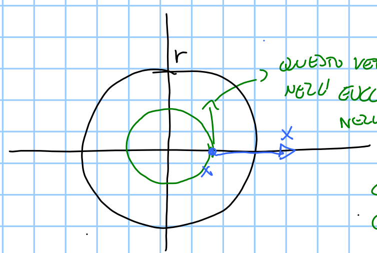
OSS NELL'ORIGINE LE NORME DEI VETTORI È QUELLA EUCLIDEA E QUEI VETTORI IN $B(0,\delta)$ VENGONO TRASPORTATE DALLA GEODETICA NELLA METRICA g_{ij} $\Rightarrow \forall x \in B(0,\delta)$ $\boxed{x^j g_{ij} x^i = x^j x^i g_{ij}}$

LEMMA DI GAUSS: $x \in B(0,r)$

E SIA $r = x^j x^i g_{ij}$

$\Rightarrow B(0,r')$ È ORTOGONALE ALLE GEODETICHE

$x(t) = tv$



QUESTO VETTORE È ORTOGONALE A X NELL'EUCLIDEA MA LO È ANCHE NELLA NUOVA METRICA

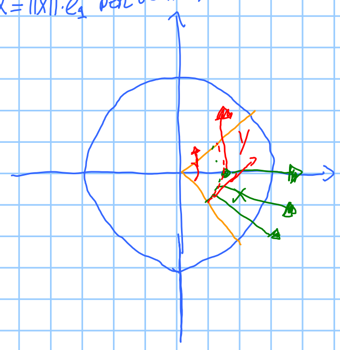
CIOÈ TUTTE LE $B(0,r')$ CON r' SONO $\perp$ ALLE GEODETICHE

DIM SIA $Y \perp X$ IN METRICA EUCLIDEA (SCELTO $X = \|X\| \cdot e_1$ PER SEMPL.)

E PRENDO Y TALE CHE NELLA NORMA EUCLIDEA ABBIA LA STESSA X

CIOÈ $y^j \delta_{ij} y^i = x^j \delta_{ij} x^i$

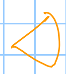
(MI METTO SU $B(0,r) \cap$ PIANO GENERATO DA X e Y)



LI x LO ESTENDO AL CAMPO X CHE

È COSTANTE SULLA RETTA PER L'ORIGINE

E RUOTA IN TUTTO IL SETTORINO.



y LO ESTENDO AL CAMPO Y CHE SIA COSTANTE LUNGO LE CIRCONFERENZE E

SI RISCALA DIRETTAMENTE PROPORZIONALE ALLA DISTANZA DALL'ORIGINE.

PER COSTRUZIONE I CAMPI X e Y COMMUTANO PERCHÈ COMMUTANO I LORO

FLUSSI PER COSTRUZIONE. QUINDI $[X,Y]=0$

ORA USO g E LE COORDINATE POLARI (ρ, ϑ)

$$\underset{\text{SCOPO}}{0} = \frac{d}{d\rho}\langle X, Y\rangle = \underbrace{\langle \nabla_{e_1} X, Y\rangle}_{=0} + \langle X, \nabla_{e_1} Y\rangle = \frac{1}{\|X\|}\langle X, \nabla_X Y\rangle$$

0 PERCHÈ X È GEODETICA e e_1 È LA SUA DERIVATA COVARIANTE È 0

$$\nabla_{e_1} Y = \frac{1}{\|X\|}\nabla_X Y$$

PERCHÈ $\Rightarrow$ PER $\rho \to 0$ $Y = 0$

$\Rightarrow \langle X, Y\rangle$ È COSTANTE

E $\langle X, Y\rangle \xrightarrow[\rho\to 0]{} \langle X, 0\rangle = 0$

VEDIAMO CHE $\langle X, \nabla_X Y\rangle = 0$

$$0 \overset{\text{PER IPOTESI}}{=} T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - \underbrace{[X,Y]}_{=0} = 0 \Rightarrow \nabla_X Y = \nabla_Y X$$

$$\langle X, \nabla_Y X\rangle, \quad \underbrace{\frac{1}{2}\frac{d}{dg}\langle X, X\rangle}_{=0} = \frac{1}{2}\langle \nabla_Y X, Y\rangle + \underbrace{\langle X, \nabla_Y Y\rangle}_{=0}$$

0 IN MODO ANALOGO A PRIMA

PERCHÈ $\langle X, X\rangle$ È SEMPRE LA STESSA LUNGHEZZA

E QUINDI LA SUA DERIVATA RADIALE È ZERO

PERCHÈ SULLO STESSO RAGGIO HANNO LA STESSA LUNGHEZZA

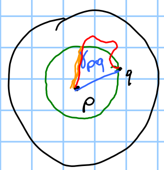
(VEDERE MEGLIO SUL LIBRO)

DEF (M,g) RIEMANNIANA, UNA CURVA $\gamma : I \to M$ È MINIMIZZANTE SE $\forall\, t_1 < t_2 \in I$ $\quad d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = L(\gamma|_{[t_1,t_2]})$

ESERCIZIO SE $I = [a,b]$ $\quad \gamma : [a,b] \to M$ $\quad \gamma$ È MINIMIZZANTE

$$\iff \quad d(\gamma(a), \gamma(b)) = L(\gamma)$$

PROP $\forall q \in \exp_p(B(0,r))$ PALLA GEODETICA, γ_{pq} È MINIMIZZANTE, UNICA A MENO DI RIPARAMETRIZZAZIONE.



γ_{pq} GEODETICA VEL. COST. DALL'ORIGINE

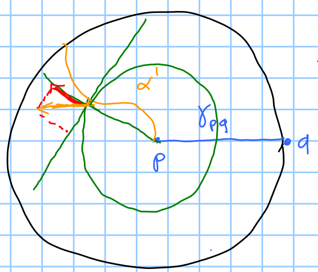
— α

— α'

DIM SIA α UNA CURVA IN M DA p IN q CON $L(\alpha) \leq L(\gamma_{pq})$

AD UN CERTO PUNTO α DEVE PASSARE DALLA PALLA VERDE (QUELLA PICCOLA CON RAGGIO pq COSTRUITA NEL LEMMA DI GAUSS)

O IN q O IN UN ALTRO PUNTO. SIA $\alpha' \subset \alpha$ IL TRATTO DI α DA p AL PRIMO INCONTRO CON LA PALLA, VOGLIO MOSTRARE CHE $L(\alpha') > L(\gamma_{pq})$ SE $\alpha' \neq \gamma_{pq}$



POICHÈ PER IL LEMMA DI GAUSS GLI ASSI VERDI SONO ORTOGONALI ANCHE PER LA METRICA g $\Rightarrow$

PER LE PROP. DELLE PROIEZIONI ORTOGONALI IN T_xO HO CHE LA LUNGHEZZA DI α' È $>$ DELLA SUA COMPONENTE RADIALE α'_r

$$L(\alpha') = \int_0^T \|\alpha'(t)\|\,dt > \int_0^T \|\alpha'_r(t)\|_g\,dt = \underbrace{\int_0^T \|\alpha'_r(t)\|_e\,dt}_{\text{ES ANA II} \; L(\gamma_{pq})}$$

OSS SULLE COMPONENTI RADIALI DALLA DIM DI GAUSS SEGUE CHE SULLE COMPONENTI RADIALI LE METRICHE g e e DANNO LE STESSE LUNGHEZZE.

LEZIONE 29

Titolo nota 23/05/2019

(M,g) VARIETÀ RIEMANNIANA

$\exists \; V \subseteq TM \quad \exp \; V \longrightarrow M$
$v \longrightarrow \gamma_v(1)$

$V_p = V \cap T_pM \qquad \exp : V_p \longrightarrow M$

$\exists \, r>0$ t.c. $\exp|_{B(0,r)} : B(0,r) \hookrightarrow M$ EMBEDDING (SE r È ABB PICCOLA), LA SUA IMMAGINE È CHIAMATA

PALLA GEODETICA

LE COORD NORMALI. SI IDENTIFICA $\mathbb{R}^n \overset{\text{ISOMETRIA}}{\cong} T_pM$

$B(0,r) \subset T_pM$ LA IDENTIFICO CON $B(0,r) \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \exp : B(0,R) \longrightarrow M$ È UN EMBEDDING $\Rightarrow$ DIFFEO ALLORA È UNA PARAMETRIZZAZIONE. QUINDI LA RELATIVA CARTA MI DICE CHE LA PALLA GEODETICA LA MANDO IN $B(0,R) \subseteq \mathbb{R}^n$ TRASPORTANDO LA METRICA $g_{ij}(x)$ e $\Gamma_{ij}^k(x)$

(CANCELLARE LA PARTE SULLA DERIVATA DI Γ_{ij}^k DELLA SCORSA LEZIONE C'È UN ERRORE)

COROLLARIO (DEL LEMMA DI GAUSS)

SE $\exp_p|_{B(0,R)}$ È UN EMBEDDING ALLORA $\exp_p(B(0,r)) = B(p,r)$

CON $B(p,r) = \{ q \in M \mid d(p,q) < r \}$

DIM $\subseteq$) PERCHÉ I PUNTI NELL'IMMAGINE STANNO A DISTANZA $< r$ PER COSTRUZIONE

$\supseteq$) GRAZIE AL LEMMA DI GAUSS

DEF UN APERTO $U \subseteq M$, M RIEMANNIANA, SI DICE TOTALMENTE NORMALE SE $\forall p \in U \; \exists \; B(p,r) \supseteq U$

PROP OGNI PUNTO HA UN INTORNO TOTALMENTE NORMALE.

DIM $TM \supseteq V \xrightarrow{\psi} M \times M$

$(p,v) \longmapsto (p, \exp_p(v))$

$v \longmapsto (\pi(v), \exp_{\pi(v)}(v))$

$$d\psi_{(p,0)} = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline * & d(\exp_p)_0 \end{array}\right), \qquad d(\exp_p)_0 = I$$

ψ È DIFFEO LOC IN $(p,0)$

$\exists$ W INTORNO DI p e $\delta > 0$ e $W' = \{(q,v) \mid q \in W, \ \|v\| < \delta\}$

TALE CHE $\psi|_{W'} : W' \to M \times M$

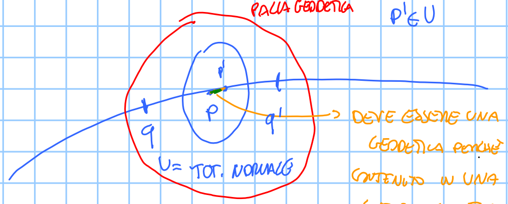
PRENDO $U(p)$ t.c. $U(p) \times U(p) \subseteq$ IMMAGINE DI $\psi|_{W'}$

$\Rightarrow$ $U(p)$ È TOT NORMALE

TEOREMA (M,g) LE CURVE LOCALMENTE MINIMIZZANTI SONO ESATTAMENTE LE GEODETICHE RIPARAMETRIZZATE

DIM ENTRAMBE LE DEFINIZIONI SONO LOCALI QUINDI LO VERIFICO IN $p \in \gamma$

$\Rightarrow$)



$p' \in U$

DEVE ESSERE UNA GEODETICA PERCHÈ CONTENUTO IN UNA PALLA GEODETICA E SI TROVA SU UN SEGMENTO MINIMIZZANTE

($\gamma'(t) \neq 0 \ \forall t$ SEMPLICE)

$\Leftarrow$) COSA SIMILE. (SI È INCARTATO)

OSS INTORNI TOTALMENTE NORMALI SONO BELLI PERCHÈ $\forall p,q \in U$ $\exists!$ γ_{pq} CURVA (A MENO DI RIP.) CHE È MINIMIZZANTE

COMPLETEZZA

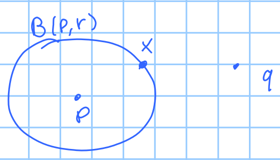
DEF (M,g) GEODETICAMENTE COMPLETA SE TUTTE LE GEODETICHE ESISTONO $\forall t$ $\Leftrightarrow$ V = dom mappa $\exp = TM$

$\exp : TM \to M$

PROP M COMP. GEODETICA e CONNESSA $\Rightarrow$ $\forall p,q \in M$ $\exists$ GEODETICA MINIMIZZANTE

COR SE M È CONNESSA E GEODETICAMENTE COMPLETA ALLORA $\exp_p : T_pM \to M$ È SURIETTIVA $\forall p \in M$

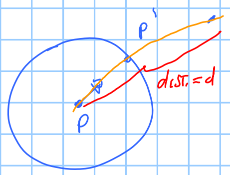
DIM PROP



$B(p,r)$ PALLA GEODETICA

$S(p,r)$ È IL BORDO DI UNA PALLA GEODETICA CHE STA IN UN'ALTRA PALLA G. (QUELLE DEL LEMMA DI GAUSS)

$d : S(p,q) \longrightarrow \mathbb{R}$ e p' è il min.
$x \longrightarrow d(x,q)$



SIA $v \in T_pM$, $\|v\|=1$ t.c. $\gamma_v(r) = p'$

È definita per tutti i tempi.

$\Rightarrow$ poiché M è completa allora $\gamma_v : \mathbb{R} \longrightarrow M$

Allora la tesi $\gamma_v(d) = q$.

Sia $I = \{ t \in [0,d] \mid d(\gamma_v(t), q) = d - t \}$

$I \neq \emptyset$ perché $0 \in I$, I è chiuso perché la condizione è chiusa

Completare per esercizio che I è aperto.

Step 1 dopo $t=0$ c'è una cosa del tipo $[0,r) \subset I$ (si usa il lemma di Gauss)

Step 2 far vedere con un punto a caso interno

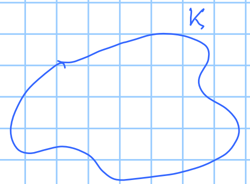
Dim. conclusa partendo da p "sparando" tutte le geodetiche copro tutto.

TEOREMA (Hopf-Rinow) (M,g) connessa, sono equivalenti

1) M geodeticamente equivalente
2) $K \subseteq M$ è compatto $\Longleftrightarrow$ K è chiuso e limitato.
3) M completa (come spazio metrico)

① $\Rightarrow$ ② K compatto $\Rightarrow$ K chiuso e limitato sempre vero.

Devo far vedere che K chiuso e limitato $\Rightarrow$ K compatto.



$\exists D$ t.c. $d(p,q) < D$ $\forall q \in K$ (uso K limitato)

$\underbrace{\exp_p(\overline{B(0,D)})}_{\text{compatto}} \supseteq K$ (per la suriettività D può essere grande a piacere)

Poiché $\exp_p$ è continua $\Rightarrow$ K è chiuso in un compatto $\Rightarrow$ compatto

2) $\Rightarrow$ 3) roba di spazi metrici

3) $\Rightarrow$ 1) SUPPONIAMO $\exists\ \gamma$ GEODETICA MASSIMALE $\gamma : (0,T) \to M$

LE GEODETICA È C-LIP PERCHÈ $\|\gamma'(t)\| = C$

SIA $t_n \to T$ $t_n \in (0,T)$ $\Rightarrow \{\gamma(t_n)\}$ È UNA SUCC. DI CAUCHY

(OSS NON È FINITA LA DIM. γ È DEF. SU UN APERTO)

$\Rightarrow$ $\gamma(t_n)$ CONVERGONO AD UN P. Y PRENDO UN INTORNO TOT NORMALE DI P

ALLORA LÌ SE UNA GEODETICA ENTRA ESCE E QUINDI SI PROLUNGA.

<u>ESEMPI</u> $\forall\ n$ $\mathbb{R}^n$ S^n $\mathbb{H}^n$ (SONO LE 3 VARIETÀ PIÙ BELLE)

SPAZIO IPERBOLICO

$\mathbb{H}^n \not\subset \mathbb{R}^{n+1}$ NO

<u>MODELLO DELL'IPERBOLOIDE</u> (MODO ALGEBRICO)

$\mathbb{R}^{n+1}$ $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n - x_{n+1}y_{n+1}$ $(n,1)$

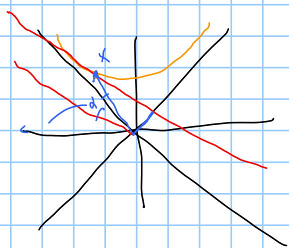
SPAZIO DI MINKOWSKY

$I^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x,x\rangle = -1, x_{n+1}>0\}$

$n=2$ è un'iperboloide a 2 falde

LA COSA BELLA CHE I^n CON LA METRICA INDOTTA DA QUELLA LORENZIANA HA UNA METRICA DEF POSITIVA

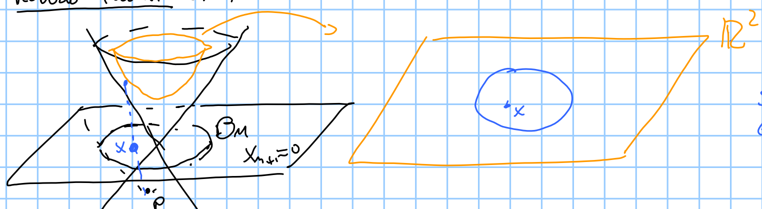
<u>Ex</u> $x \in I^n$ $T_xI = x^\perp$



CHE $\mathbb{R}^{n,1} = x \oplus x^\perp$ CHE $\eta|_{x^\perp}$ È DEF POSITIVA.

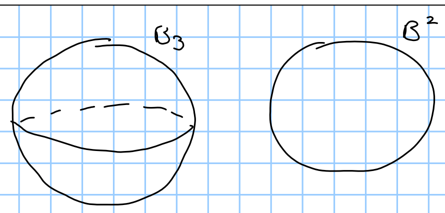
DEF POS

<u>MODELLO</u> (DELLA PROIEZIONE)



$p = (0,\dots,0,-1)$

SI SCRIVE LA PROIEZIONE (DIFFEO) E SI TRASPORTA IL TENSORE METRICO.



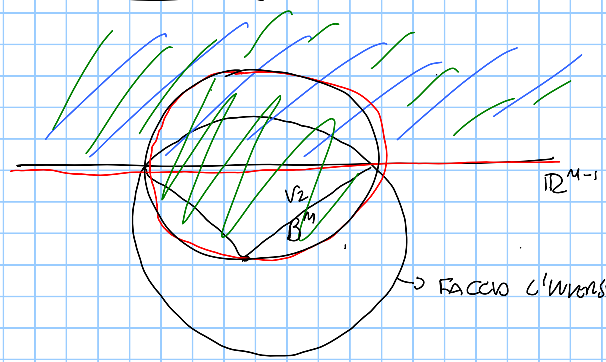
FATTO IL TENSORE METRICO SU $B_n(0,1)$

g_E È QUELLO EUCLIDEO

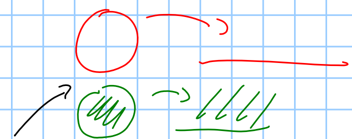
$$\left(\frac{2}{(1-\|x\|^2)}\right)^2 g_E(x) = g_H(x)$$

$$\mathbb{H}^n = (B^n, g_H)$$

MODELLO DEL DISCO



$H^n = \{ x_n > 0 \}$



FACCIO L'INVERSIONE LUNGO LA SFERA

IL NUOVO TENSORE METRICO SU H^n $\quad g_{H^n}(x) = \boxed{\frac{1}{x_n^2} g_E(x)}$

LEZIONE 30

Titolo nota 24/05/2019

COR (M,g) RIEM. CPT $\Rightarrow$ GEOD. COMPLETA

DIM M CPT $\Rightarrow$ M COMPLETA (S. METRICO) $\Rightarrow$ GEOD. COMP.
$\downarrow$
H.R

COR $N \subseteq M$ CHIUSA M GEOD. COMPLETA $\Rightarrow$ N GEOD. COMPLETA

DIM M GEOD. COMP. $\Longleftrightarrow$ M è COMPLETA LASCIAMO IN SOSPESO

SPAZIO IPERBOLICO

$\mathbb{H}^n = I^n \quad D^n \quad H^n$. $\qquad I^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ $(n,1)$

$$I^n = \{ \langle x, y \rangle = -1 \, , \, x_{n+1} > 0 \}$$

PROP Sia $p \in X = S^n$ o $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$ sia $v \in T_p X$ $\|v\| = 1$

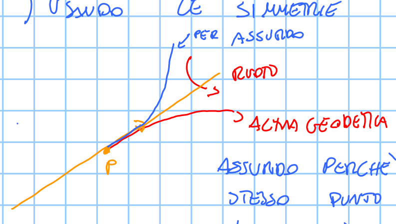
1) $X = \mathbb{R}^n$ $\quad \gamma_v(t) = p + tv$

2) $X = S^n$ $\quad \gamma_v(t) = \cos t \, p + \sin t \, v$

3) $X = \mathbb{H}^n$ $\quad \gamma_v(t) = \cosh t \cdot p + \sinh t \, v$

DIM 1) $\ddot{x}_k + \dot{x}_i \dot{x}_j \Gamma^k_{ij} = 0$ $\qquad \Gamma^k_{ij} = 0 \Rightarrow \ddot{x}_k = 0$ RETTE A VELOCITÀ COSTANTE.

1bis) USANDO LE SIMMETRIE



ASSURDO PERCHÈ SE SONO 2 GEODETICHE MA PARTONO DALLO STESSO PUNTO CON LO STESSO V, ALLORA IL SUPPORTO È LA RETTA LA VELOCITÀ COSTANTE QUINDI γ_V è QUELLO SOPRA.

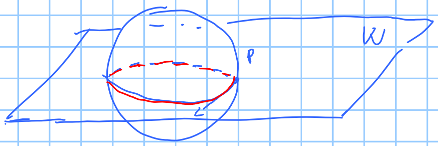
PROP: $f : M \to N$ ISOMETRIA

$\gamma : I \to M$ GEODETICA $\Rightarrow$ $f \circ \gamma : I \to N$ È UNA GEODETICA.

COR $f : M \to M$ ISOMETRIA $f(p) = p$ $df_p(v) = v$ $\Rightarrow$ $f \circ \gamma_v = \gamma_v$

2) $v \in p^\perp \Rightarrow p$ e v sono indipendenti $\Rightarrow W = \mathrm{span}(p, v)$

CHIAMO $r = W \cap S^n \Rightarrow \mathrm{supp}(\gamma$



SIA $\rho_W : \mathbb{R}^{n+1} = W \perp W^\perp \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$
$(w, w') \longrightarrow (w, -w')$

$\rho_W \in O(n+1) \Rightarrow \rho_W \in O(n+1) \subset \mathrm{Isom}(S^n)$

$\rho_W(p) = p \quad \rho_W(v) = v \Rightarrow \mathrm{supp}\,\gamma_v \subset r$

OSS 1) $O(n+1) \subseteq \mathrm{Isom}(S^n)$

MANDA $S^n \to S^n$ E ANCHE SUI TANGENTI È UNA ISOMETRIA.

2) $O^+(n,1) < GL(n+1)$ e $O^+(n,1) \subseteq \mathrm{Isom}(I^n)$

$\{ f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ tc $\langle x, y\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle$ PRODOTTO LORENTZIANO, $f(0,\dots,0,x_{n+1}) > 0$

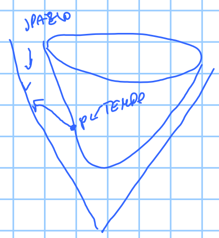
$= \left\{ A \,\middle|\, {}^tAJA = J \right.$ CON $J = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$, $\left. a_{n+1,n+1} > 0 \right\}$

ALTRIMENTI SCAMBIO LE 2 FALDE.

3) IN MODO ANALOGO

$W = \mathrm{span}(p, v)$

$\Rightarrow$ LA SEGNATURA RISTRETTA A W È $(1,1)$ NON DEGENERE



$\mathbb{R}^{n+1} = W \oplus W^\perp$

$r = W \cap I^n$ (È UN'IPERBOLE SU W)

$\rho_W \in O^+(n,1) \subset \mathrm{Isom}(I^n)$ e FISSA p e $w \Rightarrow \gamma_v \subseteq r$

USANDO $\langle p, p\rangle = -1 \qquad \langle w, w\rangle = 1$ e $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$

SI DIMOSTRA CHE $\gamma_v(0) = p \quad \gamma_v'(0) = v \quad \gamma_v \in r$ e $\|\gamma_v'\| = 1$

COR $\mathbb{R}^n \quad \mathbb{H}^n \quad S^n$ SONO COMPLETI

ESERCIZIO $\cos(d(p,q)) = \langle p, q\rangle$ in S^n

$\cosh(d(p,q)) = -\langle p, q\rangle$ in $\mathbb{H}^n$

GEODETICA DI VEL 1

$t = \text{tempo} = d(p,q)$

$\cos t\, p + \sin t\, v = q$, FACCIO PRODOTTO SCALARE CON p

$\cos(d(p,q)) = \langle p, q\rangle \qquad \langle p, v\rangle = 0$

DEF Una varietà riemanniana è iperbolica / euclidea / sferica se $\forall p \in M$ $\exists$ $U(p)$ isometrico $\mathbb{H}^n / \mathbb{R}^n / S^n$

ESEMPIO $M = X^n/\Gamma$ $\quad \Gamma < \mathrm{Isom}(M)$ che agisce in modo libero e propriamente discontinuo

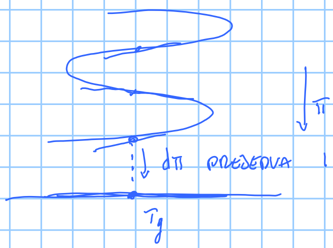
TEOREMA X^n/Γ ha strutt. $\mathbb{H}^n / \mathbb{R}^n / S^n$ a seconda del modello X

DIM $M = X^n/\Gamma$. $\quad \Gamma \curvearrowright X^n$ tramite diffeo

$$X^n \xrightarrow{\pi} X^n/\Gamma = \text{var } C^\infty$$

è un rivestimento.

Allora le strutture tornano sopra ma poiché Γ agisce in modo ciclico le cose si portano da sopra a sotto le isometrie.



$d\pi$ preserva i prodotti scalari. Allora X^n/Γ guadagna la stessa struttura riemanniana.

ESEMPI

1) $\mathbb{P}^n = S^n/\Gamma$ $\quad \Gamma = \{ id, i \} < O(n+1) < \{\text{Isom. } S^n\}$ (i antipodale)

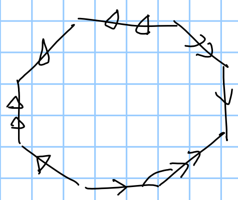
2) $L(p,q) = S^3/\Gamma$ $\quad \Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{Rot}\,\varphi & 0 \\ 0 & \mathrm{Rot}\,\psi \end{pmatrix} \right\} < SO(4)$

3) $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = \mathbb{T}^n$ $\quad \mathbb{Z}^n < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ ($\mathbb{Z}^n$ gruppo delle traslazioni.)

4)

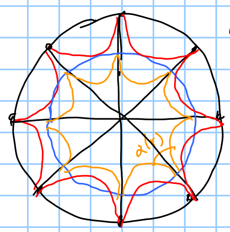
Sferica $\quad$ Eucl $\quad$ Iperbolica.

in teoria $\mathbb{H}^2/\Gamma$ $\quad \Gamma < O(2,1)$ ma non è per niente facile



$\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow$ AVREI UNA STRUTTURA EUCLIDEA DI S_g CON $g=2$

NEL PIANO IPERBOLICO



OTTAGONO REGOLARE

POLIGONO IDEA

$\alpha(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$ $\qquad$ $\alpha(r) \in \left(0, \frac{3}{4}\pi\right)$ $\quad \downarrow r \to 0$

$\Rightarrow \exists\, r$ tc L'OTTAGONO HA ANGOLO $\frac{\pi}{4}$

<u>TEOREMA</u> $f, g : M \to N$ ISOMETRIE, M CONNESSA e COMPLETA.

SUPPONIAMO $\exists\, p$ tc
1) $f(p) = g(p)$
2) $df_p = dg_p$

$\Big\}$ COINCIDONO AL PRIMO ORDINE $\Rightarrow f(q) = g(q) \quad \forall q \in M$

<u>DIM</u>

$p \longrightarrow f(p)$

$q \longrightarrow f(q)$

$\Rightarrow f(q) = g(q)$

SICCOME È COMPLETO γ_v GEODETICA CON $\|v\| = 1$ γ COLLEGA p A q

MA $f \circ \gamma_v = g \circ \gamma_v \Rightarrow f(q) = g(q) \ \forall q \in \operatorname{supp} \gamma_v$

<u>COR</u> UN <u>FRAME</u> IN M È $p \in M$ + $e_1 \ldots e_n$ BASE ORTONORMALE IN T_pM

$\operatorname{Isom}(M)$ AGISCONO IN MODO LIBERO SUI FRAME

<u>COR</u>

$\operatorname{Isom}(\mathbb{R}^n) = O(n) \ltimes \mathbb{R}^n \qquad Ax + b$

$\operatorname{Isom}(\mathbb{H}^n) = O(n)$

$\operatorname{Isom}(S^n) = O^+(n)$

<u>DIM</u> È CHE I GRUPPI CANDIDATI GIÀ AGISCONO IN MODO TRANSITIVO SUI FRAME

ALLORA OGNI ISOMETRIA È UNO DI QUESTI ELEMENTI.

LEZIONE 31

Titolo nota 28/05/2019

(solo x cultura)

$\mathbb{H}^n$, $\mathbb{R}^n$, S^n ($= X^n$ quando intendo uno dei 3)

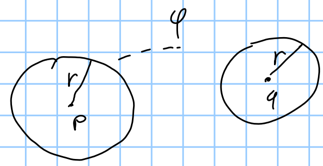
DEF (M,g) è iperbolica / euclidea / sferica se è loc. isometrica a $\mathbb{H}^n / \mathbb{R}^n / S^n$

ESERCIZIO $\mathrm{Isom}(X^n)$ agiscono in modo (libero) e transitivo sui frame

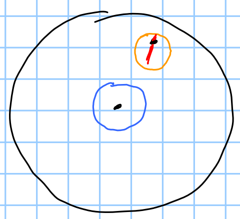
COROLLARIO $B(p,r)$ non dipende da p

cioè $\forall p,q$ $\exists\, \varphi \in \mathrm{Isom}(X^n)$ $\varphi(p)=q$

e $\varphi(B(p,r)) = B(q,r)$



In modo intuitivo: le palle nel modello del disco

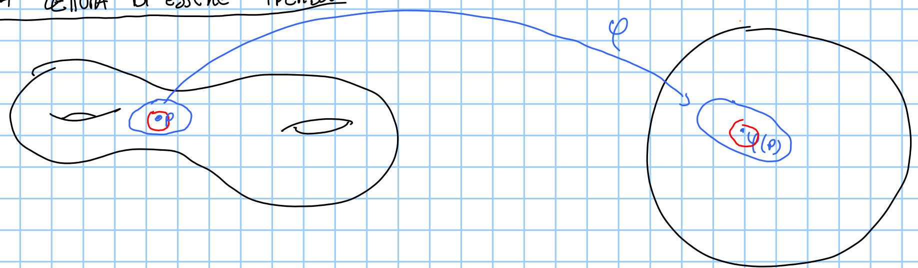


Nell'origine il centro è lui è una palla

○ un punto qualsiasi è una palla ma il centro è spostato

/ sono uguali in lunghezza

Altra lettura di essere iperbolico

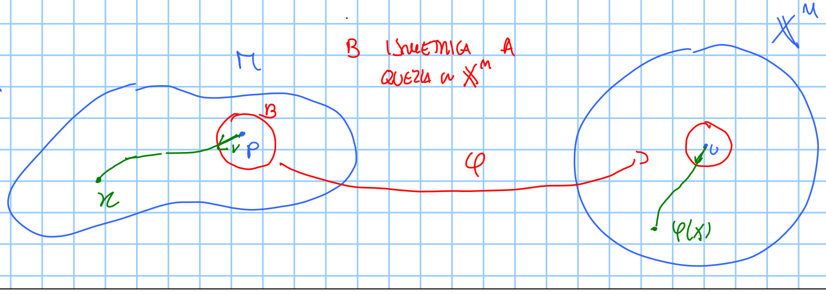


○ = palle geodetiche isometriche

TEO Se M è iperbolica / euclidea / sferica connessa, semplicemente connessa (serve per buona def) e completa $\Rightarrow$ M è isometrica X^n

DIM

B isometrica a quella in X^n



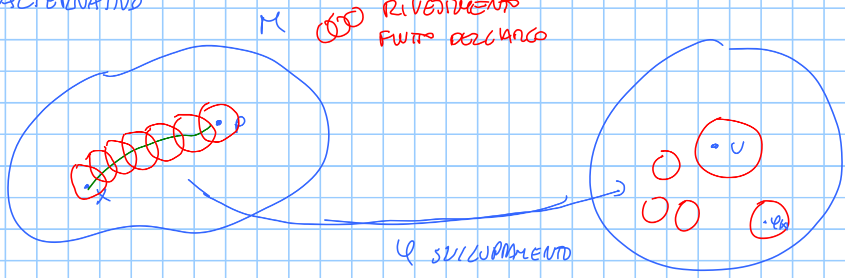
CLAIM $\exists!$ estensione di φ ad un isometria di M

IDEA DELLA COSTRUZIONE

SIA $x \in M$ SIA γ UN TRAGITTO TRA x e P, QUINDI PRENDO V VETTORE UNITARIO CHE VIENE MANDATO IN UN VETTORE IN U E MANDO X NELLA FINE DELLA GEODETICA CHE PARTE DA U e HA LA STESSA LUNGHEZZA IN M.

PROBLEMA: QUESTA POTREBBE NON ESSERE BEN DEFINITA PERCHÈ NON SO NEANCHE CHE LE GEODETICA TRA P e X è UNICA

MODO ALTERNATIVO



EX $f: M \to N$ CONNESSE, M COMPLETA f ISO LOC $\Rightarrow$ f RIVESTIMENTO.
(È QUI CHE SERVE)

$\Rightarrow$ φ è DETTA MAPPA SVILUPPANTE CHE "RIATTACCA LE PALLE" IN X^n

- RIVESTIMENTO
- ISO LOCALE

$\Rightarrow$ OMEO + ISO LOC $\Rightarrow$ ISOMETRIA

COR (M, g) è IPERBOLICA / EUCLIDEA / SFERICA COMPLETA CONNESSA $\Leftrightarrow$ X^n/Γ CON $\Gamma < \mathrm{Isom}(X^n)$ CHE AGISCE IN MODO LIBERO E PROP. DISC.

DIM $\boxed{\triangle}$ PERCHÈ IL QUOZIENTE è COMPLETO? (VEDI EX PER CASA)

EX $f: M \to N$ CONNESSE ISOMETRIA LOC e RIVESTIMENTO
M COMPLETA $\Leftrightarrow$ N COMPLETA.

$$\begin{array}{c} X^n \\ \downarrow \\ M = X^n/\Gamma \end{array}$$
è UN RIVE. E ISO COMPLETA e X^n è COMPLETA

$\boxed{\Rightarrow}$ M è IPERBOLICA (EUCLIDEA / SFERICA) COMPLETA.

$\widetilde{M} \longrightarrow$ LEI EREDITÀ UNA STRUTTURA RIEMANNIANA

$\downarrow$ RIVESTIMENTO UNIVERSALE + È UN ISOMETRIA LOCALE POICHÉ LA STRUTTURA PASSA

M

$\Rightarrow \widetilde{M}$ È IPERBOLICA + $\widetilde{M}$ È COMPLETA. PER ESERCIZIO

+ $\widetilde{M}$ È SEMP. CONNESSO $\Rightarrow$ PER TEO $\widetilde{M}$ È ISOMETRICO A $\mathbb{X}^n$

$\mathbb{X}^n$ RIVESTIMENTO UNIVERSALE REGOLARE $\Rightarrow$ $M = \mathbb{X}^n/\Gamma$ ← SOTTOGRUPPO DI $\mathrm{Aut}(\mathbb{X}^n)$

$\downarrow$ TOPOLOGIA

LIBERA E MODO DISC

E SONO ISOM LOC PER

COME È COSTRUITO IL RIVESTIMENTO

M

$\Rightarrow$ GLI ELEMENTI DI Γ ISOMETRIE.

DEF UNA VARIETÀ COMPLESSA È UNA VARIETÀ TOPOLOGICA DI DIMENSIONE $2n$

CON ATLANTE $\mathcal{A} = \{ \varphi_i : U_i \longrightarrow V_i \}$ $V_i \subseteq \mathbb{C}^n$

φ_{ij} SIANO BIOLOMORFISMO. (OLOMORFE SE $n=1$)

PER $n=1$ C'È UNA STORIA SIMILE A PRIMA (SUPERFICI DI RIEMANN)

TEOREMA (DIFFICILE) UNIFORMIZZAZIONE DI RIEMANN

OGNI SUP. DI RIEMANN CONNESSA È BIOLOMORFA $\mathbb{C}$, $\mathbb{CP}^1$, $\Delta = \{ z \mid |z|<1 \}$ $(= \mathbb{Y}$ UNO DEI 3$)$

$H^2 = \{ z \mid \mathrm{Im}\, z > 0 \}$

O UN QUALSIASI APERTO IN $\mathbb{C}$ CHE NON SIA $\mathbb{C}$.

EX (ANALISI COMPLESSA)

- $\mathrm{Biol.}(\mathbb{C})$ $(\mathbb{C} \to \mathbb{C})$ SONO SOLO $f(z) = az+b$ CON $a \neq 0$ (LINEARI)
- $\mathrm{Biol}(\mathbb{P}^1\mathbb{C})$ SONO $\left\{ f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} \,\middle|\, \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0 \right\}$ (MAPPE DI MÖEBIUS)
- $\mathrm{Biol}(H^2) = \left\{ f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} \,\middle|\, a,b,c,d \in \mathbb{R} \quad \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} > 0 \right\}$

PROP S SUP. DI RIEMANN $\Longleftrightarrow$ $S = \mathbb{Y}/\Gamma$ $\Gamma < \mathrm{Biol}(\mathbb{Y})$ CHE AGISCE IN MODO LIBERO E PROP. DISCONTINUO.

DIM (ANALOGA A PRIMA) $\boxed{\Rightarrow}$ $\widetilde{S}$ RIVESTIMENTO UNIVERSALE. $\widetilde{S}$ COMPLESSA $\Rightarrow$ OLOMORFA A UNA $\mathbb{Y}$

$\downarrow$

S

$\Rightarrow$ $S = Y/\Gamma$ CON Γ O STESSO RAGIONAMENTO $\Gamma < Biol(X)$

$\Leftarrow$) ANALOGO

OSS IN ANALISI COMPLESSA NON È SENSATO CHIEDERE LA COMPLETEZZA SULLE VARIETÀ COMPLESSE

COLLEGAMENTO $Isom^+(\mathbb{H}^2) = Biol(H^2)$

ESERCIZIO $Isom^+(H^2) = \left\{ \varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d} \;\middle|\; \begin{array}{l} a,b,c,d \in \mathbb{R} \\ ad-bc>0 \end{array} \right\}$

$g^H = \frac{1}{x^2} g_E$

$H^2 \subseteq \mathbb{C}$

COROLLARIO $\left\{ \begin{array}{l} \text{SUP. COMPLESSE} \\ \text{CON RIVESTIMENTO } H^2 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{SUP. IPERBOLICHE} \\ \text{COMPLETE} \end{array} \right\}$ (DI SOLITO $\Rightarrow$ È QUELLO CHE SI CHIAMA UNIFORMIZZAZIONE DI RIEMANN)

H^2/Γ

(TORNA LA PARTE DA SAPERE BENE)

$\boxed{\text{CURVATURA}}$

M E UNA CONNESSIONE ∇ $(g \dashrightarrow \nabla)$

DEF TALI $p \in M$ e $u, v, w, \; T_pM$ SIANO X, Y, Z ESTENSIONI DI u, v, w IN $U(p)$

NON POSSO METTE W PERCHÉ DEVO DERIVARE IN $U(p)$

$$R(u,v,w) = \nabla_{\underset{\overset{\shortparallel}{u}}{X(p)}} \nabla_{\underset{\overset{\shortparallel}{v}}{Y(p)}} Z - \nabla_{\underset{\overset{\shortparallel}{v}}{Y(p)}} \nabla_{\underset{\overset{\shortparallel}{u}}{X(p)}} Z - \nabla_{[X,Y](p)} Z$$

$\searrow$ TENSORE DI RIEMANN

È DI PROP. 1-3

PROP NON DIPENDE DA X, Y, Z

DIM SCRIVENDO X e Y Z IN COORDINATE

$$\nabla_X \left(Y^i \frac{\partial Z^j}{\partial x^i} e_j + Y^i Z^j \Gamma_{ij}^k e_k \right) = X^k \frac{\partial Y^i}{\partial x^k} \frac{\partial Z^j}{\partial x^i} e_j + \underline{Y^i \frac{\partial^2 Z^j}{\partial x^k \partial x^i}} X^k e_j +$$

POTREI USARE u

$$+ \underline{X^k Y^i \frac{\partial Z^j}{\partial x^i}} \Gamma_{jk}^e e_e +$$

$$+ X^l \frac{\partial Y^i}{\partial x^e} Z^j \Gamma_{ij}^k X_k + X^e \underline{Y^i \frac{\partial Z^j}{\partial x^e}} \Gamma_{ij}^l e_k + X^l Y^i Z^j \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^e} e_k +$$

$$+ X^l Y^l Z^J \Gamma_{iJ}^{k} \Gamma_{kl}^{m} e_m$$

— SPARISCONO PERCHÉ SIMMETRICI IN X e Y (2° 3° e 5°)

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z = [X,Y]^i \left(\frac{\partial Z^J}{\partial x^i} e_J + Z^i \Gamma_{iJ}^{k} e_k \right) \left(= \nabla_{[X,Y]} Z \right) +$$

+ ROBA CHE DIPENDE SOLO DA U V W

CONVENZIONE CON GLI INDICI

$$\underbrace{R^i{}_{Jkl}} = R(e_k, e_l, e_J)^i = \text{ROBA AVANZATA} =$$

UN SOLO INDICE IN OGNI COLONNA E DIPENDE DALL'ORDINE

(cioè $J \to W$, $k \to U$, $l \to V$)

$$= \boxed{\frac{\partial \Gamma_{lJ}^{i}}{\partial x_k} - \frac{\partial \Gamma_{kJ}^{i}}{\partial x_l} + \Gamma_{km}^{i} \Gamma_{lJ}^{m} - \Gamma_{lm}^{i} \Gamma_{kJ}^{m}}$$

POSSO DEFINIRE

COME 0 4

$$R_{\underbrace{iJ}_{\text{ANTISIMMETRICO}}\underbrace{kl}_{\text{ANTISIMMETRICO}}} = R^m{}_{Jkl}\, g_{im}$$

LEZIONE 32

Titolo nota 30/05/2019

CURVATURA

TENSORE DI RIEMANN

(M, ∇) (IDEA: $g \overset{\text{LEVI-CIVITA}}{\dashrightarrow} \nabla$) WARNING: ∇ ALMENO SIMMETRICA

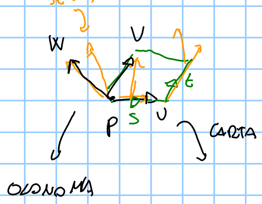
$$R(p)(X,Y,Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

$$\underset{w\ \ \ \ u\ v}{R^i_{\ jkl}} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{jl} - \Gamma^i_{ml}\Gamma^m_{jk} \quad \text{IN OGNI CARTA.}$$

ES SE $\mathbb{R}^n$ CON $g_E \Rightarrow R = 0$

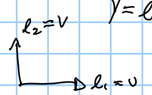
SIGNIFICATO GEOMETRICO

$h_{st}(W)$ È W TRASPORTATO DA X e Y



$u, v \neq 0$ e IND.

$Z = R(p)(u, v, W)$, X e Y CAMPI COMMUTANTI CHE ESTENDONO u e v



$Y = e_2$

$X = e_1$

SCELGO $s,t>0$ e VADO AVANTI IN X e Y POI TORNO INDIETRO E CHIUDO IL GIRO

$W \underset{\psi_{st}}{\longrightarrow} h_{st}(W) \in T_pM$ $\quad \psi_{st}: T_pM \to T_pM$ ISOMORFISMO

PROP $\quad h_{st}(W) = W + \underbrace{st\, R(u,v,W)}_{\text{QUANTO È VARIATO W QUANDO ARRIVA DOPO IL GIRO}} + o(s^2+t^2)$

OSS $\quad R(u,v,\cdot)\ T_pM \to T_pM$ È UN ENDOMORFISMO.

↘ LUI IN COORD.

$$R^i_{\ jkl}\, u^k v^l = T^i_j$$

IN COORDINATE NORMALI IN p (SOLO IN P)

$$R^i_{jke}(0) = \frac{\partial \Gamma^i_{je}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^e}$$

IN COORD. NORMALI

PROP $R_{ijke}(0) = \left(R^m_{jke}\, g_{mi} \right)(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{ie}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^e} - \frac{\partial^2 g_{je}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^e} \right)$

DIM (FACILE)

USARE $\Gamma = \frac{1}{2} g^{\cdot\cdot}\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial x} \right)$ e RICORDARSI $\frac{\partial g}{\partial x}(0) = 0$

PROP IN COORD NORMALI

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} - \frac{1}{3} R_{ikje}(0)\, x^k x^e + o(x^2)$$

SIMMETRIE

PROP IN QUALSIASI CARTA CARTA

1) $R_{ijke} = -R_{jike} = -R_{ijek} = R_{jiek}$ (ERA OVVIA IN COORD. NORMALI E IN 0)

2) $R_{ijke} = R_{keij}$

3) $R_{ijke} + R_{ikej} + R_{iejk} = 0$ (PRIMA IDENTITÀ DI BIANCHI).

IN GENERALE SE IN UN SISTEMA DI COORDINATE $T_{ij} = T_{ji}$ ALLORA VALE IN TUTTE LE BASI.

$\Downarrow$

$T(u,v) = T(v,u)$ IN GENERALE

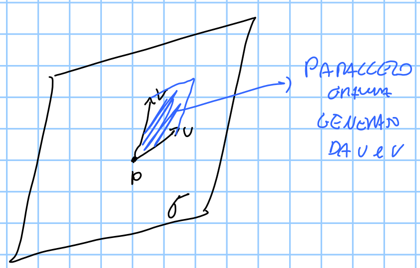
AD ESEMPIO 1) $R(u,v,w,z) = -R(v,u,w,z)$ $\forall u,v,w,z$.

CURVATURA SEZIONALE

SIA $p \in T_pM$ $\sigma \subseteq T_pM$ PIANO (SOTTOSPAZIO DIM 2) u,v GENERATORI DI σ

DEF LA CURVATURA SEZIONALE

$$K_\sigma = \frac{R(u,v,u,v)}{\text{AREA}^2(P)} \qquad \text{AREA}^2(P) = \|u\|^2\|v\|^2 - \langle u,v\rangle^2$$



PROP È BEN DEFINITA (NON DIPENDE DALLA BASE)

DATA u, v BASE OGNI ALTRA BASE È OTTENUTA DALLA MIA CON 3 POSSIBILI MOSSE

$(u,v) \to (v,u)$

$(u,v) \to (\lambda u, v)$, $(u, \lambda v)$

$(u,v) \to (u+\lambda v, v)$, $(u, v+\lambda u)$

E POI SI FA VEDERE CHE K_σ NON CAMBIA IN NESSUNO DI QUESTI CASI.

(SEMBRA CHE K_σ ABBIA MENO INFORMAZIONI MA C'È UN TEOREMA CHE DICE CHE SE CONOSCO K_σ $\forall \sigma \in T_pM \to$ CONOSCO R)

TENSORE DI RICCI

R_{ijkl} NE FACCIO SALIRE UNO A CASO E LO CONTRAGGO CON UN ALTRO (ES $R_{kj}{}^{k}{}_{l} = T_{jl}$)

UNICHE POSSIBILITÀ SONO 2 SOLE NON NULLE E UNA È L'OPPOSTA DELL'ALTRA

$$\overset{\text{RICCI}}{R_{ij}} = R^k{}_{ikj}$$

PROP IL TENSORE DI RICCI È SIMMETRICO

$$R_{ij} = R^k{}_{ikj}$$

$$R_{ji} = R^k{}_{jki} = R_{ljki}\, g^{lk} = R_{kilj}\, g^{lk} = R^l{}_{ilj} = R_{ij}$$

PROP (CHE SI ERA DIMENTICATO) $(\overset{\text{ORIENTATA}}{M}, g) \sim$ s IN CARTA ORIENTATA $U \subseteq \mathbb{R}^n$

$$g_{ij}(x) \in U$$

$$\overset{\text{FORMA VOLUME}}{\omega} = \sqrt{\det g_{ij}}\; dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

ESEMPIO $g = \frac{1}{x_n^2} g_E$ $\omega = \sqrt{\det g}\; dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n =$

$$= \frac{1}{x_n^n}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

DIM (NEL CUBO È CON GLI VOLUMI)

PER IL TEOREMA SPETTRALE $\Rightarrow g_{ij}(p)$ DIAG. $= \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ $a_i > 0$

LA LUNGHEZZA DI e_i È $\sqrt{a_i}$ – VOLTE QUELLE GIUSTA

E SULL'IPERCUBO

PROP IN COORD. NORMALI

$$\det(g_{ij}(x)) = 1 - \frac{1}{3} R_{ij}(0)\, x^i x^j + o(|x|^2)$$

DIM $\det(I+A) = 1 + \mathrm{tr}(A) + o(|A|^2)$ e RICCI È LA TRACCIA DI RIEMANN.

OSS g_{ij} R_{ij} SONO ENTRAMBE SIMMETRICHE MA

MA R_{ij} PUÒ ESSERE DEFINITE O NON DEF.

PER IL TEO SPETTRALE ESISTE UNA BASE DOVE R_{ij} È DIAG. E g_{ij} È ORT.

$\Rightarrow$ IN COOR. NORMALE $R_{ij}(0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix}$ SE λ_i È QUELLA DI MODULO MAX

MI DA LA DIREZIONE DOVE R_{ij} CRESCE DI PIÙ E QUINDI CI IL DET DI g_{ij}

DECRESCE DI PIÙ E CI QUINDI I VOLUMI DECRESCONO

EQ DI EINSTEIN M^4 LORENZIANA

$$T_{ij} = G_{ij} = R_{ij} - K \, R \, g_{ij}$$

COSTANTE

CURVATURA SCALARE (VEDREMO DOPO)

TENSORE CHE INDICA QUANTA MASSA E ENERGIA

CURVATURA SCALARE

$R(p) = R_{ij}\, g^{ij}$ (MISURA QUANTO VARIANO I VOLUMI DELLE PALLE)

PROP IN UN PUNTO p $\mathrm{Vol}(B(p,r)) = \mathrm{Vol}$ EUCLIDEO $(B(0,r))\left(1 - \frac{1}{6(n+1)} R(p)\cdot r^2 + O(r^4)\right)$

IN	$\mathbb{H}^n$	$\mathbb{R}^n$	S^n
K	-1	0	1

LE CURVATURE SEZIONALI SONO E SONO COSTANTI PER LE SIMMETRIE E IL TRASPORTO TRASLITE I FRAME.

TEOREMA SE $n=2$ (ASTRATTA) e $R \xrightarrow{} R_{ij} \longrightarrow R_{ijkl}$ (DETERMINA TUTTO)

e $R = 2K$ (CURVATURA GAUSSIANA SE È UNA SUP IN $\mathbb{R}^3$)

SE $n=3$ $\quad R \not\to R_{ij} \longrightarrow R_{ijkl}$

TEOREMA (M,g) IP / EUCLIDEA / SFERICA $\Longleftrightarrow$ M HA CURVATURA SEZ. COSTANTE $-1/0/1$

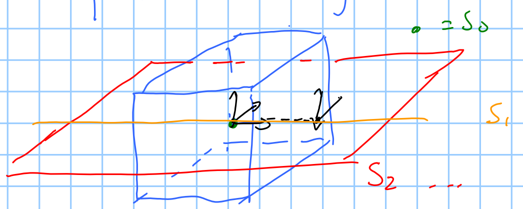
DIM

DIMOSTRIAMO SOLO M è EUCLIDEA $\Longleftrightarrow$ $\left(k=0 \Longleftrightarrow\right) R^i_{jkl} = 0$ (PIATTA)

$\Rightarrow$) In $\mathbb{R}^n$ euclideo $R^i_{jkl} = 0$

$\Leftarrow$) SIA $p \in M$ e COORD. NORMALI $\rightsquigarrow$ $p=0$ $\quad B(0,r) \supseteq (-\varepsilon,\varepsilon)^n$ IPERCUBO $-\varepsilon < x_i < \varepsilon$

$S^i = \{ x_{i+1} = \dots = x_n = 0 \}$



$e_1 \dots e_n \in T_0\mathbb{R}^n$ BASE ORTONORMALE $\quad g_{ij}(0) = \delta_{ij}$

ESTENDO LA BASE AD UN FRAME ORTONORMALE CIOÈ $X_1(p) \dots X_n(p)$ BASE ORTO DI $T_p\mathbb{R}^n$

COME LO FACCIO PRIMA LO ESTENDO SU S_1 (CON GRAM SCHMIDT SI ORTOGONALIZZA)

POI LO ESTENDO SU S_2 CON LE RETTE $\perp$ A S_1

e così via..

VIENE UN FRAME LISCIO PER LA DIPENDENZA DAI DATI INIZIALI

TESI $[X_i, X_j] = 0 \quad \forall i\, j \Rightarrow$ ESISTE UN RADDRIZZAMENTO (CARTA $\varphi : U(0) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)^n \to V \subseteq \mathbb{R}^n$)

$$\varphi_* X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

V CON METRICA EUCLIDEA

$g : (U, g) \to (V, g_E)$ DICO CHE φ È UN'ISOMETRIA (QUINDI M È LOC. ISOMETRICA A UN APERTO DI $\mathbb{R}^n$ CON g_E)

$X_1(p), \dots, X_n(p)$ SONO g ORTOGONALI $\Rightarrow d\varphi$ MANDA $X_1(p) \dots X_n(p) \to \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$

CIOÈ BASI ORTOGONALI IN BASI ORTOGONALI $\Rightarrow \varphi$ È UN'ISOMETRIA.

RESTA DA VEDERE CHE $R^i_{jkl} = 0 \Rightarrow [X_i, X_j] = 0$

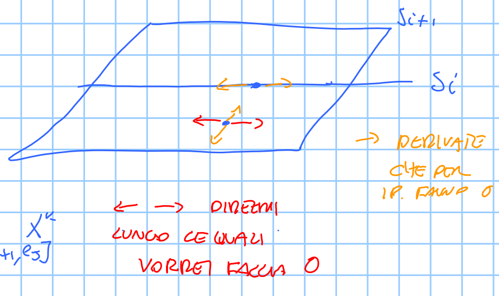
PER COSTRUZIONE $\nabla_{e_j} X^k = 0$ NEI PUNTI DI S_j PERCHÈ I CAMPI SONO ESTESI TRAMITE TRASPORTO PARALLELO.

CLAIM $\forall i = 1 \dots n \quad \nabla_{e_j} X^k \equiv 0$ NEI PUNTI DI S_i $\forall k$ e $\forall j \leq i$

PER INDUZIONE SU i $\quad i = 1$ CASO SOPRA PERCHÈ $j = i = 1$

$i \Rightarrow i+1 \qquad \nabla_{e_{i+1}} X^k \equiv 0$ SU S_{i+1} $\qquad \nabla_{e_j} X^k \equiv 0$ SU S_i $\forall j \leq i$

VORREI $\nabla_{e_j} X^k \equiv 0$ SU S_{i+1} $\forall j \leq i$



VOGLIO VEDERE $\nabla_{e_{i+1}} \nabla_{e_j} X^k \equiv 0$ (PERCHÈ BASTA??)

$\parallel \to$ POICHÈ e_{i+1} e e_j COMMUTANO QUINDI IN RIEMANN NON C'È $\nabla_{[e_{i+1}, e_j]} X^k$ E INOLTRE $R = 0$

$$\nabla_{e_j}\left(\nabla_{e_{i+1}} X^k\right) = 0$$

$\Rightarrow \forall i = n$ HO $\nabla_{e_j} X^k \equiv 0$ OVUNQUE $\forall j$ e k

OSS SICCOME LA TORSIONE È NULLA $\Rightarrow [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$

$\Rightarrow [X_i, X_j] = \nabla_{X_i} X^j - \nabla_{X_j} X^i$