Università di Pisa

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Teoria analitica dei numeri A

Chiara Bellotti

Anno Accademico 2020-2021

Note basate sul corso tenuto
dal Professore Giuseppe Puglisi
a.a. 2020-2021

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Riemann mostrò che la chiave per uno studio più profondo sulla distribuzione dei numeri primi risiede nello studio della funzione $\zeta(s)$ come funzione nella variabile complessa $s = \sigma + it$.
I principali risultati ottenuti da Riemann sono:

1. $\zeta(s)$ è prolungabile analiticamente come funzione meromorfa a $\mathbb{C}$ con un unico polo semplice in $s = 1$ di residuo pari a 1.
   Quindi
   $$\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1} \quad \text{per } s \to 1$$
   ovvero $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ è una funzione intera

2. Posto
   $$\xi(s) = \pi^{-s/2} \frac{s(s-1)}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$
   si ha che $\xi(s)$ è intera (quindi olomorfa su tutto il piano).
   Inoltre soddisfa la seguente equazione funzionale:
   $$\xi(s) = \xi(1-s)$$
   Questa funzione unita all'equazione funzionale permette il prolungamento analitico. (Osserviamo che il polo della funzione ζ è compensato da $(s-1)$, mentre Γ ha poli in tutti gli interi negativi e in 0, dove lo 0 viene compensato dal fattore s)

Definizione 1.1. *Si chiama **striscia critica** la seguente:* $0 \leq \sigma \leq 1, \ t \in \mathbb{R}$

Riemann formulò anche alcune congetture:

1. ζ ha infiniti zeri nella striscia critica distribuiti simmetricamente rispetto alla retta $\sigma = \frac{1}{2}$ e all'asse reale $t = 0$ (Questa simmetria segue dall'equazione funzionale. Questi zeri sono distribuiti simmetricamente perchè sono funzioni che su $\mathbb{R}$ sono reali e quindi assumono valori coniugati in punti coniugati. Come conseguenza, ciò che si annulla nel semipiano $t > 0$ si annulla anche nel semipiano $t < 0$ e viceversa).

2. Detto
$$N(T) = \{\rho = \beta + i\gamma | \zeta(\rho) = 0,\ 0 \le \beta \le 1,\ 0 < \gamma < T\}$$
si ha
$$N(T) \sim \frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi}$$
In realtà Von Mangoldt dimostrò intorno al 1890 che
$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi} + O(\log T)$$

3. Posto $\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n)$, ricordiamo che per $s > 1$ reale vale
$$\sum_{n \le x} \Lambda(n) = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$$
Riemann congetturò la seguente **formula esplicita**:
$$\psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \frac{1}{2}\log(1 - x^{-2}) - \frac{\zeta'}{\zeta}(0)$$
Questa formula è stata poi dimostrata da Von-Mangoldt.
Inoltre nel 1896 Hadamard e de la Vallèe-Poussin dimostrarono indipendentemente in maniera analitica che
$$\psi(x) \sim x$$
(formula equivalente del PNT: $\pi(x) \sim \mathrm{li}(x) \sim \frac{x}{\log x}$).

1.1 Le principali funzioni aritmetiche

Le principali funzioni aritmetiche che incontreremo in seguito sono le seguenti:

- $1(n) \equiv 1$
- $L(n) = \log(n)$
- $e_r(n) = \begin{cases} 1, & se\ n = r; \\ 0, & se\ n \neq r. \end{cases}$
- $\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k, & se\ n\ e'\ il\ prodotto\ di\ k\ primi\ distinti; \\ 0, & se\ p^2 \mid n\ per\ qualche\ primo\ p. \end{cases}$
  (**funzione di Möbius**)
- $\Lambda(n) = \begin{cases} \log(p), & se\ n = p^{\alpha},\ p\ primo\ e\ \alpha \in \mathbb{N}; \\ 0, & altrimenti. \end{cases}$
  (**funzione di Mangoldt**)

- $\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log(p)$
- $\psi(x) = \sum_{p^a \leq x} \log(p) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$
  (**funzione di Chebyshev**)
- $M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)$
- $[x] = \sum_{n \leq x} 1$
- $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 \qquad \textit{con p primo}$
- $d(n) = \sum_{d|n} 1$
  (**funzione dei divisori di Dirichlet**)
- $e_r(n) = \begin{cases} 1, & \textit{se } n = r \\ 0, & \textit{se } n \neq r \end{cases}$

Capitolo 2

Studio delle funzioni intere

Lemma 2.1. ***(Mittag-Leffer)***
Sia $z_1, z_2, \dots, z_n \to +\infty$ *tale che* $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq |z_3| \leq \dots \leq |z_n| \to +\infty$.
Sia poi $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *con* $m_n \in \mathbb{C} - \{0\}$.
Allora per ogni n *esiste* $p_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *tale che*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{z_n}\right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n}$$

converge totalmente in $K \subset \mathbb{C} - \{z_1, z_2, \dots\}$ *compatto.*
Inoltre se $|z| < |z_1|$ *allora*

$$f(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n \ t.c\ p_n < k} m_n z_n^{-k} \right) z^{k-1}$$

Dimostrazione. Sia $0 \leq r_1 \leq r_2 \dots \to +\infty$ tale che $r_n < |z_n|$.
Se $|z| \leq r_n$ allora

$$\left|\frac{m_n}{z - z_n}\right| \leq \frac{|m_n|}{|z_n| - |z|} \leq \frac{|m_n|}{|z_n| - r_n}$$

in quanto $||z| - |z_n|| = |z_n| - |z|$.
Inoltre

$$\left|\frac{z}{z_n}\right| \leq \frac{r_n}{|z_n|} \leq 1$$

Segue che per ogni n esiste $p_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tale che

$$\left|\frac{z}{z_n}\right|^{p_n} \leq \left(\frac{r_n}{|z_n|}\right)^{p_n} < \varepsilon_n \frac{|z_n| - r_n}{|m_n|}$$

con $0 < \varepsilon_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty$.
Quindi per $|z| \leq r_n$ si ha

$$\left|\left(\frac{z}{z_n}\right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n}\right| \leq \left(\left|\frac{z}{z_n}\right|\right)^{p_n} \frac{|m_n|}{|z_n| - r_n} < \varepsilon_n$$

Se ora K è un compatto privo dei punti $z_1, z_2, \ldots$ e se N è tale che $|z| \leq r_N$ per ogni $z \in K$, ponendo

$$M_n = \max_{z \in K} \left| \left(\frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \right| \qquad \text{per } n \leqslant N-1$$

la serie

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n}$$

ammette come maggiorante su K la serie convergente

$$M_1 + \ldots + M_{N-1} + \varepsilon_N + \varepsilon_{N+1} + \cdots$$

e quindi converge totalmente. Infatti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \right| \leq M_1 + \ldots + M_{N-1} + \varepsilon_N + \varepsilon_{N+1} + \cdots < +\infty$$

per ogni $z \in K$.
Inoltre se $|z| < |z_1|$ allora

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} = \\ &= -\sum_{1}^{\infty} \frac{m_n z^{p_n}}{z_n^{p_n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{z_n}} = \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} m_n \sum_{k=p_n+1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{z_n^k} = \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty} z^{k-1} \sum_{n \text{ t.c. } p_n < k} m_n z_n^{-k} \end{aligned}$$

ed è lecito invertire l'ordine di sommazione perchè

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=p_n+1}^{\infty} |m_n| \frac{|z|^{k-1}}{|z_n|^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p_n} \frac{|m_n|}{|z_n| - |z|} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_n}{|z_n|} \right)^{p_n} \frac{|m_n|}{|z_n| - r_n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$$

$\square$

Osservazione 2.2. *Osserviamo che per ogni z fissato e per ogni n tale che $|z_n| > |z|$ si ha che*

$$|z| < |z_n| \Rightarrow \left| \frac{z}{z_n} \right| \leqslant \frac{2|z|}{|z| + |z_n|} \leqslant \frac{2|z|}{|z - z_n|}$$

Quindi

$$|m_n| \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p_n+1} \leq \frac{2|z|}{|z - z_n|} \left(\frac{z}{z_n} \right)^{p_n} |m_n| = 2|z| \left| \left(\frac{z}{z_n} \right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \right|$$

Segue che:
$$\sum_{n=1}^{\infty} |m_n| \left|\frac{z}{z_n}\right|^{p_n+1} \leq 2|z| \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\frac{z}{z_n}\right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \right| < +\infty$$
Quindi la successione (p_n) determinata nel lemma di Mittag-Leffer soddisfa

$$\sum_{n=1}^{\infty} |m_n| \left|\frac{z}{z_n}\right|^{p_n+1} < \infty \quad \textit{per ogni} \quad z \in \mathbb{C}$$

Viceversa ogni successione (p_n) tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |m_n| \left|\frac{z}{z_n}\right|^{p_n+1} < \infty \quad \textit{per ogni} \quad z \in \mathbb{C}$$

soddisfa anche la condizione richiesta dal Lemma di Mittag-Leffer. Infatti se z_0 è tale che $|z_0| > \max_{z \in K} |z|$ allora per ogni n tale che $|z_n| > |z_0| + 1$ e per ogni $z \in K$ si ha

$$\left| \left(\frac{z}{z_n}\right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \right| \leqslant \left|\frac{z_0}{z_n}\right|^{p_n} \frac{|m_n|}{|z_n| - |z_0|} \leqslant \left(1 + \frac{1}{|z_0|}\right) |m_n| \left|\frac{z_0}{z_n}\right|^{p_n+1}$$

e quindi la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{z_n}\right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n}$$
converge totalmente su K.

Esempio 2.3. *Supponiamo che $z_n = n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $m_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Allora*
$$\sum_{n=1}^{\infty} |m_n| \left|\frac{z}{z_n}\right|^{p_n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z}{n}\right|^{p_n+1} = |z| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p_n+1}} < +\infty$$
e con $p_n = 1$ funziona.

Lemma 2.4. *Se $f(z)$ è meromorfa con poli semplici nei punti $z_n \neq 0$ e con rispettivi residui $m_n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora la funzione*

$$\varphi(z) = \exp\left(\int_0^z f(t)dt\right)$$

è meromorfa (t è una variabile complessa). Inoltre i suoi zeri (con molteplicità m_n) sono i punti z_n tali che $m_n > 0$ mentre i suoi poli (di molteplicità $-m_n$) sono i punti z_n tali che $m_n < 0$.

Dimostrazione. Osserviamo prima di tutto che la $\varphi(z)$ non ha polidromie, perché se γ e γ' sono due cammini (non intrecciati e non passanti per i punti z_n, ovvero $\gamma \cup \gamma'$ è una curva semplice piana di Jordan in $\mathbb{C} - \{z, \dots\}$) aventi gli estremi in comune si ha

$$\int_\gamma f(t)dt = \int_{\gamma'} f(t)dt + 2\pi i R,$$

dove R è la somma dei residui di f nei punti compresi tra γ e γ'. Nelle ipotesi attuali R è quindi un numero intero.
Segue che (passando all'esponenziale ad entrambi i membri)

$$\exp\left(\int_\gamma f(t)dt\right) = e^{2\pi i R} \cdot \exp\left(\int_{\gamma'} f(t)dt\right) = \exp\left(\int_{\gamma'} f(t)dt\right)$$

$\varphi(z)$ è ovviamente olomorfa e non nulla in $\mathbb{C}\setminus\{z_1, z_2, \ldots\}$; resta da dimostrare che essa ha in z_1 uno zero di molteplicità m_1 o un polo di molteplicità $-m_1$ a seconda che $m_1 > 0$ oppure $m_1 < 0$ (e analogamente per gli altri punti $z_2, z_3, \ldots$.).
La funzione

$$f_1(z) = f(z) - \frac{m_1}{z - z_1}$$

è olomorfa in $\mathbb{C}\setminus\{z_2, z_3, \ldots\}$, e ha in $z_2, z_3, \ldots$ poli semplici con rispettivi residui $m_2, m_3, \ldots$; dunque

$$\exp\left(\int_0^z f_1(t)dt\right)$$

è olomorfa e non nulla in $\mathbb{C}\setminus\{z_2, z_3, \ldots\}$.
Si ha

$$\begin{aligned}
\varphi(z) &= \exp\left(\int_0^z f(t)dt\right) = \\
&= \exp\left\{\int_0^z f_1(t)dt + m_1 \int_0^z \frac{dt}{t - z_1}\right\} = \\
&= \exp\left(\int_0^z f_1(t)dt\right) \exp\left(m_1 \log\left(\frac{z - z_1}{-z_1}\right)\right) = \\
&= \exp\left(\int_0^z f_1(t)dt\right) (z - z_1)^{m_1} (-z_1)^{-m_1} = \\
&= \varphi_1(z)(z - z_1)^{m_1}
\end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$\varphi_1(z) = (-z_1)^{-m_1} \exp\left(\int_0^z f_1(t)dt\right)$$

Segue che $\varphi_1(z)$ è olomorfa e non nulla in $\mathbb{C} - \{z_2, z_3, \ldots\}$. □

I due lemmi precedenti ci consentono di trovare una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ con zeri e poli in punti $z_1, z_2, \ldots$ arbitrariamente prefissati sotto la sola condizione che la successione $z_1, z_2, \ldots$ non abbia punti limite al finito, e con molteplicità $m_1, m_2, \ldots$ arbitrarie.
Il seguente fondamentale teorema fornisce una rappresentazione, sottoforma di prodotto infinito, per una qualunque funzione meromorfa che soddisfa le condizioni indicate.

Teorema 2.5. ***(Teorema di Weierstrass)***
Sia $F(z)$ una funzione meromorfa in $\mathbb{C}$ (olomorfa e non nulla in $z = 0$) e siano $z_1, z_2, \ldots$

gli zeri e i poli di $F(z)$ e, per ogni n, m_n la molteplicità di z_n (positiva se z_n è uno zero e negativa se è un polo).
Allora esistono interi $p_n \geq 0$ e una funzione intera $G(z)$ tali che

$$F(z) = e^{G(z)} \prod_n \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)^{m_n} \exp\left(m_n \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right)$$

dove il prodotto converge uniformemente su ogni compatto privo dei punti $z_1, z_2, \ldots$.
Ogni successione (p_n) che soddisfa

$$\sum_{n=1}^{\infty} |m_n| \left|\frac{z}{z_n}\right|^{p_n+1} < \infty \quad \textit{per ogni} \quad z \in \mathbb{C}$$

soddisfa anche la condizione richiesta.

Dimostrazione. Costruiamo, mediante gli zeri e i poli z_n della funzione $F(z)$ e le loro molteplicità m_n, la funzione meromorfa

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{z_n}\right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n}$$

e applichiamo ad essa il lemma precedente.
Siccome

$$\begin{aligned}
\left(\frac{t}{z_n}\right)^{p_n} \frac{1}{t - z_n} &= -\frac{t^{p_n}}{z_n^{p_n+1}} \frac{1}{1 - \frac{t}{z_n}} = \\
&= -\frac{t^{p_n}}{z_n^{p_n+1}} \sum_{h=0}^{+\infty} \left(\frac{t}{z_n}\right)^h = \\
&= -\sum_{h=p_n+1}^{\infty} \left(\frac{t^{h-1}}{z_n^h}\right) = \\
&= -\frac{1}{z_n\left(1 - \frac{t}{z_n}\right)} + \left(1 + \frac{t}{z_n} + \frac{t^2}{z_n^2} + \cdots + \frac{t^{p_n-1}}{z_n^{p_n-1}}\right) \frac{1}{z_n} = \\
&= \frac{1}{t - z_n} + \frac{1}{z_n} \sum_{h=1}^{p_n-1} \left(\frac{t}{z_n}\right)^h
\end{aligned}$$

allora la funzione $\varphi(z)$ diventa:

$$
\begin{aligned}
\varphi(z) &= \exp\left(\int_0^z \sum_n \left(\frac{t}{z_n}\right)^{p_n} \frac{m_n}{t-z_n} dt\right) = \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \exp\left(\int_0^z \left(\frac{m_n}{t-z_n} + \frac{m_n}{z_n}\sum_{h=1}^{p_n-1}\left(\frac{t}{z_n}\right)^h\right) dt\right) = \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \exp\left\{m_n \log\left(\frac{z-z_n}{-z_n}\right) + m_n \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right\} = \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{z}{z_n}\right)^{m_n} \exp\left\{m_n \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right\}
\end{aligned}
$$

Osserviamo che $F(z)$ e $\varphi(z)$ hanno gli stessi zeri e poli con le stesse molteplicità, quindi $\frac{F(z)}{\varphi(z)}$ è una funzione intera mai nulla in $\mathbb{C}$.
Segue che esiste una funzione $G(z)$ intera tale che

$$\frac{F(z)}{\varphi(z)} = e^{G(z)}$$

ovvero

$$F(z) = e^{G(z)}\varphi(z)$$

□

Osservazione 2.6. *Se $F(z)$ ha anche uno zero di molteplicità m o un polo di molteplicità $|m|$ in $z=0$ allora si applica il Teorema di Weierstrass alla funzione*

$$\tilde{F}(z) = \frac{F(z)}{z^m}$$

ottenendo

$$F(z) = z^m e^{G(z)} \prod_n \left(1-\frac{z}{z_n}\right)^{m_n} \exp\left(m_n \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right)$$

Corollario 2.7. *Si ha*

$$G(z) = \log F(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{k!}\left(\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\frac{F'(z)}{F(z)}\right)_{z=0} + \frac{1}{k}\sum_{p_n<k} m_n z_n^{-k}\right\} z^k$$

Dimostrazione. Osserviamo che in un intorno di $z = 0$ abbiamo

$$\begin{aligned}
G(z) &= \log F(z) - \int_0^z \sum_n \left(\frac{t}{z_n}\right)^{p_n} \frac{m_n}{t - z_n} dt = \\
&= \log F(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \left(\frac{d^k}{dz^k} \log F(z)\right)_{z=0} + \int_0^z \sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} \sum_{p_n<k} m_n z_n^{-k} dt = \\
&= \log F(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \left(\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \frac{F'(z)}{F(z)}\right)_{z=0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \sum_{p_n<k} m_n z_n^{-k} = \\
&= \log F(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k!} \left(\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \frac{F'(z)}{F(z)}\right)_{z=0} + \frac{1}{k} \sum_{p_n<k} m_n z_n^{-k} \right\} z^k
\end{aligned}$$

□

Adopereremo la formula di fattorizzazione di Weierstrass nel caso in cui $F(z)$ è una funzione intera, cioè $m_n > 0$ per ogni n e $m \geq 0$.

Innanzitutto introduciamo la seguente notazione:

$$f(z) \ll g(z) \quad \text{per } z \to \infty \quad \Longleftrightarrow \quad f(z) = O(g(z))$$

Questa notazione introdotta da Vinogradov ha significato asintotico; inoltre va in entrambi i sensi e quindi è più efficiente rispetto $O(\cdot)$.

Definizione 2.8. *Data $F(z)$ intera, si dice che $F(z)$ ha **ordine** $\alpha \geq 0$ se*

$$F(z) \ll e^{|z|^{\alpha+\varepsilon}}$$

per $z \to \infty$ e per ogni $\varepsilon > 0$, ovvero se

$$\alpha = \inf \left\{ A \geq 0 | F(z) \ll e^{|z|^A} \right\}$$

*Se non esiste alcun $A > 0$ che soddisfi la relazione allora si dice che $F(z)$ ha **ordine infinito**.*

Esempio 2.9. *Sia $p(z)$ un polinomio di grado k.*
Allora

$$|p(z)| \leq |a_k||z|^k(1 + o(1)) \ll e^{|z|^{\varepsilon}}$$

per $z \to +\infty$ e per ogni $\varepsilon > 0$.
Segue che tutti i polinomi hanno ordine 0.

Esempio 2.10. *Osserviamo che*

- $|e^{az+b}| = e^{Re(az+b)} \ll e^{|z|^{1+\varepsilon}}$ *per ogni $\varepsilon > 0$*
- $|e^z| \leq e^{Re(z)} \leq e^{|z|}$

- *dato $p_k(z)$ un polinomio di grado k allora*

$$\left|e^{p_k(z)}\right| \leq e^{Re(p_k(z))} \leq e^{|p_k(z)|} \leq e^{|a_k||z|^k(1+o(1))} \ll e^{|z|^{k+\varepsilon}}$$

  per ogni $\varepsilon > 0$.
  Scegliamo ora z tale che

$$\arg(a_k z^k) = \arg(a_k) + k\arg(z) = 0$$

  ovvero

$$\arg(z) = -\frac{1}{k}\arg(a_k)$$

Segue che

$$\left|e^{p_k(z)}\right| = e^{Re(p_k(z))} = e^{|p_k(z)|} = e^{|a_k||z|^k(1+o(1))} \gg e^{|a_k||z|^k}$$

per ogni $\varepsilon > 0$.
Segue che $e^{p_n(z)}$ ha ordine $\deg(p_n)$*.*

Proposizione 2.11. *Se F_1 e F_2 hanno ordine rispettivamente α_1 e α_2 allora $F_1 + F_2$ e F_1F_2 hanno ordine $\leq \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$.*

Dimostrazione. Sappiamo che

$$F_1(z) \ll_\varepsilon e^{|z|^{\alpha_1+\varepsilon}}$$
$$F_2(z) \ll_\varepsilon e^{|z|^{\alpha_2+\varepsilon}}$$

da cui, posto $A = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$, vale che

$$F_1(z) \ll_\varepsilon e^{|z|^{A+\varepsilon}}$$

$$F_2(z) \ll_\varepsilon e^{|z|^{A+\varepsilon}}$$

Quindi

$$|F_1(z) + F_2(z)| \leqslant |F_1(z)| + |F_2(z)| \ll_\varepsilon e^{|z|^{A+\varepsilon}}$$
$$|F_1(z)F_2(z)| = |F_1(z)|\,|F_2(z)| \ll_\varepsilon e^{|z|^{A+2\varepsilon}}$$

□

Osserviamo che:

- dal lemma precedente e da $|z|^n \ll e^{|z|^\varepsilon}$ segue che i polinomi hanno ordine zero
- Se $P(z) = a_0z^n + \ldots + a_n$ $(a_0 \neq 0)$ è un polinomio di grado n, $e^{P(z)}$ ha ordine n. Si ha infatti $|P(z)| \ll |z|^n$, da cui

$$\left|e^{P(z)}\right| = e^{\mathrm{Re}(P(z))} \leqslant e^{|P(z)|} \ll e^{|z|^{n+\varepsilon}}$$

Inoltre, se z tende a ∞ su una delle n semirette $\arg(z) = -\frac{1}{n}\arg a_0$ (da cui $\arg(a_0 z^n) = \arg a_0 + n \arg z = 0, \quad a_0 z^n = |a_0 z^n|$) si ha

$$\operatorname{Re}(P(x)) - |z|^{n-\varepsilon} = \operatorname{Re}(a_0 z^n) + O\left(|z|^{n-\varepsilon}\right) = |a_0|\,|z|^n + O\left(|z|^{n-\varepsilon}\right) \to +\infty$$

e ciò implica che

$$\overline{\lim_{z\to\infty}} \frac{\left|e^{P(z)}\right|}{e^{|z|^{n-\varepsilon}}} = \overline{\lim_{z\to\infty}} e^{\operatorname{Re}(P(z))-|z|^{n-\varepsilon}} = +\infty$$

Lemma 2.12. *Sia f olomorfa in $|z-z_0| \leq R$ e sia $0 < r < R$ (f non identicamente nulla).*
Sia inoltre

$$N = \#\{z \in \mathbb{C}|\ |z-z_0| \leq r,\ f(z) = 0\}$$

Allora

$$|f(z_0)| \leq \left(\frac{r}{R}\right)^N \max_{|z-z_0|=R} |f(z)|$$

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre $z_0 = 0,\ R = 1$, poiché ci si può ricondurre a questo caso con una traslazione e un' omotetia.
Siano $z_1, \ldots, z_N$ gli zeri di $f(z)$ in $|z| \leqslant r$ (uno zero di molteplicità m essendo ripetuto m volte), e poniamo

$$g(z) = f(z) \prod_{n=1}^{N} \frac{1-\overline{z_n}z}{z-z_n}$$

Poiché $f(z)$ si annulla in z_n per ogni n, $g(z)$ è olomorfa in $|z| \leqslant 1$; inoltre ognuno dei fattori di Blaschke

$$\frac{1-\overline{z_n}z}{z-z_n}$$

trasforma il cerchio $|z| = 1$ in sè stesso, perchè, se $|\alpha| \neq 1$

$$\left|\frac{1-\bar{\alpha}e^{i\vartheta}}{e^{i\vartheta}-\alpha}\right| = \left|e^{i\vartheta}\right| \left|\frac{e^{-i\vartheta}-\bar{\alpha}}{e^{i\vartheta}-\alpha}\right| = 1$$

Ne segue che per $|t| \leq 1$ vale

$$|g(t)| \leqslant \max_{|z|=1} |g(z)| = \max_{|z|=1} |f(z)|$$

$$|f(t)| = |g(t)| \prod_{n=1}^{N} \left|\frac{t-z_n}{1-\bar{z}_n t}\right| \leqslant \left(\max_{|z|=1} |f(z)|\right) \prod_{n=1}^{N} \left|\frac{t-z_n}{1-\bar{z}_n t}\right|$$

In particolare per $t = 0$ si ha

$$|f(0)| \leqslant \left(\max_{|z|=1} |f(z)|\right) \prod_{n=1}^{N} |z_n| \leqslant r^N \max_{|z|=1} |f(z)|$$

□

Corollario 2.13. *Se $f(z_0) \neq 0$ e valgono le ipotesi del lemma precedente allora*

$$N \leqslant \frac{1}{\log\left(\frac{R}{r}\right)} \log\left(\frac{\max_{|z-z_0|=R}|f(z)|}{|f(z_0)|}\right)$$

Dimostrazione. Basta applicare il logaritmo ad entrambi i membri della disuguaglianza

$$|f(z_0)| \leq \left(\frac{r}{R}\right)^N \max_{|z-z_0|\leq R}|f(z)|$$

□

Teorema 2.14. *Se $F(z)$ ha ordine $\alpha < +\infty$ e se $N(r) = \#\{z \in \mathbb{C}|\ |z| \leq r,\ F(z) = 0\}$ allora si ha*

$$N(r) \ll_\varepsilon r^{\alpha+\varepsilon}$$

per ogni $\varepsilon > 0$.

Dimostrazione. Supponiamo $F(0) \neq 0$. Applicando il corollario precedente con $z_0 = 0$ e $R = 2r$ allora

$$N(r) \leqslant \frac{1}{\log 2} \cdot \log\left(\frac{\max_{|z|=2r}|F(z)|}{|F(0)|}\right)$$

Ma

$$\max_{|z|=2r}|F(z)| \ll e^{(2r)^{\alpha+\varepsilon}}$$

quindi

$$N(r) \ll (2r)^{\alpha+\varepsilon} \ll r^{\alpha+\varepsilon}$$

Se invece $F(z)$ si annulla per $z = 0$ con molteplicità m allora si applica la precedente dimostrazione alla funzione $\tilde{F}(z) = \frac{F(z)}{z^m}$ che è ovviamente ancora di ordine α.
(Osserviamo che se se $|z| \leq 1$ allora $\tilde{F}(z) \ll 1$ mentre se $|z| \geq 1$ allora $\tilde{F}(z) = \frac{F(z)}{z^m}$) □

Definizione 2.15. *Sia $z_1, z_2, \ldots$ una successione di numeri complessi non nulli priva di punti limite al finito (eventualmente finita). Si chiama **esponente di convergenza** della (z_n) il numero (se esiste)*

$$\beta = \inf\left\{B > 0 \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^B} < +\infty\right\}$$

Se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^B} = \infty \quad \forall B > 0$$

*allora si dice che (z_n) ha **ordine di convergenza infinito**.*

Osservazione 2.16. *Osserviamo che β è esponente di convergenza per (z_n) se e solo se*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{\beta+\varepsilon}} < +\infty \quad \forall\varepsilon > 0$$

Teorema 2.17. *Se la funzione intera $F(z)$ (con $F(0) \neq 0$) ha ordine $\alpha > 0$ e la successione dei suoi zeri (z_n) ha esponente di convergenza β allora $\beta \leq \alpha$.*

Dimostrazione. Dal teorema precedente sappiamo che

$$N(r) \ll_\varepsilon r^{\alpha+\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0$$

Se poniamo $r = |z_n|$ allora $n \ll |z_n|^{\alpha+\varepsilon}$ da cui

$$|z_n|^{-(\alpha+2\varepsilon)} \ll n^{-\frac{\alpha+2\varepsilon}{\alpha+\varepsilon}} = n^{-(1+\varepsilon_1)}$$

dove $\varepsilon_1 = \delta(\varepsilon, \alpha)$.
Segue che

$$\sum_n |z_n|^{-(\alpha+2\varepsilon)} \ll \sum_n n^{-(1+\varepsilon_1)} < \infty$$

Quindi

$$\beta = \inf \left\{ B > 0 \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^B} < +\infty \right\} = \inf \left\{ \frac{\alpha + 2\varepsilon}{\alpha + \varepsilon},\ \varepsilon > 0 \right\} \leq \alpha$$

da cui $\beta \leq \alpha$. □

Teorema 2.18. *Se la funzione intera $F(z)$ (con $F(0) \neq 0$) ha ordine finito, allora la formula di fattorizzazione di Weierstrass diventa*

$$F(z) = e^{G(z)} \prod_n \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \exp\left\{ \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{z_n}\right)^k \right\}$$

dove $p \geq 0$ è un intero indipendente da n e tale che

$$\sum_n |z_n|^{-(p+1)} < +\infty$$

Dimostrazione. Detto β l'esponente di convergenza della successione $z_1, z_2, \dots$ di $F(z)$, per il teorema precedente si ha che $\beta < \infty$ in quanto $F(z)$ ha ordine finito α per ipotesi e $\beta \leq \alpha$.
Se p è un intero tale che $p + 1 > \beta$ si avrà

$$\sum_n |z_n|^{-(p+1)} < +\infty$$

e ciò implica che

$$\sum_n \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p+1} < \infty$$

per ogni z, ovvero

$$\sum_{n=1}^{\infty} |m_n| \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p_n+1} < \infty \quad \text{per ogni} \quad z \in \mathbb{C}$$

con $|m_n| = 1$ per ogni n e $p_n = p$ per ogni n. □

Definizione 2.19. *Sia $F(z)$ una funzione intera (con $F(0) \neq 0$) di ordine finito e siano $z_1, z_2, \ldots$ gli zeri di $F(z)$.*
Se p è il più piccolo intero ≥ 0 tale che valga

$$\sum_n |z_n|^{-(p+1)} < +\infty$$

allora il prodotto di Weierstrass

$$\prod_n E\left(\frac{z}{z_n}, p\right) = \prod_n \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \exp \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{z_n}\right)^k$$

si dice il ***prodotto canonico formato con gli zeri di*** *$F(z)$.*

Osservazione 2.20. *Osserviamo che:*

- *se β non è un intero allora $p = [\beta]$ mentre se β è un intero allora $p = \beta$ oppure $p = \beta - 1$*

In ogni caso

$$\beta - 1 \leqslant p \leqslant \beta \leqslant \alpha$$

Teorema 2.21. ***(Borel-Carathèodory)***
Sia $0 < r < R$ e sia $f(z)$ olomorfa in $|z - z_0| \leq R$ con $z_0 \in \mathbb{C}$. Allora

$$\max_{|z-z_0|=r} |f(z)| \leqslant \frac{2r}{R-r} \max_{|z-z_0|=R} \operatorname{Re}(f(z)) + \frac{R+r}{R-r} |f(z_0)|$$

Un'analoga maggiorazione vale per le derivate: se

$$\max_{|z-z_0|=R} \operatorname{Re}(f(z)) \geqslant 0$$

allora

$$\max_{|z-z_0|=r} \left| f^{(n)}(z) \right| \leqslant \frac{2^{n+1} n! R}{(R-r)^{n+1}} \left\{ \max_{|z-z_0|=R} \operatorname{Re}(f(z)) + |f(z_0)| \right\} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Dimostrazione. Possiamo supporre $z_0 = 0$.
Abbiamo due casi:

- Se $f(z)$ è costante il teorema è ovvio
- Se $f(z)$ non è costante poniamo

$$A = \max_{|z|=R} \operatorname{Re}(f(z))$$

e supponiamo $f(0) = 0$.
Poiché $e^{f(z)}$ è olomorfa in $|z| \leqslant R$, il massimo di $\left|e^{f(z)}\right| = e^{\operatorname{Re}(f(z))}$ è raggiunto

al bordo (olomorfa quindi armonica e uso principio del massimo), e ne segue che $A > \mathrm{Re}(f(0)) = 0$. Posto allora

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{2A - f(z)}$$

$\varphi(z)$ è olomorfa in $|z| \leqslant R$ perchè il denominatore ha parte reale strettamente positiva.
Inoltre se $f(z) = u + iv$ si ha, per $|z| \leqslant R$,

$$|\varphi(z)|^2 = \frac{u^2 + v^2}{(2A - u)^2 + v^2} \leqslant 1$$

perchè $-2A + u \leqslant u \leqslant 2A - u$.
Da $\varphi(0) = 0$ segue che $\frac{\varphi(z)}{z}$ è olomorfa; dunque per $|z| \leqslant R$ si ha

$$\left|\frac{\varphi(z)}{z}\right| \leqslant \max_{|z|=R} \left|\frac{\varphi(z)}{z}\right| \leqslant \frac{1}{R}$$

In particolare per $|z| = r$ abbiamo

$$\max_{|z|=r} |\varphi(z)| \leqslant \frac{r}{R}$$

Dunque per ogni z tale che $|z| = r$ si ha

$$|f(z)| = 2A\frac{|\varphi(z)|}{|1 + \varphi(z)|} \leqslant 2A\frac{r/R}{1 - r/R} = \frac{2Ar}{R - r}$$

da cui

$$\max_{|z|=r} |f(z)| \leq \frac{2Ar}{R - r}$$

- Se $f(0) \neq 0$ allora applichiamo la relazione

$$|f(z)| = 2A\frac{|\varphi(z)|}{|1 + \varphi(z)|} \leqslant 2A\frac{r/R}{1 - r/R} = \frac{2Ar}{R - r}$$

alla funzione $f(z) - f(0)$ ottenendo

$$|f(z) - f(0)| \leqslant \frac{2r}{R - r} \max_{|z|=R} \mathrm{Re}(f(z) - f(0)) = \frac{2r}{R - r} \left(\max_{|z|=R} \mathrm{Re}(f(z)) - \mathrm{Re}(f(0))\right)$$

e quindi

$$|f(z)| - |f(0)| \leqslant |f(z) - f(0)| \leqslant \frac{2r}{R - r} \left(\max_{|z|=R} \mathrm{Re}(f(z)) + |f(0)|\right)$$

in quanto $|f(z)| \leq |f(z) - f(0)| + |f(0)|$.
Segue che

$$\max_{|z|=r} |f(z)| \leqslant \frac{2r}{R - r} \max_{|z|=R} \mathrm{Re}(f(z)) + \frac{R + r}{R - r} |f(z_0)|$$

Osserviamo che se $A \geq 0$ allora

$$\max_{|z|=r} |f(z)| \leqslant \frac{R+r}{R-r} \left(\max_{|z|=R} \mathrm{Re}(f(z)) + |f(0)| \right)$$

Fissiamo ora un punto z tale che $|z| = r$ e supponiamo $\max_{|\tau|=R} \mathrm{Re}(f(\tau)) \geqslant 0$.
Dalla formula di Cauchy

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|t-z|\leq \frac{R-r}{2}} \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt$$

dalla relazione

$$|t| \leqslant |z| + |t-z| = r + \frac{R-r}{2} = \frac{R+r}{2}$$

e dalla disuguaglianza trovata sopra che in questo caso diventa

$$\begin{aligned} |f(t)| \leqslant & \max_{|\tau|=\frac{R+r}{2}} |f(\tau)| \leq \\ & \leq \frac{R+\frac{1}{2}(R+r)}{R-\frac{1}{2}(R+r)} \left(\max_{|\tau|=R} \mathrm{Re}(f(\tau)) + |f(0)| \right) < \\ & < \frac{4R}{R-r} \left(\max_{|\tau|=R} \mathrm{Re}(f(\tau)) + |f(0)| \right) \end{aligned}$$

si ottiene

$$\left| f^{(n)}(z) \right| \leqslant \frac{n!}{\left(\frac{R-r}{2}\right)^n} \frac{4R}{R-r} \left(\max_{|\tau|=R} \mathrm{Re}(f(\tau)) + |f(0)| \right)$$

□

Teorema 2.22. ***(Teorema di Hadamard)***
Se $F(z)$ è una funzione intera di ordine $\alpha < +\infty$ (con $F(0) \neq 0$) allora $G(z)$ è un polinomio di grado $\leq \alpha$.

Dimostrazione. Poniamo $\nu = [\alpha]$.
La tesi equivale a dimostrare che $D^{\nu+1}G(z) = G^{\nu+1}(z) = 0$ identicamente.
Passando ai logaritmi nell'uguaglianza

$$F(z) = e^{G(z)} \prod_n \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \exp \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{z_n}\right)^k$$

si ottiene

$$\log F(z) = G(z) + \sum_n \log\left(1 - \frac{z}{z_n}\right) + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{z_n}\right)^k$$

Ora

$$\frac{F'}{F}(z) = G'(z) - \sum_n \frac{1}{z_n - z} + D\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right)$$

e derivando in tutto $\nu+1$ volte si ottiene

$$D^{\nu}\frac{F'(z)}{F(z)}=G^{(\nu+1)}(z)-\nu!\sum_{n}\frac{1}{(z_n-z)^{\nu+1}}$$

perchè $p\leq\nu$.
Poniamo ora

$$\varphi_R(z)=\frac{F(z)}{F(0)}\prod_{|z_n|\leqslant R}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)^{-1}$$

Poichè per $|z|=2R$ e $|z_n|\leq R$ si ha

$$\left|1-\frac{z}{z_n}\right|\geqslant\frac{|z|}{|z_n|}-1\geqslant 1$$

allora

$$|\varphi_R(z)|\leqslant\frac{|F(z)|}{|F(0)|}\ll e^{(2R)^{\alpha+\varepsilon}}$$

per $|z|=2R$ e quindi anche per $|z|\leq 2R$ perchè $\varphi_R(z)$ è ovviamente una funzione intera. Ma $\varphi_R(z)$ non è mai nulla nel disco $|z|\leq R$ quindi

$$\psi_R(z)=\log\varphi_R(z)$$

è olomorfa in $|z|\leq R$ e

$$\mathrm{Re}\,(\psi_R(z))\ll_{\varepsilon}R^{\alpha+\varepsilon}$$

per $|z|=R$.
Tuttavia da $\varphi_R(0)=1$ segue che

$$\max_{|z|=R}|\varphi_R(z)|\geqslant 1$$

ovvero

$$\max_{|z|=R}\mathrm{Re}\,(\psi_R(z))\geqslant 0$$

Applicando la maggiorazione per le derivate trovata nel teorema precedente con $r=\frac{R}{2}$ si ottiene che

$$\max_{|z|=\frac{R}{2}}\left|\psi_R^{(\nu+1)}(z)\right|\ll_{\varepsilon,\nu}\frac{R}{\left(\frac{R}{2}\right)^{\nu+2}}R^{\alpha+\varepsilon}\ll R^{\alpha-\nu-1+\varepsilon}$$

Dunque

$$\begin{aligned}G^{(\nu+1)}(z)=D^{\nu+1}G(z)=D^{\nu}\frac{F'(z)}{F(z)}+\nu!\sum_{|z_n|\leqslant R}\frac{1}{(z_n-z)^{\nu+1}}+\nu!\sum_{|z_n|>R}\frac{1}{(z_n-z)^{\nu+1}}=\\ =\psi_R^{(\nu+1)}(z)+\nu!\sum_{|z_n|>R}\frac{1}{(z_n-z)^{\nu+1}}\ll_{\varepsilon,\nu}\\ \ll_{\varepsilon,\nu}R^{\alpha-\nu-1+\varepsilon}+\sum_{|z_n|>R}|z_n|^{-(\nu+1)}\end{aligned}$$

per $|z| = \frac{R}{2}$ e quindi anche per $|z| \le \frac{R}{2}$.
Poichè $\alpha < \nu + 1$ si ha

$$\lim_{R\to\infty} R^{\alpha-\nu-1+\varepsilon} = 0$$

per ε abbastanza piccolo. Inoltre, siccome sappiamo che $\beta < \nu + 1$ si ha

$$\lim_{R\to\infty} \sum_{|z_n|>R} |z_n|^{-(\nu+1)} = 0$$

perchè

$$\sum_n |z_n|^{-(\nu+1)} < \infty$$

Poichè il primo membro non dipende da R allora deve essere $G^{\nu+1}(z) = 0$. $\square$

Teorema 2.23. *Sia $z_1, z_2, \ldots$ una successione con esponente di convergenza $\beta < \infty$. Se p è il più piccolo intero ≥ 0 tale che*

$$\sum_n |z_n|^{-(p+1)} < \infty$$

allora il prodotto canonico di Weierstrass

$$\prod_n E\left(\frac{z}{z_n}, p\right) = \prod_n \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \exp\left\{\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right\}$$

è uniformemente convergente ed è quindi una funzione intera di ordine finito β.

Dimostrazione. Basta mostrare che

$$\prod_n E\left(\frac{z}{z_n}, p\right) \ll_\varepsilon e^{|z|^{\beta+\varepsilon}}$$

o equivalentemente

$$\log\left|\prod_n E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)\right| = \sum_n \log\left|E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)\right| \leqslant C(\varepsilon) \cdot |z|^{\beta+\varepsilon}$$

Abbiamo due casi:

- Se $\left|\frac{z}{z_n}\right| \leqslant \frac{1}{2}$ allora

$$\begin{aligned}
\log\left|E\left(\frac{z}{z_n},p\right)\right| &\leqslant \left|\log E\left(\frac{z}{z_n},p\right)\right| = \\
&= \left|\log\left(1-\frac{z}{z_n}\right)+\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right| = \\
&= \left|-\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right| \leq \\
&\leq \sum_{k=p+1}^{\infty}\left|\frac{z}{z_n}\right|^k \leq \\
&\leq \left|\frac{z}{z_n}\right|^{p+1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right) = \\
&= 2\left|\frac{z}{z_n}\right|^{p+1}
\end{aligned}$$

quindi

$$\sum_{|z_n|\geqslant 2|z|}\log\left|E\left(\frac{z}{z_n},p\right)\right| \leqslant 2|z|^{p+1}\sum_{|z_n|\geqslant 2|z|}|z_n|^{-(p+1)}$$

Siccome $p \leq \beta \leq p+1$ allora ho due casi:

– se $\beta = p+1$ allora

$$\sum_{|z_n|\geqslant 2|z|}\log\left|E\left(\frac{z}{z_n},p\right)\right| \leqslant C_1|z|^{\beta}$$

– se $\beta < p+1$ allora detto ε un numero positivo tale che $\beta+\varepsilon < p+1$ si ha:

$$\begin{aligned}
\sum_{|z_n|\geqslant 2|z|}\log\left|E\left(\frac{z}{z_n},p\right)\right| &\leqslant 2|z|^{\beta+\varepsilon}\sum_{|z_n|\geqslant 2|z|}|z_n|^{-(p+1)}\cdot|z|^{p+1-\beta-\varepsilon} \leq \\
&\leq \frac{2|z|^{\beta+\varepsilon}}{2^{p+1-\beta-\varepsilon}}\sum_{|z_n|\geqslant 2|z|}|z_n|^{-(\beta+\varepsilon)} \leq \\
&\leq C_1(\varepsilon)|z|^{\beta+\varepsilon}
\end{aligned}$$

in quanto $\sum_n |z_n|^{-(\beta+\varepsilon)} < \infty$.

In ogni caso

$$\sum_{|z_n|\geqslant 2|z|}\log\left|E\left(\frac{z}{z_n},p\right)\right| \leqslant C_1(\varepsilon)|z|^{\beta+\varepsilon}$$

- Se $\left|\frac{z}{z_n}\right| > \frac{1}{2}$ si ha

$$\log\left|E\left(\frac{z}{z_n},p\right)\right| = \log\left|1-\frac{z}{z_n}\right| + \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right) \leqslant \log\left(1+\left|\frac{z}{z_n}\right|\right) + \sum_{k=1}^{p}\left|\frac{z}{z_n}\right|^k$$

da cui

$$\log\left|E\left(\frac{z}{z_n},p\right)\right| \leqslant \begin{cases} C_2(\varepsilon)\left|\frac{z}{z_n}\right|^{\varepsilon}, & \text{se } p=0 \\ C_2\left|\frac{z}{z_n}\right|^{p}, & \text{se } p \geqslant 1 \end{cases}$$

Osserviamo che:

  - se $p=0$ allora

$$\begin{aligned}\sum_{|z_n|<2|z|}\log\left|E\left(\frac{z}{z_n},p\right)\right| &\leq C_2(\varepsilon)|z|^{\varepsilon}\sum_{|z_n|<2|z|}|z_n|^{-\varepsilon} = \\ &= C_2(\varepsilon)|z|^{\beta+\varepsilon}\sum_{|z_n|<2|z|}|z_n|^{-\varepsilon}\,|z|^{-\beta} \leq \\ &\leq 2^{\beta}C_2(\varepsilon)|z|^{\beta+\varepsilon}\sum_{|z_n|<2|z|}|z_n|^{-(\beta+\varepsilon)} \leq \\ &\leq C_3(\varepsilon)|z|^{\beta+\varepsilon}\end{aligned}$$

  - se $p \geq 1$ allora

$$\begin{aligned}\sum_{|z_n|<2|z|}\log\left|E\left(\frac{z}{z_n},p\right)\right| &\leq C_2|z|^{p}\sum_{|z_n|<2|z|}|z_n|^{-p} = \\ &= C_2|z|^{\beta+\varepsilon}\sum_{|z_n|<2|z|}|z_n|^{-p}\,|z|^{-(\beta+\varepsilon-p)} \leq \\ &\leq 2^{\beta-\varepsilon+p}C_2|z|^{\beta+\varepsilon}\sum_{|z_n|<2|z|}|z_n|^{-(\beta+\varepsilon)} \leq \\ &\leq C_4(\varepsilon)|z|^{\beta+\varepsilon}\end{aligned}$$

Segue che

$$\sum_{n}\log\left|E\left(\frac{z}{z_n},p\right)\right| = \sum_{|z_n|\geqslant 2|z|}\log\left|E\left(\frac{z}{z_n},p\right)\right| + \sum_{|z_n|<2|z|}\log\left|E\left(\frac{z}{z_n},p\right)\right| \leqslant C(\varepsilon)|z|^{\beta+\varepsilon}$$

$\square$

Corollario 2.24. *Se*

$$F(z) = e^{G(z)}\prod_{n}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k$$

ha ordine α, gli zeri $z_1, z_2, \ldots$ hanno esponente di convergenza β, p è il più piccolo intero ≥ 0 tale che $\sum_n |z_n|^{-(p+1)} < \infty$ e $G(z)$ è un polinomio di grado q, allora

$$\alpha = \max\{\beta, q\}$$

Dimostrazione. Sappiamo che $\beta \leq \alpha$ e per il teorema di Hadamard $q \leq \alpha$, quindi $\max\{\beta, q\} \leqslant \alpha$.
Tuttavia $e^{G(z)}$ ha ordine q mentre

$$\prod_n \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \exp \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{z_n}\right)^k$$

ha ordine β per il teorema precedente. Segue che $\alpha \leqslant \max\{\beta, q\}$.

□

Definizione 2.25. *Si definisce **genere** della funzione intera F (definita prima) il numero $g = \max(p, q)$ dove q è il grado di $G(z)$.*

Osserviamo che poichè p e q sono interi non negativi allora anche il suo genere $g = \max(p, q)$ è un intero non negativo.
Inoltre se g è il genere di $F(z)$ e α il suo ordine, ricordando che $\alpha = \max(\beta, q)$, si ha che $\alpha - 1 \leq g \leq \alpha$.

Corollario 2.26. *Nelle ipotesi del corollario precedente il polinomio $G(z)$ è dato da:*

- *se $q \leq p$ si ha*

$$G(z) = \log F(0) + \sum_{k=1}^{q} \frac{z^k}{k!} \left(\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \frac{F'(z)}{F(z)}\right)_{z=0} = \log F(0) + \sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k!} \left(\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \frac{F'(z)}{F(z)}\right)_{z=0}$$

- *se $q > p$ si ha*

$$G(z) = \log F(0) + \sum_{k=1}^{q} \frac{z^k}{k!} \left(\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \frac{F'(z)}{F(z)}\right)_{z=0} + \sum_{k=p+1}^{q} \frac{z^k}{k} \sum_n z_n^{-k}$$

Inoltre per ogni $k > g = \max(p, q)$ si ha

$$\sum_n z_n^{-k} = -\frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \frac{F'(z)}{F(z)}\right)_{z=0}$$

Dimostrazione. Nelle ipotesi attuali $G(z)$ diventa

$$G(z) = \log F(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k!} \left(\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \frac{F'(z)}{F(z)}\right)_{z=0} + \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{se } k \leqslant p \\ \frac{1}{k} \sum_n z_n^{-k}, & \text{se } k > p \end{array} \right\}\right] z^k =$$

$$= \log F(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \left(\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \frac{F'(z)}{F(z)}\right)_{z=0} + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \sum_n z_n^{-k}$$

da cui seguono immediatamente le prime due formule in quanto $G(z)$ è un polinomio di grado q.
Inoltre nello sviluppo di $G(z)$ ottenuto nella dimostrazione si ha che il coefficiente di z^k è nullo per $k > q$.
Segue che per $k > \max(p, q)$ si ha

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\frac{F'(z)}{F(z)}\right)_{z=0} + \frac{1}{k}\sum_n z_n^{-k} = 0$$

da cui la tesi (terza formula). □

Esempio 2.27. *Sia*

$$F(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$$

dove

$$\sin(\pi z) = \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i} \ll_\varepsilon e^{|z|^{1+\varepsilon}}$$

per ogni $\varepsilon > 0$*. Essa è una funzione intera non nulla in* 0*.*
Segue che $\alpha \leq 1$ *in quanto l'ordine di* $e^{\pm i\pi z}$ *è* 1 *mentre l'ordine di* z *è* 0*.*
Osserviamo che gli zeri sono $z_n = \pm n$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *(l'esponente di convergenza è* 1*).*
Segue che

$$\alpha = \beta = p = g = 1, \quad q \leqslant p$$

Ma $F(0) = 1$ *e* $F'(0) = 0$ *quindi*

$$G(z) = \log F(0) + \frac{F'(0)}{F(0)}z = 0$$

e se ne deduce la fattorizzazione

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

Applicando poi l'ultima formula del corollario precedente alla funzione $F(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$ *si ottiene*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k} + \sum_{n=1}^{\infty}(-n)^{-k} = -\frac{1}{(k-1)!}\left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left(\pi\cot(\pi z) - \frac{1}{z}\right)\right]_{z=0}$$

con $k = 2, 3, 4, \dots$*.*
Questa formula permette di calcolare i valori della Zeta ζ *di Riemann sugli interi positivi pari.*
Cambiando k *in* $2k$ *dalla relazione precedente si ottiene che*

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k} = \frac{1}{(2k-1)!}\left[\frac{d^{2k-1}}{dz^{2k-1}}\left(\frac{1}{2z} - \frac{\pi}{2}\cot(\pi z)\right)\right]_{z=0}$$

con $k = 1, 2, 3 \ldots,$ *ovvero nel disco* $|z| < 1$*, si ha*

$$\frac{1}{2z} - \frac{\pi}{2}\cot(\pi z) = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k) z^{2k-1}$$

Osserviamo infine che

$$\zeta(2k) = 1 + O\left(\frac{1}{2^k}\right) \sim 1$$

quindi

$$\sqrt{\zeta(2k)} \longrightarrow 1 \quad \text{\textit{per} } k \to \infty$$

Capitolo 3

Numeri di Bernoulli

Definizione 3.1. *Si chiamano **numeri di Bernoulli** i valori:*

$$B_n = \left(\frac{d^n}{dz^n} \frac{z}{e^z - 1} \right)_{z=0}$$

con $n = 0, 1, 2 \ldots$, ovvero i numeri tali che, nel disco $|z| < 2\pi$, si ha

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

Osserviamo che

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z + ze^z}{2(e^z - 1)} = \frac{z(1 + e^z)}{2(e^z - 1)}$$

$$f(-z) = \frac{-z}{e^{-z} - 1} + \frac{-z}{2} = \frac{-z - ze^z}{2(e^{-z} - 1)} = \frac{z(1 + e^z)}{2(e^z - 1)}$$

quindi si ha identicamente che

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{-z}{e^{-z} - 1} - \frac{z}{2}$$

ovvero

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2}$$

è una funzione pari che per $z = 0$ assume il valore 1. Segue che

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_{2k+1} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

Inoltre per $n \geq 2$ si ha che

$$1 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \right) \frac{e^z - 1}{z} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!(n-k)!} \right) z^{n-1}$$

da cui
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!(n-k)!} = 0$$
Anzi, moltiplicando per $n!$ si ottiene che
$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} B_k = 0 & (n = 2, 3, 4, \ldots) \\ \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} B_k = B_n & (n = 0, 2, 3, 4, \ldots). \end{cases}$$
Quest'ultima relazione si scrive anche
$$B_n = (1 + B)^n \quad (n \neq 1)$$
Segue che
$$B_{n-1} = -\frac{1 + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} B_1 + \ldots + \begin{pmatrix} n \\ n-2 \end{pmatrix} B_{n-2}}{\begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix}}$$
Questa formula ricorrente mostra che i numeri di Bernoulli sono razionali e permette di calcolarli successivamente:
$$\begin{array}{l} B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \\ B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}, \quad B_{14} = \frac{7}{6}, \quad B_{16} = -\frac{3617}{510}, \ldots \end{array}$$
Nel disco $|z| < \pi$ si ha
$$\begin{aligned} \cot z &= i\frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1} = \\ &= i + \frac{1}{z} \cdot \frac{2iz}{e^{2iz} - 1} = \\ &= i + \frac{1}{z}\left(1 - iz + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{B_{2k}}{(2k)!}(2z)^{2k}\right) = \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1} \end{aligned}$$
da cui, per $|z| < 1$, si ha
$$\frac{1}{2z} - \frac{\pi}{2} \cot \pi z = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k} B_{2k}}{2 \cdot (2k)!} z^{2k-1}$$
Segue che
$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k} = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k} B_{2k}}{2 \cdot (2k)!}$$

per $k = 1, 2, 3\dots$ in quanto abbiamo dimostrato in precedenza che

$$\frac{1}{2z} - \frac{\pi}{2}\cot \pi z = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k) z^{2k-1}$$

$(\zeta(2k) = 1 + O\left(\frac{1}{4^k}\right))$.
In particolare

$$\zeta(2) = \pi^2 B_2 = \frac{\pi^2}{6}$$

in quanto

$$\frac{4}{4\pi^2}\zeta(2) = \frac{1}{6}$$

Andando avanti

$$\zeta(4) = -\frac{\pi^4 B_4}{3} = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\zeta(6) = \frac{2\pi^6 B_6}{45} = \frac{\pi^6}{945}$$

$$\zeta(2k) \leq \frac{\pi^2}{6}$$

Dalla precedente relazione si ottiene che

$$(-1)^{k-1} B_{2k} = \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\zeta(2k) = \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k}$$

da cui si osserva che $(-1)^{k-1}B_{2k} > 0$ per ogni $k \geq 1$, ovvero $B_2, B_4, B_6, \dots$ sono alternativamente positivi e negativi. Più precisamente, siccome

$$1 < \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \frac{\pi^2}{6}$$

si ha che

$$2\frac{(2k)!}{(2\pi)^{2k}} < (-1)^{k-1} B_{2k} \leqslant \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{(2k)!}{(2\pi)^{2k}}$$

per $k = 1, 2, 3\dots$.
Inoltre, poichè

$$\frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \leqslant 2\frac{(2k+2)!}{(2\pi)^{2k+2}} \Longleftrightarrow 3(k+1)(2k+1) \geqslant \pi^4 \Longleftrightarrow k \geq 4$$

allora

$$-B_8 < B_{10} < -B_{12} < \dots$$

ovvero $|B_{2k}|$ decresce per $k \leq 3$ e cresce per $k \geq 3$.

Definizione 3.2. *Si chiamano **polinomi di Bernoulli** i polinomi*

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}$$

con $n = 0, 1, 2 \ldots$, dove i B_k sono i numeri di Bernoulli.
La definizione si può riscrivere simbolicamente come

$$B_n(x) = (x + B)^n$$

In particolare

$$B_0(x) = 1$$
$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$$
$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$
$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

e così via. Osserviamo che tutti i polinomi di Bernoulli di grado dispari tranne $B_1(x)$ hanno termine noto nullo in quanto $B_n = 0$ per $n \geq 3$ dispari.
Si ha

$$B_n(0) = B_n$$

per $n = 0, 1, 2 \ldots$ e

$$B_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}, & \text{se } n = 1 \\ B_n, & \text{altimenti} \end{Bmatrix} = (-1)^n B_n$$

Proposizione 3.3. *Per ogni x e $|z| < 2\pi$ vale*

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n$$

Dimostrazione. Osserviamo che

$$\begin{aligned} \frac{ze^{xz}}{e^z - 1} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} z^n \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} \cdot \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \right) z^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k} \right) \frac{z^n}{n!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n \end{aligned}$$

□

Proposizione 3.4. *Per ogni x, y e per ogni $|z| < 2\pi$ si ha*

$$B_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(x) y^{n-k}$$

Dimostrazione. Vale

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x+y)}{n!} z^n &= \frac{z e^{xz} e^{yz}}{e^z - 1} = \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} z^n \right) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k(x)}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \right) z^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(x) y^{n-k} \right) \frac{z^n}{n!}
\end{aligned}$$

da cui

$$B_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(x) y^{n-k}$$

□

Corollario 3.5. *Vale*

$$B_n(x+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(x)$$

Dimostrazione. Basta prendere $y = 1$ nella proposizione precedente. □

Corollario 3.6. *Per ogni x, y e per ogni $|z| < 2\pi$ si ha*

$$B_n(x+1) - B_n(x) = n x^{n-1}$$

Dimostrazione. Per la proposizione precedente vale:

$$\begin{aligned}
B_n(1+x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(1) x^{n-k} = \\
&= \sum_{k=0,\ k\neq 1}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k} + \frac{n}{2} x^{n-1} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k} + n x^{n-1}
\end{aligned}$$

ovvero

$$B_n(x+1) - B_n(x) = n x^{n-1}$$

□

Corollario 3.7. *Vale*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) B_k(x) = B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$$

Corollario 3.8. *Per ogni x, y e per ogni $|z| < 2\pi$ si ha*

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$$

Dimostrazione. Vale

$$\begin{aligned} B_n(1-x) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) B_k(1)(-x)^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) (-1)^k B_k \cdot (-1)^{n-k} x^{n-k} = \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) B_k x^{n-k} \end{aligned}$$

da cui

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$$

□

Corollario 3.9. *Vale*

$$B_n(-x) = (-1)^n \left(B_n(x) + nx^{n-1} \right)$$

Dimostrazione. Vale

$$\begin{aligned} B_n(-x) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) B_k \cdot (-x)^{n-k} = \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) (-1)^k B_k \cdot x^{n-k} = \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) B_k(1) x^{n-k} = \\ &= (-1)^n B_n(x+1) \end{aligned}$$

Siccome abbiamo visto che

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$$

allora

$$B_n(-x) = (-1)^n \left(B_n(x) + nx^{n-1} \right)$$

□

Teorema 3.10. ***(Formula di sommazione di Eulero)***
Data $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ di classe C^1 allora

$$\sum_{a<k\leq b} f(k) = \int_a^b f(x)dx - [B_1(\{x\})f(x)]_a^b + \int_a^b B_1(\{x\})f'(x)dx$$

dove $B_1(\{x\}) = \{x\} - \frac{1}{2}$.

Proposizione 3.11. ***(Formula di sommazione)***
Dati m, n, r interi non negativi tali che $m < n$ allora

$$\sum_{k=m}^{n-1} k^r = \frac{B_{r+1}(n) - B_{r+1}(m)}{r+1}$$

Dimostrazione. Vale

$$B_{r+1}(n) - B_{r+1}(m) = \sum_{k=m}^{n-1} (B_{r+1}(k+1) - B_{r+1}(k)) = \sum_{k=m}^{n-1} (r+1)k^r$$

□

Proposizione 3.12. *Per $n = 0, 1, 2\dots$ e $m = 1, 2\dots$ vale*

$$B_n(mx) = m^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} B_n\left(x + \frac{k}{m}\right)$$

Dimostrazione. Vale

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{k=0}^{m-1} B_n\left(x + \frac{k}{m}\right) &= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n\left(x + \frac{k}{m}\right)}{n!} z^n = \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{ze^{\left(x+\frac{k}{m}\right)z}}{e^z - 1} = \\
&= \frac{ze^{xz}}{e^z - 1} \frac{\left(e^{\frac{z}{m}}\right)^m - 1}{e^{\frac{z}{m}} - 1} = \\
&= \frac{m\frac{z}{m}e^{mx\frac{z}{m}}}{e^{\frac{z}{m}} - 1} = \\
&= m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(mx)}{n!} \frac{z^n}{m^n} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{B_n(mx)}{m^{n-1}}
\end{aligned}$$

quindi

$$B_n(mx) = m^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} B_n\left(x + \frac{k}{m}\right)$$

□

Proposizione 3.13. ***(Derivata di un polinomio di Bernoulli)***
Per $n = 1, 2, 3\ldots$ vale

$$B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$$

Dimostrazione. Derivando

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$$

si ottiene per $n \geq 1$ che

$$B_n'(x+1) - B_n'(x) = n(n-1)x^{n-2} = n\left(B_{n-1}(x+1) - B_{n-1}(x)\right)$$

ovvero

$$B_n'(x+1) - nB_{n-1}(x+1) = B_n'(x) - nB_{n-1}(x)$$

Dunque il polinomio $B_n'(x) - nB_{n-1}(x)$ ha periodo 1 e quindi deve essere costante. Tuttavia dalla definizione si ha

$$B_n'(0) = \binom{n}{n-1} B_{n-1}(0) = nB_{n-1}(0)$$

da cui

$$B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$$

□

Ci sarà in seguito molto utile il seguente lemma:

Lemma 3.14. ***(Formula di sommazione di Eulero-MacLaurin)***
Se la funzione $f(x)$, a valori reali o complessi, è di classe C^q nell'intervallo $[a, b]$ e $q \geq 1$ allora:

$$\sum_{a<k\leqslant b} f(k) = \int_a^b f(x)dx + \sum_{r=1}^{q} \frac{(-1)^r}{r!}\left[B_r(\{x\})f^{(r-1)}(x)\right]_a^b + \frac{(-1)^{q+1}}{q!}\int_a^b B_q(\{x\})f^{(q)}(x)dx$$

dove k è intero e $\{x\} = x - [x]$ è la parte frazionaria di x.
In particolare se $a = m$ e $b = n$ sono interi allora

$$\sum_{k=m+1}^{n} f(k) = \int_m^n f(x)dx + \sum_{r=1}^{q}(-1)^r \frac{B_r}{r!}\left(f^{(r-1)}(n) - f^{(r-1)}(m)\right) + \frac{(-1)^{q+1}}{q!}\int_m^n B_q(\{x\})f^{(q)}(x)dx$$

oppure anche

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(x)dx + \frac{f(m)+f(n)}{2} + \sum_{r=1}^{[\frac{q}{2}]} \frac{B_{2r}}{(2r)!}\left(f^{(2r-1)}(n) - f^{(2r-1)}(m)\right) + \frac{(-1)^{q+1}}{q!}\int_m^n B_q(\{x\})f^{(q)}(x)dx$$

Dimostrazione. Se $q \geq 2$ allora $B_q(0) = B_q(1) = B_q$, quindi la funzione periodica $B_q(\{x\})$ è continua.
Integrando per parti si ottiene

$$\frac{(-1)^{q+1}}{q!}\int_a^b B_q(\{x\})f^{(q)}(x)dx = \frac{(-1)^{q+1}}{q!}\Big[B_q(\{x\})f^{(q-1)}(x)\Big]_a^b - \frac{(-1)^{q+1}}{q!}\int_a^b B_q'(\{x\})f^{(q-1)}(x)dx$$

ovvero, per $q \geq 2$, vale

$$\frac{(-1)^{q+1}}{q!}\int_a^b B_q(\{x\})f^{(q)}(x)dx = \frac{(-1)^q}{(q-1)!}\int_a^b B_{q-1}(\{x\})f^{(q-1)}(x)dx - \frac{(-1)^q}{q!}\Big[B_q(\{x\})f^{(q-1)}(x)\Big]_a^b$$

in quanto sappiamo che

$$B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$$

Per $q = 1$ si ha invece, se k è un intero, che

$$\int_k^{k+1} B_1(\{x\})f'(x)dx = \int_k^{k+1}\left(x - k - \frac{1}{2}\right)f'(x)dx = \frac{f(k)+f(k+1)}{2} - \int_k^{k+1} f(x)dx$$

$$\int_a^{[a]+1} B_1(\{x\})f'(x)dx = \int_a^{[a]+1}\left(x - [a] - \frac{1}{2}\right)f'(x)dx = \frac{f([a]+1)}{2} - \left(\{a\} - \frac{1}{2}\right)f(a) - \int_a^{[a]+1} f(x)dx$$

$$\int_{[b]}^b B_1(\{x\})f'(x)dx = \int_{[b]}^b\left(x - [b] - \frac{1}{2}\right)f'(x)dx = \frac{f([b])}{2} + \left(\{b\} - \frac{1}{2}\right)f(b) - \int_{[b]}^b f(x)dx$$

Ne segue che

$$\int_a^b B_1(\{x\})f'(x)dx = \int_a^{[a]+1} B_1^(\{x\})f'(x)dx + \sum_{k=[a]+1}^{[b]-1}\int_k^{k+1} B_1(\{x\})f'(x)dx + \int_{[b]}^b B_1(\{x\})f'(x)dx =$$

$$= \sum_{k=[a]+1}^{[b]} f(k) - \int_a^b f(x)dx + [B_1(\{x\})f(x)]_a^b$$

Applicando ripetutamente la formula trovata per $q \geq 2$ si ottiene

$$\frac{(-1)^{q+1}}{q!}\int_a^b B_q(\{x\})f^{(q)}(x)dx = \int_a^b B_1(\{x\})f'(x)dx - \sum_{r=2}^{q}\frac{(-1)^r}{r!}\Big[B_r(\{x\})f^{(r-1)}(x)\Big]_a^b =$$

$$= \sum_{a<k\leqslant b} f(k) - \int_a^b f(x)dx - \sum_{r=1}^{q}\frac{(-1)^r}{r!}\Big[B_r(\{x\})f^{(r-1)}(x)\Big]_a^b$$

da cui la tesi. □

Lemma 3.15. ***(Lemma di Abel)***
Vale

$$\sum_{k=m}^{n} a_k f(k) = \left(\sum_{k=m}^{n} a_k\right)f(n) - \int_m^n\left(\sum_{m\leq k\leq [x]} a_k\right)f'(x)dx$$

Osservazione 3.16. *Se $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ è C^1, infinitesima e non crescente (e positiva) allora esiste $c > 0$ tale che*

$$\sum_{1 \le k \le x} f(k) = \int_1^x f(y)dy + c + O(f(x))$$

Osservazione 3.17. *Ricordiamo che*

$$B_1(\{x\}) = \{x\} - \frac{1}{2}$$

Teorema 3.18. *Esiste il limite γ con $0 < \gamma < 1$ della successione*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$$

Quindi esiste il limite

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right) = \gamma$$

e si ha $0 < \gamma < 1$.

Dimostrazione. Applicando la formula di sommazione di Eulero con $a = 1,\ b = n$ e $f(x) = \frac{1}{x}$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= \int_1^n \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} - \int_1^n \frac{\{x\} - \frac{1}{2}}{x^2} dx = \\
&= \log n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} - \int_1^\infty \frac{\{x\} - \frac{1}{2}}{x^2} dx + \int_n^\infty \frac{\{x\} - \frac{1}{2}}{x^2} dx = \\
&= \log n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} - \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^2} dx + \frac{1}{2} + O\left(\int_n^\infty \frac{dx}{x^2} \right) = \\
&= \log n + 1 - \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^2} dx - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n} \right) = \\
&= \log n + \gamma + O\left(\frac{1}{n} \right)
\end{aligned}$$

Ma

$$0 < \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^2} dx < 1$$

quindi $0 < \gamma < 1$ e

$$\lim_{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right) = \gamma$$

$\square$

Definizione 3.19. *Si chiama* ***costante di Eulero-Mascheroni*** *il numero*

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right) = 0,577215\ldots$$

Applicando la formula di Eulero-MacLaurin alla funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ si ottiene, per ogni $q \geq 0$, che

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \sum_{r=1}^{q}\frac{B_{2r}}{2r}\left(1 - \frac{1}{n^{2r}}\right) - \int_1^n \frac{B_{2q+1}(\{x\})}{x^{2q+2}}dx$$

Poichè $B_{2q+1}(\{x\})$ è una funzione limitata allora l'integrale

$$\int_1^\infty \frac{B_{2q+1}(\{x\})}{x^{2q+2}}dx$$

converge.
Per $n \to +\infty$ si ricava quindi l'esistenza di γ e più precisamente si ha

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{q}\frac{B_{2r}}{2r} - \int_1^\infty \frac{B_{2q+1}(\{x\})}{x^{2q+2}}dx$$

per $q = 0, 1, 2\ldots.$
Ma allora, sottraendo le ultime due formule tra loro abbiamo

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{r=1}^{q}\frac{B_{2r}}{2r}\cdot\frac{1}{n^{2r}} + \int_n^\infty \frac{B_{2q+1}(\{x\})}{x^{2q+2}}dx$$

Integrando per parti si ottiene

$$\int_n^\infty \frac{B_{2q+1}(\{x\})}{x^{2q+2}}dx = \frac{1}{2q+2}\int_n^\infty \frac{dB_{2q+2}(\{x\})}{x^{2q+2}} = -\frac{B_{2q+2}}{2q+2}\cdot\frac{1}{n^{2q+2}} + \int_n^\infty \frac{B_{2q+2}(\{x\})}{x^{2q+3}}dx$$

con

$$\int_n^\infty \frac{B_{2q+2}(\{x\})}{x^{2q+3}}dx \ll \int_n^\infty \frac{dx}{x^{2q+3}} = \frac{1}{(2q+2)n^{2q+2}}$$

Segue, per q fissato, la seguente formula asintotica:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{r=1}^{q}\frac{B_{2r}}{2r}\cdot\frac{1}{n^{2r}} + O\left(\frac{1}{n^{2q+2}}\right)$$

(abbiamo un salto infinitesimo, le approssimazioni polinomiali non sono sufficienti nel campo dell'irrazionalità).

Capitolo 4

La funzione Γ

4.1 Prime proprietà

Definizione 4.1. *Definiamo*

$$\frac{1}{z\Gamma(z)}$$

come la funzione intera di ordine 1 *i cui zeri (semplici) sono* $-1, -2, -3\dots$ *e tale che*

$$\left(\frac{1}{z\Gamma(z)}\right)_{z=0} = 1$$

$$\left(\frac{d}{dz}\frac{1}{z\Gamma(z)}\right)_{z=0} = \gamma$$

dove γ *è la costante di Eulero.*

Proposizione 4.2. *Vale la seguente fattorizzazione di Weierstrass:*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$$

Dimostrazione. Posto

$$F(z) = \frac{1}{z\Gamma(z)}$$

abbiamo

$$G(z) = \log F(0) + \frac{F'}{F}(0)z = \gamma z$$

quindi

$$G(z) = \gamma z$$

e perciò

$$\frac{1}{z\Gamma(z)} = e^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$$

ovvero

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

$\square$

Come conseguenza abbiamo che per la funzione intera $\frac{1}{z\Gamma(z)}$ vale $\alpha = \beta = p = q = g = 1$ (in quanto $\sum_n n^{-(p+1)} < +\infty$ per $p = 1$).
Quindi $\Gamma(z)$ è meromorfa e sempre diversa da zero; i suoi poli (semplici) sono $0, -1, -2, -3 \ldots$.

Proposizione 4.3. ***(Formula di Gauss)***
Per $z \neq 0, -1, -2 \ldots$ vale

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

Dimostrazione. Siccome

$$\prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{z}{k}} = e^{-z\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$$

e

$$\gamma = \lim_{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n) \right)$$

allora

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(z)} &= ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} = \\
&= z \lim_{n\to\infty} \left\{ e^{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\right) z} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} \right\} = \\
&= z \lim_{n\to\infty} \left\{ e^{-z\log n} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \right\} = \\
&= z \lim_{n\to\infty} \left\{ n^{-z} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \right\}
\end{aligned}$$

$\square$

Questa formula permette di calcolare immediatamente i residui della funzione $\Gamma(z)$.

Proposizione 4.4. *Per ogni $k \in \mathbb{N}$ (compreso $k = 0$) si ha*

$$\operatorname{Res} \Gamma(z) = \frac{(-1)^k}{k!}$$

Dimostrazione. Vale

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\Gamma(z) &= ((z+k)\Gamma(z))_{z=-k} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-k}n!}{-k(-k+1)\cdots(-1)1\cdot 2\cdots(n-k)} = \\
&= \frac{(-1)^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left\{n^{-k}\cdot n(n-1)\dots(n-k+1)\right\} = \\
&= \frac{(-1)^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right\} = \\
&= \frac{(-1)^k}{k!}
\end{aligned}$$

□

Proposizione 4.5. ***(Formula di Eulero)***
Se $z \neq 0, -1, -2\dots$ allora

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^z\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}$$

Dimostrazione. Vale

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(z)} &= z\lim_{n\to\infty}\left\{n^{-z}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)\right\} = \\
&= z\lim_{n\to\infty}\left\{\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-z}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)\right\} = \\
&= z\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-z}\left(1+\frac{z}{k}\right)\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\right\} = \\
&= z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-z}\left(1+\frac{z}{k}\right)
\end{aligned}$$

dove nella seconda uguaglianza abbiamo usato il fatto che

$$n = \prod_{k=1}^{n-1}\frac{k+1}{k}$$

$$n^{-z} = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-z}$$

□

4.2 Equazioni funzionali di Γ

Proposizione 4.6. ***(Prima equazione funzionale)***
Vale, per ogni $z \in \mathbb{C}$, la seguente formula:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

Dimostrazione. Vale

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \frac{1}{z+1}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{z+1}{n}\right)^{-1} = \\
&= \frac{1}{z+1}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{z}\left(\frac{k+1+z}{k}\cdot\frac{k}{k+1}\right)^{-1} = \\
&= \frac{1}{z+1}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{z}\left(1+\frac{z}{k+1}\right)^{-1} = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{z}\cdot\frac{1}{z+1}\prod_{k=2}^{n+1}\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}\right\} = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{z}\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}\right)\left(1+\frac{z}{n+1}\right)^{-1}\right\} = \\
&= \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{z}\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1} = \\
&= z\Gamma(z)
\end{aligned}$$

□

Osserviamo che in particolare per ogni intero $n \geq 1$ si ha

$$\Gamma(n+1) = n!\Gamma(1)$$

Tuttavia

$$\Gamma(1) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} = 1$$

quindi

$$\Gamma(n+1) = n!$$

per ogni $n = 0, 1, 2 \ldots$.

Proposizione 4.7. ***(Seconda equazione funzionale)***
Per ogni $z \in \mathbb{C}$ vale

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

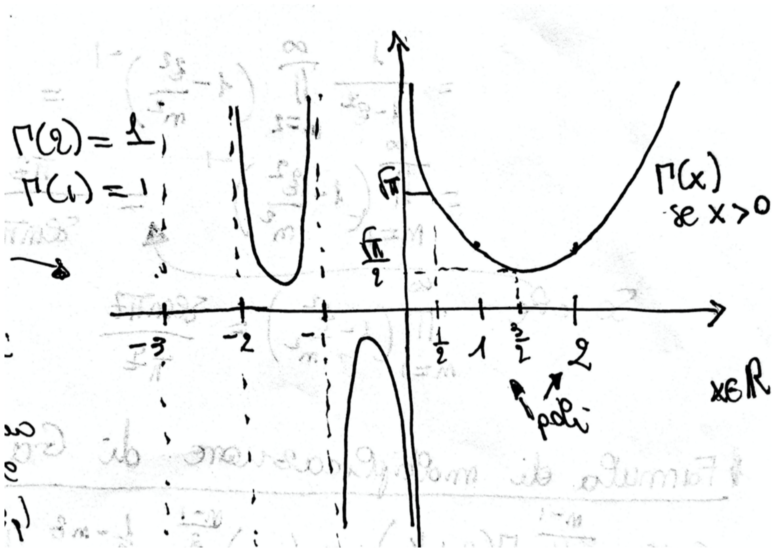
Dimostrazione. Vale

$$
\begin{aligned}
z\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \Gamma(1+z)\Gamma(1-z) = \\
&= \frac{1}{1-z^2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+z}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-z}\left(1+\frac{1+z}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1-z}{n}\right)^{-1} = \\
&= \frac{1}{1-z^2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2}-\frac{z^2}{n^2}\right)^{-1} = \\
&= \frac{1}{1-z^2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{(n+1)^2}\right)^{-1} = \\
&= \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)^{-1} = \\
&= \frac{\pi z}{\sin(\pi z)}
\end{aligned}
$$

in quanto sappiamo che

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$$

□



4.3 Formule di moltiplicazione e di duplicazione

Proposizione 4.8. ***(Formula di moltiplicazione di Gauss)***
Per ogni $n = 1, 2, 3\ldots$ *vale*

$$\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-nz}\Gamma(nz)$$

Dimostrazione. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \lim_{m\to\infty} \frac{m^z m!}{z(z+1)\dots(z+m)} = \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{m^z (m-1)!}{z(z+1)\dots(z+m-1)} \lim_{m\to\infty} \frac{m}{z+m} = \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{m^z (m-1)!}{z(z+1)\dots(z+m-1)}
\end{aligned}$$

Segue che

$$\begin{aligned}
&\frac{n^{nz-1}}{\Gamma(nz)} \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right) = \\
&= \frac{n^{nz-1}}{\lim_{m\to\infty} \frac{(nm)^{nz}(nm-1)!}{nz(nz+1)\dots(nz+nm-1)}} \prod_{k=0}^{n-1} \lim_{m\to\infty} \frac{m^{z+\frac{k}{n}}(m-1)!}{\left(z+\frac{k}{n}\right)\left(z+\frac{k}{n}+1\right)\dots\left(z+\frac{k}{n}+m-1\right)} = \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{n^{nz-1} m^{nz+\frac{n-1}{2}}((m-1)!)^n n^{nm}}{(nm)^{nz}(nm-1)!} = \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{m^{\frac{n-1}{2}}((m-1)!)^n n^{nm-1}}{(nm-1)!}
\end{aligned}$$

Dunque la funzione

$$\frac{n^{nz-1}}{\Gamma(nz)} \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right)$$

non dipende da z ed è identicamente uguale al valore che assume per $z = \frac{1}{n}$, ovvero

$$\frac{n^{nz-1}}{\Gamma(nz)} \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right) > 0$$

perchè $\Gamma(z) > 0$ se z è reale positivo.
Tuttavia, siccome abbiamo dimostrato che

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

allora

$$\left\{\prod_{k=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\right\}^2 = \prod_{k=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{k}{n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\pi}{\sin\frac{k\pi}{n}} = \frac{\pi^{n-1}}{\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n}}$$

Segue che

$$\frac{n^{nz-1}}{\Gamma(nz)} \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right) = \sqrt{\frac{\pi^{n-1}}{\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n}}}$$

Poichè

$$x^n - 1 = (x-1)\left(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1\right)$$

allora le radici del polinomio $x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1$ sono le radici n-esime dell'unità diverse da 1.
Ne segue che

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1 = \prod_{k=1}^{n-1} \left(x - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$$

da cui, per $x = 1$, si ha

$$\begin{aligned} n &= \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} \left\{-e^{i\frac{k\pi}{n}} \left(e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right)\right\} = \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} \left(-2ie^{i\frac{k\pi}{n}} \sin\frac{k\pi}{n}\right) = \\ &= 2^{n-1}(-i)^{n-1} e^{i\frac{\pi}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \\ &= 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} \end{aligned}$$

ovvero

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Possiamo quindi concludere che

$$\prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-nz} \Gamma(nz)$$

□

Nel caso particolare in cui $n = 2$ la formula di moltiplicazione di Gauss diventa la **formula di duplicazione di Legendre**

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\; 2^{1-2z}\; \Gamma(2z)$$

che per $z = \frac{1}{2}$ fornisce

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Vediamo due immediati corollari.

Corollario 4.9. *Vale*

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)\ 2^z\ \Gamma(1-z)$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)} &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{z}{2}\right)} = \\ &= \frac{\sin(\frac{\pi z}{2})\cdot\sqrt{\pi}2^z\ \Gamma(1-z)}{\pi} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)\ 2^z\ \Gamma(1-z)\end{aligned}$$

□

Corollario 4.10. *Vale*

$$\log\Gamma(z) = -\gamma z - \log z + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{n} - \log\left(1+\frac{z}{n}\right)\right)$$

e derivandola si ottiene

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n(n+z)}$$

Dimostrazione. Sappiamo che

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}e^{-\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}e^{\frac{z}{n}}$$

Passando al logaritmo in entrambi i membri si ottiene

$$\log\Gamma(z) = -\gamma z - \log z + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{n} - \log\left(1+\frac{z}{n}\right)\right)$$

Inoltre, siccome

$$D\log\left(1+\frac{z}{n}\right) = \frac{1}{n\left(1+\frac{z}{n}\right)} = \frac{1}{z+n}$$

segue che

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n(n+z)}$$

Osserviamo che la derivazione termine a termine è lecita in quanto per il Lemma di Mittag-Leffler e la relativa osservazione si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n(n+z)}$$

converge totalmente su ogni compatto che non contenga nessuno dei punti $-1, -2, -3\ldots$.

□

Osservazione 4.11. *In particolare*

$$\Gamma'(1) = -\gamma - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = -\gamma - 1 + 1 = -\gamma$$

4.4 L'integrale di Eulero e la Formula di Stirling

Definizione 4.12. *Si chiama **integrale di Eulero** il seguente*

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{z-1} dx$$

con $\mathrm{Re}(z) > 0$.
C'è convergenza uniforme per $a \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant b$, *con* $0 < a < b$ *e convergenza totale a destra, quindi l'integrale di Eulero rappresenta una funzione olomorfa nel semipiano* $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Teorema 4.13. *Se* $\mathrm{Re}(z) > 0$ *vale*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che per ogni intero $n \geq 1$ e per ogni t tale che $0 \leq t < n$ si ha

$$0 \leqslant e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \frac{t^2}{n} e^{-t}$$

Infatti

$$1 + \frac{t}{n} \leqslant 1 + \frac{t}{n} + \frac{t^2}{2!n^2} + \cdots \leqslant 1 + \frac{t}{n} + \frac{t^2}{n^2} + \cdots$$

ovvero

$$1 + \frac{t}{n} \leqslant e^{\frac{t}{n}} \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{-1}$$

da cui

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^t$$

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}$$

Quindi

$$0 \leqslant e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t} \left\{1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right\} \leqslant e^{-t} \left\{1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right\}$$

Inoltre $(1-\alpha)^n \geq 1 - n\alpha$ per $0 \leq \alpha \leq 1$ (disuguaglianza di Bernoulli), quindi posto $\alpha = \frac{t^2}{n^2}$ si ottiene

$$1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n \leqslant \frac{t^2}{n}$$

Segue perciò che

$$0 \leqslant e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \frac{t^2}{n} e^{-t}$$

Vogliamo ora dimostrare che

- $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$
- $\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}$

Vediamo le dimostrazioni dei due punti nell'ordine:

- Abbiamo

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^n e^{-t} t^{z-1} dt - \int_0^n \left\{e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right\} t^{z-1} dt\right) = \\ &= \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt\end{aligned}$$

perchè

$$\begin{aligned}\left|\int_0^n \left\{e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right\} t^{z-1} dt\right| &\leq \int_0^n t^{\mathrm{Re}(z)-1} \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) dt \leq \\ &\leqslant \frac{1}{n} \int_0^n e^{-t} t^{Re(z)+1} dt \leqslant \\ &\leq \frac{1}{n} \int_0^\infty e^{-t} t^{Re(z)+1} dt \ll \frac{1}{n}\end{aligned}$$

Segue che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

- Abbiamo

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = n^z \int_0^1 (1-t)^n t^{z-1} dt$$

e

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-t)^n t^{z-1} dt &= \frac{1}{z} \left[(1-t)^n t^z\right]_0^1 + \frac{n}{z} \int_0^1 (1-t)^{n-1} t^z dt = \\ &= \frac{n}{z} \int_0^1 (1-t)^{n-1} t^z dt = \\ &= \frac{n(n-1)}{z(z+1)} \int_0^1 (1-t)^{n-2} t^{z+1} dt = \\ &= \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \int_0^1 t^{z+n-1} dt = \\ &= \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}\end{aligned}$$

Abbiamo quindi

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt = \lim_{n\to\infty}\frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)} = \Gamma(z)$$

□

Teorema 4.14. ***(Formula di Stirling)***
Sia $\varepsilon > 0$ e q fissati. Si ha la seguente formula asintotica

$$\log\Gamma(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z + \log\sqrt{2\pi} + \sum_{k=1}^{q}\frac{B_{2k}}{(2k-1)2k}\cdot\frac{1}{z^{2k-1}} + O\left(\frac{1}{|z|^{2q+1}}\right)$$

uniformemente per $|z| \geq \varepsilon$ e $|\arg(z)| \leq \pi - \varepsilon$.
In particolare

$$\log\Gamma(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z + \log\sqrt{2\pi} + O_\varepsilon\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

Dimostrazione. Sia $z \in \mathbb{C}$ un punto fuori del semiasse reale negativo e sia n un intero positivo. Allora

$$\begin{aligned}
\log\frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n)} &= z\log n - \log(z+n) - \sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{z-1}{k}\right) = \\
&= z\log n - \log(z+n) - \int_1^n \log\left(1+\frac{z-1}{x}\right)dx - \frac{1}{2}\log z - \\
&- \frac{1}{2}\log(z+n-1) + \frac{1}{2}\log n - \\
&- \sum_{k=1}^{q}\frac{B_{2k}}{(2k-1)2k}\left(\frac{1}{(z+n-1)^{2k-1}} - \frac{1}{n^{2k-1}} - \frac{1}{z^{2k-1}} + 1\right) - \\
&- \frac{1}{2q+1}\int_1^n B_{2q+1}(\{x\})\left(\frac{1}{(z+x-1)^{2q+1}} - \frac{1}{x^{2q+1}}\right)dx = \\
&= \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - \left(z+n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{z-1}{n}\right) + \log\left(1-\frac{1}{z+n}\right) - \\
&- \sum_{k=1}^{q}\frac{B_{2k}}{(2k-1)2k}\left(\frac{1}{(z+n-1)^{2k-1}} - \frac{1}{n^{2k-1}}\right) + \sum_{k=1}^{q}\frac{B_{2k}}{(2k-1)2k}\frac{1}{z^{2k-1}} - \\
&- \sum_{k=1}^{q}\frac{B_{2k}}{(2k-1)2k} - \frac{1}{2q+1}\int_1^n \frac{B_{2q+1}(\{x\})}{(z+x-1)^{2q+1}}dx + \frac{1}{2q+1}\int_1^n \frac{B_{2q+1}(\{x\})}{x^{2q+1}}dx
\end{aligned}$$

Tramite un'integrazione parti si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2q+1}\int_1^\infty \frac{B_{2q+1}(\{x\})}{(z+x-1)^{2q+1}}dx &= -\frac{1}{2q+1}\int_0^\infty \frac{B_{2q+1}(\{x\})}{(z+x)^{2q+1}}dx = \\
&= -\frac{B_{2q+2}}{(2q+1)(2q+2)}\frac{1}{z^{2q+1}} - \frac{1}{2q+2}\int_0^\infty \frac{B_{2q+2}(\{x\})}{(z+x)^{2q+2}}dx
\end{aligned}$$

e se $-\pi+\varepsilon \leqslant \arg z \leqslant \pi-\varepsilon$ si ha

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{B_{2q+2}(\{x\})}{(z+x)^{2q+2}}dx \ll \int_0^\infty \frac{dx}{|z+x|^{2q+2}} &\leq \\
\leqslant \int_0^\infty \frac{dx}{(|z|^2-2|z|x\cos\varepsilon+x^2)^{q+1}} &= \\
= \int_{-|z|\cos\varepsilon}^{+\infty} \frac{dx}{\left(|z|^2\sin^2\varepsilon+x^2\right)^{q+1}} &\leq \\
\leq\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(|z|^2\sin^2\varepsilon+x^2\right)^{q+1}} &= \\
= \frac{1}{(|z|\sin\varepsilon)^{2q+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{q+1}}
\end{aligned}$$

Passando al limite per $n \to \infty$ e ricordando che

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

si ottiene che

$$\log\Gamma(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z + C_q + \sum_{k=1}^{q} \frac{B_{2k}}{(2k-1)2k}\frac{1}{z^{2k-1}} - \frac{1}{2q+1}\int_0^\infty \frac{B_{2q+1}(\{x\})}{(z+x)^{2q+1}}dx,$$

dove

$$C_q = 1 - \sum_{k=1}^{q} \frac{B_{2k}}{(2k-1)2k} + \frac{1}{2q+1}\int_1^\infty \frac{B_{2q+1}(\{x\})}{x^{2q+1}}dx$$

è una costante dipendente a priori da q e

$$-\frac{1}{2q+1}\int_0^\infty \frac{B_{2q+1}(\{x\})}{(z+x)^{2q+1}}dx \ll_{q,\varepsilon} \frac{1}{|z|^{2q+1}}$$

per $|\arg z| \leqslant \pi-\varepsilon$.
La costante C_q è quindi tale che

$$\log\Gamma(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z + C_q + O\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

per $|\arg z| \leqslant \pi-\varepsilon$ e per ogni q.
Per trovare la costante C_q passiamo ai logaritmi nella formula di duplicazione di Legendre

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\ 2^{1-2z}\ \Gamma(2z)$$

ottenendo

$$\log\Gamma(z) + \log\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \log\sqrt{\pi} + \log 2 - 2x\log 2 + \log\Gamma(2z)$$

che per la formula trovata sopra diventa

$$\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z + C_q + z\log\left(z+\frac{1}{2}\right) - z - \frac{1}{2} + C_q - \log\sqrt{\pi} - \log 2 + 2z\log 2 - \left(2z-\frac{1}{2}\right)\log(2z) + 2z - C_q \ll \frac{1}{|z|}$$

ovvero

$$z\log\left(1+\frac{1}{2z}\right) + C_q - \frac{1}{2} - \log\sqrt{2\pi} \ll \frac{1}{|z|}$$

$$z\left(\frac{1}{2z}+O\left(\frac{1}{|z|^2}\right)\right) + C_q - \frac{1}{2} - \log\sqrt{2\pi} \ll \frac{1}{|z|}$$

$$C_q - \log\sqrt{2\pi} \ll \frac{1}{|z|}$$

Segue che per $|z| \to +\infty$ si ha

$$C_q = \log\sqrt{2\pi}$$

Ma quindi

$$\log\Gamma(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z + C_q + \sum_{k=1}^{q}\frac{B_{2k}}{(2k-1)2k}\frac{1}{z^{2k-1}} - \frac{1}{2q+1}\int_0^\infty \frac{B_{2q+1}(\{x\})}{(z+x)^{2q+1}}dx,$$

diventa

$$\log\Gamma(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z + \log\sqrt{2\pi} + \sum_{k=1}^{q}\frac{B_{2k}}{(2k-1)2k}\frac{1}{z^{2k-1}} - \frac{1}{2q+1}\int_0^\infty \frac{B_{2q+1}(\{x\})}{(z+x)^{2q+1}}dx,$$

Ricordando che

$$-\frac{1}{2q+1}\int_0^\infty \frac{B_{2q+1}(\{x\})}{(z+x)^{2q+1}}dx \ll_{q,\varepsilon} \frac{1}{|z|^{2q+1}}$$

per $|\arg z| \leqslant \pi - \varepsilon$ si ottiene quindi

$$\log\Gamma(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z + \log\sqrt{2\pi} + \sum_{k=1}^{q}\frac{B_{2k}}{(2k-1)2k}\cdot\frac{1}{z^{2k-1}} + O\left(\frac{1}{|z|^{2q+1}}\right)$$

□

Teorema 4.15. ***(Formula di Stirling)***
Per $|z| \geq \varepsilon$, $|z| \to \infty$ e $|\arg(z)| \leq \pi - \varepsilon$ vale uniformemente

$$\log\Gamma(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z + \log\sqrt{2\pi} + O_\varepsilon\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

Dimostrazione. Vale

$$\log\Gamma(z) = \lim_n \log\left(\frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n)}\right) =$$
$$= \lim_n \left\{ z\log n - \log(z+n) - \sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{z-1}{k}\right)\right\}$$

Osserviamo che, il lemma di Abel applicato a $f(x)=\log\left(1+\frac{z-1}{x}\right)$ e $f'(x)=\frac{1}{x+z-1}-\frac{1}{x}$ si ha

$$\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{z-1}{k}\right)=n\log\left(1+\frac{z-1}{n}\right)-\int_1^n\frac{[x](1-z)}{x(x+z-1)}dx=$$
$$=n\log\left(\frac{n+z-1}{n}\right)+(z-1)\int_1^n\frac{[x]}{x(x+z-1)}dx$$

Inoltre, siccome

$$\int_1^x\left(\{u\}-\frac{1}{2}\right)du=g(x)=O(1)\quad \text{e } g(1)=0$$

e inoltre

$$\left(\frac{1}{z-1}\log\frac{x+z-1}{x}\right)'=-\frac{1}{x(x+z-1)}$$

allora

$$(z-1)\int_1^n\frac{[x]}{x(x+z-1)}dx=(z-1)\int_1^n\frac{x-\{x\}}{x(x+z-1)}dx=$$
$$=(z-1)\left\{\int_1^n\frac{dx}{x+z-1}-\int_1^n\frac{\{x\}-\frac{1}{2}}{x(x+z-1)}dx-\frac{1}{2}\int_1^n\frac{dx}{x(x+z-1)}\right\}=$$
$$=(z-1)\left\{\log(z+n-1)-\log z+\frac{1}{2(z-1)}\left[\log\left(\frac{z+x-1}{x}\right)\right]_1^n-\int_1^n\frac{\{x\}-\frac{1}{2}}{x(x+z-1)}dx\right\}=$$
$$=(z-1)\left\{\log(z+n-1)-\log z+\frac{1}{2(z-1)}\left(\log\left(\frac{z+n-1}{n}\right)-\log z\right)-\int_1^n\frac{\{x\}-\frac{1}{2}}{x(x+z-1)}dx\right\}=$$
$$=(z-1)\log(z+n-1)-\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z+\frac{1}{2}\log\left(\frac{z+n-1}{n}\right)-(z-1)\int_1^n\frac{\{x\}-\frac{1}{2}}{x(x+z-1)}dx$$

Segue che

$$\log\Gamma(z)=\lim_n\log\left(\frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n)}\right)=$$
$$=\lim_n\left\{z\log n-\log(z+n)-\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{z-1}{k}\right)\right\}=$$
$$=\lim_n\left\{z\log n-\log(z+n)-n\log\left(\frac{n+z-1}{n}\right)-(z-1)\log(z+n-1)+\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\log\left(\frac{z+n-1}{n}\right)+(z-1)\int_1^n\frac{\{x\}-\frac{1}{2}}{x(x+z-1)}dx\right\}=$$
$$=\lim_n\left\{-z\log\left(\frac{z+n-1}{n}\right)+\log\left(\frac{z+n-1}{z+n}\right)-\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{z+n-1}{n}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z+(z-1)\int_1^n\frac{\{x\}-\frac{1}{2}}{x(x+z-1)}dx\right\}$$

Tuttavia

$$\lim_n \left(\log\left(\frac{z+n-1}{n}\right)\right) = 0$$
$$\lim_n \left(\log\left(\frac{z+n-1}{z+n}\right)\right) = 0$$
$$\lim_n \left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{z+n-1}{n}\right)\right) = 0$$
$$\lim_n \left(n\log\left(\frac{z+n-1}{n}\right)\right) = (z-1)\lim_n \left(\frac{n}{z-1}\log\left(\frac{z+n-1}{n}\right)\right) = z-1$$

Quindi il limite precedente diventa

$$\log\Gamma(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z + 1 + (z-1)\lim_n \left(\int_1^n \frac{\{x\}-\frac{1}{2}}{x(x+z-1)}dx\right)$$

Osserviamo ora che

$$(z-1)\left(\int_1^\infty \frac{\{x\}-\frac{1}{2}}{x(x+z-1)}dx\right) = -\int_1^\infty \left(\frac{B_1(\{x\})}{z+x-1} - \frac{B_1(\{x\})}{x}\right)dx$$

Siccome

$$DB_k(x) = kB_{k-1}(x)$$

allora

$$\int_1^n \left(\{x\}-\frac{1}{2}\right)dx = \int_1^n \left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)dx = \frac{(x-[x])^2}{2} - \frac{x-[x]}{2} + c$$

e siccome $B_2(y) = y^2 - y + \frac{1}{6}$ allora, posto $x-[x] = y$ si ottiene $c = \frac{1}{12}$ in modo che

$$\frac{(x-[x])^2}{2} - \frac{x-[x]}{2} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}B_2(\{x\})$$

Quindi

$$\int_1^\infty \frac{B_1(\{x\})}{z+x-1}dx = \left[\frac{B_2(\{x\})}{2(z+x-1)}\right]_1^\infty + \int_1^\infty \frac{B_2(\{x\})}{2(z+x-1)^2}dx = -\frac{1}{12z} + \int_1^\infty \frac{B_2(\{x\})}{2(z+x-1)^2}dx$$

Ora

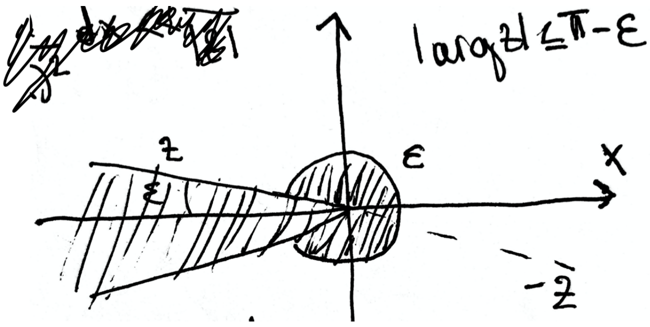
$$-\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{B_2(\{x\})}{(z+x-1)^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{B_2(\{x\})}{(z+x)^2}dx$$

Osserviamo ora che

$$|x+z|^2 = x^2 + |z|^2 + 2\operatorname{Re}(xz) = x^2 + |z|^2 + 2x\operatorname{Re}(z) = x^2 + |z|^2 + 2x|z|\cos(\arg z)$$
$$|\arg z| \leqslant \pi - \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \cos(\arg z) \geqslant \cos(\pi-\varepsilon) = -\cos\varepsilon$$

quindi

$$|x+z|^2 \geqslant x^2 + \left|z^2\right| - 2x|z|\cos\varepsilon$$



Segue che

$$
\begin{aligned}
\left|-\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{B_2(\{x\})}{(x+z-1)^2}dx\right| = \left|-\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{B_2(\{x\})}{(x+z)^2}dx\right| &\leq \\
&\leq \int_0^\infty \frac{dx}{|x+z|^2} \leq \\
&\leq \int_0^\infty \frac{dx}{|z|^2+x^2-2x|z|\cos\varepsilon} = \\
&= \int_{-|z|\cos\varepsilon}^\infty \frac{dy}{|z|^2+(y-|z|\cos\varepsilon)(y+|z|\cos\varepsilon)} \leq \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{y^2+|z|^2\sin^2\varepsilon} = \\
&= \frac{1}{|z|\sin\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t^2+1}dt = \\
&= \frac{\pi}{|z|\sin\varepsilon} \ll \\
&\ll \frac{1}{\varepsilon|z|}
\end{aligned}
$$

dove abbiamo usato nell'ordine i seguenti cambi di variabile:

$$
x-|z|\cos\varepsilon = y
$$

$$
\frac{y}{|z|\sin\varepsilon} = t
$$

da cui

$$
-\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{B_2(\{x\})}{(z+x-1)^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{B_2(\{x\})}{(z+x)^2}dx \ll \frac{1}{|z|}
$$

Ci resta da trovare la costante C che è quindi tale che

$$
\log\Gamma(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z + C + O_\varepsilon\left(\frac{1}{|z|}\right)
$$

per $|\arg z| \leqslant \pi - \varepsilon$.
In particolare, vogliamo mostrare che

$$
\frac{1}{2}\log(2\pi) = 1 + \int_1^\infty \frac{B_1(\{x\})}{x}dx
$$

Per trovare la costante C passiamo ai logaritmi nella formula di duplicazione di Legendre

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\ 2^{1-2z}\ \Gamma(2z)$$

ottenendo

$$\log\Gamma(z) + \log\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \log\sqrt{\pi} + \log 2 - 2z\log 2 + \log\Gamma(2z)$$

che per la formula trovata sopra diventa

$$\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z + C + z\log\left(z+\frac{1}{2}\right) - z - \frac{1}{2} + C - \log\sqrt{\pi} - \log 2 + 2z\log 2 - \left(2z-\frac{1}{2}\right)\log(2z) + 2z - C \ll_\varepsilon \frac{1}{|z|}$$

ovvero

$$z\log\left(1+\frac{1}{2z}\right) + C - \frac{1}{2} - \log\sqrt{2\pi} \ll \frac{1}{|z|}$$
$$z\left(\frac{1}{2z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right)\right) + C - \frac{1}{2} - \log\sqrt{2\pi} \ll \frac{1}{|z|}$$
$$C - \log\sqrt{2\pi} \ll \frac{1}{|z|}$$

Segue che per $|z| \to +\infty$ si ha

$$C = \log\sqrt{2\pi}$$

Segue la tesi. □

Corollario 4.16. *Vale*

$$\log n! = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + \log\sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Dimostrazione. Posto $z = n+1$ nella formula di Stirling, avrei che

$$\begin{aligned}\left(n+\frac{1}{2}\right)\log(n+1) - n - 1 &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - n - 1 = \\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n + \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - n - 1 = \\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + O\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

□

Corollario 4.17. *Se* $|z| \geq \varepsilon$ *e* $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$ *allora*

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = \log z + O_\varepsilon\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

Dimostrazione. Vale per Cauchy che

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$$

con $|z - z_0| = \frac{\varepsilon}{2}$.
Prendiamo

$$f(z_0) = \log \Gamma(z_0) - \left(z_0 - \frac{1}{2} \right) \log z_0 + z_0 - \frac{1}{2} \log(2\pi) \ll_\varepsilon \frac{1}{|z_0|}$$

Ma allora

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz \ll_\varepsilon \frac{1}{|z_0|}$$

Siccome

$$f'(z_0) = \frac{\Gamma'(z_0)}{\Gamma(z_0)} - \log z_0 \ll_\varepsilon \frac{1}{|z_0|}$$

allora abbiamo la tesi. □

Corollario 4.18. *Se $|z| \geq \varepsilon$ e $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$ allora*

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left(\frac{z}{e} \right)^z \left(1 + O_\varepsilon \left(\frac{1}{|z|} \right) \right)$$

In particolare

$$n! = \left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + O \left(\frac{1}{n} \right) \right)$$

Corollario 4.19. *Dato $k \geq 1$ vale*

$$(-1)^k B_{2k} = 4\sqrt{\pi k} \left(\frac{k}{e\pi} \right)^{2k} + O \left(\frac{1}{k} \right)$$

Dimostrazione. Sappiamo che

$$(-1)^k B_{2k} = \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k)$$

Ma

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \leq 1 + \int_1^\infty \frac{dx}{x^{2k}} = 1 + \frac{1}{2k-1} = 1 + O \left(\frac{1}{k} \right)$$

Usando il corollario precedende e andando a sostituire si ha la tesi. □

Corollario 4.20. *Sia $z = x + iy$ con $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Allora si ha per $|y| \to +\infty$*

$$|\Gamma(x+iy)| = \sqrt{2\pi} |y|^{x-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|y|} \left(1 + O \left(\frac{1}{|y|} \right) \right)$$

Dimostrazione. Vale

$$\log\Gamma(x+iy) = \left(x-\frac{1}{2}+iy\right)\log(x+iy)-(x+iy)+\frac{1}{2}\log(2\pi)+O\left(\frac{1}{|y|}\right)$$

Siccome ci interessa il modulo, allora consideriamo la parte reale del logaritmo.

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\log\Gamma(x+iy)) &= \mathrm{Re}\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)\log(iy)+\log\left(1-\frac{ix}{y}\right)-x+\frac{1}{2}\log(2\pi)\right\}+O\left(\frac{1}{|y|}\right)=\\ &=\left(x-\frac{1}{2}\right)\log(|y|)-\frac{\pi}{2}|y|+x-x+\frac{1}{2}\log(2\pi)+O\left(\frac{1}{|y|}\right)=\\ &=\left(x-\frac{1}{2}\right)\log(|y|)-\frac{\pi}{2}|y|+\frac{1}{2}\log(2\pi)+O\left(\frac{1}{|y|}\right)\end{aligned}$$

Prendendo il modulo dell'esponenziale otteniamo la tesi. □

Per completezza enunciamo la Formula di Stirling nella sua versione più generale:

Teorema 4.21. *Sia $B_r(x)$ il polinomio di Bernoulli di grado r e siano $z,\alpha\in\mathbb{C}$. Per ogni intero positivo q, per ogni $\eta>0$ e per ogni ε arbitrariamente piccolo (q,ε,η sono fissati) si ha*

$$\log\Gamma(z+\alpha) = (z+B_1(\alpha))\log z - z+\log\sqrt{2\pi}+\sum_{k=1}^{q}(-1)^{k+1}\frac{B_{k+1}(\alpha)}{k(k+1)}\cdot\frac{1}{z^k}+O\left(\frac{1}{|z|^{q+1}}\right)$$

uniformemente per $|\alpha|\leqslant\eta,\ |z|\geqslant|\alpha|+\varepsilon,\ |\arg(z+\alpha)|\leqslant\pi-\varepsilon$.
In particolare se $\alpha=0$ si ha, per ogni q e ε fissati:

$$\log\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z-z+\log\sqrt{2\pi}+\sum_{k=1}^{q}\frac{B_{2k}}{(2k-1)2k}\cdot\frac{1}{z^{2k-1}}+O\left(\frac{1}{|z|^{2q+1}}\right)$$

uniformemente per $|\arg z|\leqslant\pi-\varepsilon$.
Infine per $\alpha=1$ e $z=n$ intero positivo si ha

$$\log n! = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+\log\sqrt{2\pi}+\sum_{k=1}^{q}\frac{B_{2k}}{(2k-1)2k}\cdot\frac{1}{n^{2k-1}}+O\left(\frac{1}{n^{2q+1}}\right)$$

Capitolo 5

La funzione ζ

5.1 Lo spazio di Schwartz

Definizione 5.1. *Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$* ***tende rapidamente a zero per*** *$|x| \to +\infty$ se*

$$\lim_{x \to \pm\infty} |x|^n f(x) = 0$$

per ogni $n \geq 0$ naturale.

Ovviamente se, per ogni $n \geq 0, |x|^n f(x)$ è limitata su $\mathbb{R}$, allora $f(x) \to 0$ rapidamente per $|x| \to \infty$.
Quindi si ha rapida tendenza a 0 se e solo se si ha limitatezza di $|x|^n f(x)$ per ogni n.

Definizione 5.2. *Chiamiamo* ***spazio di Schwartz*** *$\mathscr{S}$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ delle funzioni $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ a volri complessi, tendenti rapidamente a 0 con tutte le loro derivate.*

Se, per ogni intero $k \geq 0$, D^k è l'operatore derivata k-esima, si ha $D^k : \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S}$.
Se inoltre M^k è l'operatore definito da $\left(M^k f\right)(x) = x^k f(x)$ allora $M^k : \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S}$ perchè se $f \in \mathscr{S}$ allora la funzione $x^k f(x)$ tende rapidamente a zero con tutte le sue derivate.
se $f \in \mathscr{S}$ allora

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

Definizione 5.3. *Definiamo la* ***trasformata di Fourier*** *$\hat{f}$ di una funzione $f \in \mathscr{S}$:*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

Segue che

$$f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) e^{2\pi i \xi x} dx$$

ovvero posto

$$f^-(\xi) = f(-\xi)$$

si ha

$$\widehat{\widehat{f}} = f^-$$

Inoltre

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

quindi la trasformata di Fourier di $f \in \mathscr{S}$ è limitata.

Lemma 5.4. *Vale* $^\wedge : \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S}$.

Dimostrazione. Derivando

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

si ottiene

$$D\widehat{f}(\xi) = -2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx$$

ovvero

$$D\widehat{f} = -2\pi i \widehat{Mf}$$

da cui per induzione segue che

$$D^k \widehat{f} = (-2\pi i)^k \widehat{M^k} f$$

In particolare$\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$.
Inoltre

$$M^k \widehat{f} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^k \widehat{D^k} f$$

in quanto

$$\xi \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \xi e^{-2\pi i \xi x} dx$$

e integrando per parti si ottiene

$$\xi \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-2\pi i \xi x} dx$$

ovvero

$$M\widehat{f} = \frac{1}{2\pi i} \widehat{Df}$$

Segue per induzione che

$$M^k \widehat{f} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^k \widehat{D^k} f$$

Da quest'ultima relazione e dal fatto che $\widehat{D^k} f$ è limitata perchè $D^k f \in \mathscr{S}$ segue che per ogni k vale che $M^k \widehat{f}$ è limitata.

Dunque per ogni $f \in \mathscr{S}$ si ha che $\widehat{f}$ tende rapidamente a zero.
Inoltre, siccome

$$D^k \widehat{f} = (-2\pi i)^k \widehat{M^k f}$$

e $\widehat{M^k f}$ tende rapidamente a zero in quanto $M^k f \in \mathscr{S}$, si deduce che per ogni k vale che $D^k \widehat{f}$ tende rapidamente a zero. □

Lemma 5.5. ***(Formula di Poisson)***
Se $f \in \mathscr{S}$ allora

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)$$

Dimostrazione. La funzione

$$g(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(x+n)$$

ha ovviamente periodo 1 ed è C^∞ in quanto per ogni k la serie

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x+n)$$

converge uniformemente su ogni intervallo limitato.
Sviluppando $g(x)$ in Serie di Fourier otteniamo

$$g(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_m e^{2\pi i m x}$$

con

$$c_m = \int_0^1 g(x) e^{-2\pi i m x} dx$$

Segue che

$$\begin{aligned} c_m &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x+n) e^{-2\pi i m x} dx = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(t) e^{-2\pi i m (t-n)} dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(t) e^{-2\pi i m t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i m t} dt = \\ &= \widehat{f}(m) \end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(n) = g(0) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_m = \sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(m)$$

$\square$

Lemma 5.6. *Posto $f(x) = e^{-\pi x^2}$, con $x \in \mathbb{R}$, si ha $f \in \mathscr{S}$ e $f = \widehat{f}$.*

Dimostrazione. Ovviamente $f \in \mathscr{S}$. Inoltre, siccome

$$D\widehat{f} = -2\pi i \widehat{Mf}$$

si ha che

$$\begin{aligned} D\widehat{f}(\xi) &= -2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i \xi x} dx = \\ &= i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi x} d e^{-\pi x^2} = \\ &= -2\pi \xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i \xi x} dx = \\ &= -2\pi \xi \widehat{f}(\xi) \end{aligned}$$

Integrando l'equazione

$$D\widehat{f}(\xi) = -2\pi \xi \widehat{f}(\xi)$$

otteniamo

$$\widehat{f}(\xi) = C e^{-\pi \xi^2}$$

In particolare, per $\xi = 0$ otteniamo

$$C = \widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1$$

$\square$

Osservazione 5.7. *La serie*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi z}$$

converge totalmente nel semipiano $\mathrm{Re}(z) \geq \varepsilon > 0$.

5.2 La funzione Θ di Jacobi

Definizione 5.8. *Sia $z = x + iy$, con $\mathrm{Re}(z) = x > 0$. Si chiama **funzione Θ di Jacobi** la seguente serie totalmente convergente:*

$$\Theta(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi z}$$

(di seguito non ci sono problemi in quanto l'argomento è compreso strettamente tra $-\pi/2$ e π)

Lemma 5.9. ***(Equazione funzionale)***
Sia

$$\Theta(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi z}$$

con $z = x + iy,\ \mathrm{Re}(z) = x > 0.$
Allora

$$\Theta(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}\Theta\left(\frac{1}{z}\right)$$

Dimostrazione. La convergenza della serie che definisce Θ è data solo dalla parte reale quindi basta dimostrare la tesi solo per $z = x > 0$; essendo $\Theta(z)$ olomorfa per $x > 0$ segue che per il prolungamento analitico (per $y \neq 0$) basta dimostrare l'equazione funzionale

$$\Theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\Theta\left(\frac{1}{x}\right)$$

per x reale e $x > 0$.
Poniamo

$$f(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$$

$$f_x(\xi) = f(\sqrt{x}\xi) = e^{-\pi x\xi^2}$$

Si ha allora

$$\begin{aligned}
\widehat{f_x}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{x}t)e^{-2\pi i\xi t}dt = \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-2\pi i\frac{\xi}{\sqrt{x}}y}dy = \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{x}}\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}}f\left(\frac{\xi}{\sqrt{x}}\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}}f_{\frac{1}{x}}(\xi)
\end{aligned}$$

dove la penultima uguaglianza segue dal lemma precedente.
Applicando ora la formula di Poisson alla funzione f_x si ottiene

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f_x(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f_x}(n) = \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{-\infty}^{\infty} f_{\frac{1}{x}}(n)$$

ovvero

$$\Theta(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x n^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{x}n^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}\Theta\left(\frac{1}{x}\right)$$

□

5.3 La funzione ζ e la funzione ξ

Teorema 5.10. ***(Riemann)***
La funzione $\zeta(s)$ (dove $s = \sigma + it$) è meromorfa in $\mathbb{C}$; la sua unica singolarità al finito è un polo semplice con residuo 1 per $s = 1$.
Inoltre, posto

$$\xi(s) = \frac{s}{2}(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

si ha che $\xi(s)$ è una funzione intera che fornice il prolungamento analitico della funzione ζ e che soddisfa la seguente equazione funzionale

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

Dimostrazione. Se $\mathrm{Re}(s) = \sigma > 0$ allora sappiamo che

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x}x^{\frac{s}{2}-1}dx = \int_0^\infty e^{-x}x^{\frac{s}{2}}d^*x$$

dove la misura $d^*x = \frac{dx}{x}$ è invariante rispetto alle traslazioni $x \to ax$ del gruppo moltiplicativo $\mathbb{R}^*$.
In particolare, per $x \mapsto n^2\pi x$ si ottiene

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-n^2\pi x}\left(n^2\pi x\right)^{\frac{s}{2}}d^*x$$

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)n^{-s} = \int_0^\infty e^{-n^2\pi x}x^{\frac{s}{2}}d^*x$$

Se ora $\mathrm{Re}(s) = \sigma > 1$ la serie

$$\sum_{n=1}^\infty \pi^{-\frac{\sigma}{2}}\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right)n^{-\sigma} = \pi^{-\frac{\sigma}{2}}\Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right)\zeta(\sigma)$$

è convergente e quindi converge anche

$$\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-n^2\pi x}x^{\frac{\sigma}{2}}d^*x = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \left|e^{-n^2\pi x}x^{\frac{s}{2}}\right|d^*x$$

Sommando su n la relazione

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)n^{-s} = \int_0^\infty e^{-n^2\pi x}x^{\frac{s}{2}}d^*x$$

si ottiene (ricordando che $\sigma > 1$)

$$\begin{aligned}
\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) &= \int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x}\right) x^{\frac{s}{2}} d^*x = \\
&= \int_0^\infty \frac{\sum_{-\infty}^\infty e^{-n^2\pi x} - 1}{2} x^{\frac{s}{2}} d^*x = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty (\Theta(x)-1) x^{\frac{s}{2}} d^*x = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\Theta\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right) x^{\frac{s}{2}} d^*x + \frac{1}{2}\int_1^\infty (\Theta(x)-1) x^{\frac{s}{2}} d^*x = \\
&= \frac{1}{2}\int_1^\infty (\sqrt{x}\Theta(x)-1) x^{-\frac{s}{2}} d^*x + \frac{1}{2}\int_1^\infty (\Theta(x)-1) x^{\frac{s}{2}} d^*x = \\
&= \frac{1}{2}\int_1^\infty \left\{(\sqrt{x}\Theta(x) - \sqrt{x} + \sqrt{x} - 1)x^{-\frac{s}{2}} + (\Theta(x)-1)x^{\frac{s}{2}}\right\} d^*x = \\
&= \frac{1}{2}\int_1^\infty (\sqrt{x}-1) x^{-\frac{s}{2}} d^*x + \frac{1}{2}\int_1^\infty (\Theta(x)-1)\left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}\right) d^*x = \\
&= \frac{1}{s(s-1)} + \frac{1}{2}\int_1^\infty (\Theta(x)-1)\left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}\right) d^*x
\end{aligned}$$

Poichè

$$\frac{1}{2}(\Theta(x)-1) = \sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x} \leq \sum_{n=1}^\infty e^{-n\pi x} = \frac{1}{e^{\pi x}-1} \ll e^{-\pi x}$$

l'integrale

$$\int_1^\infty (\Theta(x)-1)\left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}\right) d^*x$$

converge uniformemente in ogni striscia $a \leq \sigma \leq b$ e rappresenta quindi una funzione intera di s.
Moltiplicando ora entrambi i membri per $\frac{s(s-1)}{2}$ allora si ottiene

$$\xi(s) = \frac{1}{2} + \frac{s(s-1)}{4}\int_1^\infty (\Theta(x)-1)\left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}\right) d^*x$$

da cui segue che $\xi(s)$ è intera e soddisfa l'equazione funzionale voluta.
Ma allora

$$\zeta(s) = \frac{\xi(s)\pi^{\frac{s}{2}}\frac{1}{\frac{s}{2}\Gamma(\frac{s}{2})}}{s-1}$$

Poichè

$$\xi(s)\pi^{\frac{s}{2}}\frac{1}{\frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$$

è intera (ovvero olomorfa su tutto il piano) allora

$$\frac{\xi(s)\pi^{\frac{s}{2}}\frac{1}{\frac{s}{2}\Gamma(\frac{s}{2})}}{s-1}$$

fornisce il prolungamento analitico di $\zeta(s)$ e mostra che l'unica possibile singolarità al finito per $\zeta(s)$ è un polo semplice per $s = 1$.
Poichè

$$\xi(1) = \frac{1}{2}$$

allora la funzione

$$\xi(s)\pi^{\frac{s}{2}} \frac{1}{\frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$$

assume in $s = 1$ il valore

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 1$$

Questo prova che $\zeta(s)$ ha effettivamente per $s = 1$ un polo semplice con residuo 1. $\square$

Definizione 5.11. *Si definisce*

$$\Xi(s) = \xi\left(\frac{1}{2} + is\right)$$

con $s \in \mathbb{C}$.

Per la funzione intera $\Xi(s)$ l'equazione funzionale diventa

$$\Xi(s) = \Xi(-s)$$

Siccome dalla formula

$$\xi(s) = \frac{1}{2} + \frac{s(s-1)}{4} \int_1^\infty (\Theta(x) - 1)\left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}\right) d^*x$$

si osserva che $\xi(\sigma)$ è reale per $\sigma \in \mathbb{R}$ allora per ogni $s \in \mathbb{C}$

$$\xi(\bar{s}) = \overline{\xi(s)}$$

Inoltre, siccome

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

allora per ogni $t \in \mathbb{R}$ vale

$$\overline{\xi\left(\frac{1}{2} + it\right)} = \xi\left(\frac{1}{2} - it\right) = \xi\left(1 - \frac{1}{2} + it\right) = \xi\left(\frac{1}{2} + it\right)$$

ovvero $\xi\left(\frac{1}{2} + it\right)$ è reale.
In altre parole $\Xi(s)$ è reale se $s \in \mathbb{R}$.
Inoltre osserviamo che $\zeta(s) \neq 0$ per $\sigma > 1$. Infatti si ha

$$\zeta(s) \prod_{p \leq N} \left(1 - p^{-s}\right) = \prod_{p > N} \left(1 + p^{-s} + p^{-2s} + p^{-3s} + \cdots\right) = 1 + \sum_{n>N}^{*} \frac{1}{n^s}$$

dove la somma $\sum_{n>N}^{*}$ è fatta sugli $n>1$ i cui fattori primi superano N.
Ne segue che

$$\left|\zeta(s)\prod_{p\leqslant N}\left(1-p^{-s}\right)\right|\geq 1-\left|\sum_{n>N}^{*}n^{-s}\right|\geq 1-\sum_{n>N}n^{-\sigma}=1+O\left(\frac{1}{n^{\sigma}}\right)$$

e quindi, per N abbastanza grande, si ha

$$\left|\zeta(s)\prod_{p\leq N}\left(1-p^{-s}\right)\right|>0$$

da cui $\zeta(s)\neq 0$.
Poichè

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\neq 0$$

allora $\xi(s)\neq 0$ per $\sigma>1$ e quindi, per l'equazione funzionale, $\xi(s)\neq 0$ per $\sigma<0$. Ma quindi, poichè abbiamo visto che

$$\zeta(s)=\frac{\xi(s)\pi^{\frac{s}{2}}\frac{1}{\frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}}{s-1}$$

allora per $\sigma<0$ la funzione $\zeta(s)$ si annulla se e solo se

$$\frac{1}{\frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}=0$$

ovvero nei punti $s=-2,-4,-6\ldots.$
Questi zeri, ovviamente semplici, si chiamano gli **zeri banali** di $\zeta(s)$.
Nella **striscia critica** $0\leq\sigma\leq 1$ si ha

$$\pi^{\frac{s}{2}}\frac{1}{\frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\neq 0$$

e quindi la $\zeta(s)$ e la $\xi(s)$ si annullano insieme.
Riassumendo:

- $\xi(s)\neq 0$ per $\sigma<0$ oppure $\sigma>1$
- $\zeta(s)$ si annulla insieme con $\xi(s)$ nella striscia critica $0\leq\sigma\leq 1$
- fuori dalla striscia critica, gli unici zeri di $\zeta(s)$, che sono gli zeri banali, sono i punti $s=-2,-4,-6\ldots.$
  Questi zeri sono semplici.

Si vedrà che nella striscia critica vi sono infiniti zeri di $\zeta(s)$.
Infine l' **ipotesi di Riemann** afferma che tutti gli zeri non banali di $\zeta(s)$ hanno parte reale uguale a $\frac{1}{2}$.
Osserviamo che da

$$\xi(\bar{s}) = \overline{\xi(s)}$$

segue che gli zeri non banali sono disposti simmetricamente rispetto all'asse reale.
Tenuto conto anche dell'equazione funzionale

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

gli zeri non banali sono disposti simmetricamente anche rispetto alla retta $\sigma = \frac{1}{2}$.
Osserviamo infine che nel segmento $0 \leq \sigma \leq 1$ e $t = 0$ non si hanno zeri.
Infatti per $x \geq 1$ si ha

$$x \geq \sqrt{x}$$

$$\pi x > 2\sqrt{x}$$

$$e^{\pi x} = 1 + \pi x + \frac{\pi^2 x^2}{2!} + \cdots > 1 + 2\sqrt{x}$$

$$\frac{2}{e^{\pi x} - 1} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

da cui

$$\Theta(x) - 1 = 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x} \leq \frac{2}{e^{\pi x} - 1} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Quindi per $0 < \sigma < 1$ si ha

$$\int_1^{\infty} (\Theta(x) - 1)\left(x^{\frac{\sigma}{2}} + x^{\frac{1-\sigma}{2}}\right) d^*x < \int_1^{\infty} \left(x^{\frac{\sigma}{2}} + x^{\frac{1-\sigma}{2}}\right) x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{\sigma(1-\sigma)}$$

e quindi, dalla relazione

$$\xi(s) = \frac{1}{2} + \frac{s(s-1)}{4} \int_1^{\infty} (\Theta(x) - 1)\left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}\right) d^*x$$

si ottiene che

$$\xi(\sigma) > \frac{1}{2} - \frac{\sigma(1-\sigma)}{4} \frac{2}{\sigma(1-\sigma)} = 0$$

e

$$\xi(0) = \xi(1) = \frac{1}{2}$$

Possiamo quindi concludere che ξ non si annulla mai sul segmento $0 \leq \sigma \leq 1$ e $t = 0$ e lo stesso vale per la funzione ζ in quanto nella fascia critica $0 \leq \sigma \leq 1$ la funzione ξ e la funzione ζ hanno gli stessi zeri.
Inoltre poichè

$$\left(\frac{1}{\frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\right)_{s=0} = 1$$

si ricava (dalla formula del prolungamento analitico) che

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}$$

Lemma 5.12. *Per ogni $\varepsilon > 0$ fissato si ha, uniformemente per $\sigma \geq \varepsilon$ che*

$$\zeta(s) \ll_\varepsilon |s| \quad (\ll_\varepsilon |t|)$$

per $|t| \to +\infty$.

Dimostrazione. Per sommazione parziale si ha per $\sigma > 0,\ x \geq 1$ che

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} &= \frac{[x]}{x^s} + s\int_1^x \frac{[u]}{u^{s+1}}du = \\
&= \frac{[x]}{x^s} + s\int_1^x \frac{du}{u^s} - s\int_1^x \frac{\{u\}}{u^{s+1}}du = \\
&= \frac{[x]}{x^s} + \frac{s}{s-1} - s\int_1^x \frac{\{u\}}{u^{s+1}}du
\end{aligned}$$

Per $x \to +\infty$ si ottiene, supposto ora che $\sigma > 1$, che

$$\zeta(s) = s\int_1^\infty \frac{[u]}{u^{s+1}}du = s\int_1^\infty \frac{u-\{u\}}{u^{s+1}}du = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{\{u\}}{u^{s+1}}du$$

Poichè l'ultimo integrale converge uniformemente per $\sigma \geq \varepsilon > 0$ e rappresenta quindi una funzione olomorfa nel semipiano $\sigma > 0$ allora la formula

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{\{u\}}{u^{s+1}}du$$

dà il prolungamento analitico di $\zeta(s)$ per $\sigma > 0$.
Inoltre, siccome

$$\frac{1}{2} + \{u\} - \frac{1}{2} = B_1(\{u\}) + \frac{1}{2}$$

allora

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{\{u\}}{u^{s+1}}du = \\
&= \frac{1}{s-1} + 1 - \frac{s}{2}\int_1^\infty \frac{du}{u^{s+1}} - s\int_1^\infty \frac{B_1(\{u\})}{u^{s+1}}du = \\
&= \frac{1}{s-1} + 1 - \frac{1}{2} - s\int_1^\infty \frac{B_1(\{u\})}{u^{s+1}}du
\end{aligned}$$

Siccome abbiamo visto che

$$\int B_1(\{u\})du = \frac{1}{2}B_2(\{u\}) + c$$

allora possiamo concludere che

$$|\zeta(s)| \ll 1 + |s| \int_1^\infty \frac{du}{u^{1+\varepsilon}} \ll \frac{|s|}{\varepsilon} \ll_\varepsilon |s|$$

In particolare per $|t| \geq 1,\ \sigma \geq \varepsilon$ si deduce che

$$\begin{aligned}
|\zeta(s)| &= \left| \frac{1}{s-1} + 1 - s \int_1^\infty \frac{\{u\}}{u^{s+1}} du \right| \leq \\
&\leq 2 + |s| \int_1^\infty \frac{du}{u^{\sigma+1}} = \\
&= 2 + \frac{|s|}{\sigma} \leq \\
&\leq 2 + \frac{\sigma + |t|}{\sigma} \leq \\
&\leq 3 + \frac{|t|}{\varepsilon} \ll \\
&\ll |t|
\end{aligned}$$

□

Osservazione 5.13. *In particolare per $s = 1$ si ha*

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = 1 - \frac{\{x\}}{x} + \log x - \int_1^x \frac{\{u\}}{u^2} du$$

da cui

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} - \log x \right) = 1 - \int_1^\infty \frac{\{u\}}{u^2} du = \gamma$$

Osservazione 5.14. ***(Congettura di Lindelöf)***
La congettura ipotizza che per ogni $\varepsilon > 0$ vale

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O\left(t^\varepsilon\right)$$

Finora il risultato migliore ottenuto è

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O\left(t^{\frac{32}{205} + \varepsilon}\right)$$

per ogni $\varepsilon > 0$.

5.4 Il numero $N(T)$

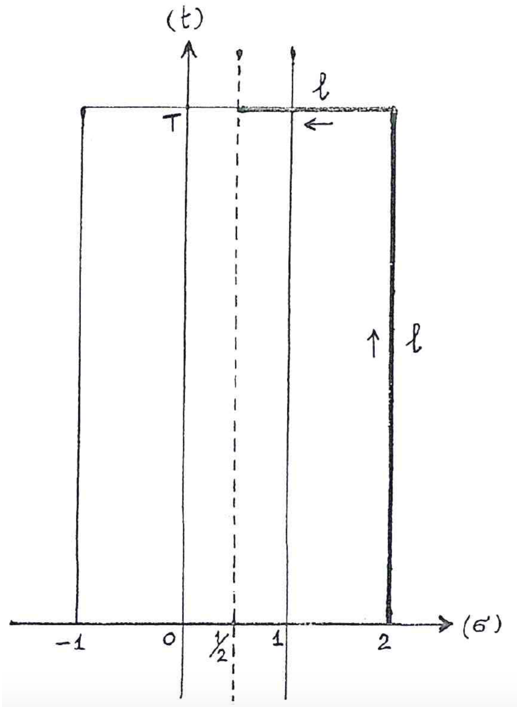
Definizione 5.15. *Indichiamo con $N(T)$ il numero di zeri della funzione $\zeta(s)$, con $s = \sigma + it$, nel rettangolo $0 \leq \sigma \leq 1$ e $0 \leq t \leq T$, contati con la loro molteplicità, ovvero*

$$N(T) = \#\{\rho = \beta + i\gamma | \zeta(\rho) = 0,\ 0 \leq \beta \leq 1,\ 0 \leq \gamma \leq T\}$$

Teorema 5.16. ***(Formula di Riemann-Von Mangoldt)***
Per $T \to +\infty$ vale

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T)$$

Dimostrazione. Supponiamo che per $t = T$ non ci siano zeri. Sia R il rettangolo avente i vertici nei punti $2,\ 2 + iT,\ -1 + iT,\ -1,$



Allora si ha

$$N(T) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial R} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial R} \arg \xi(s)$$

dove $\Delta_{\partial R} \arg \xi(s)$ indica la variazione dell'argomento di $\xi(s)$ lungo il bordo di R percorso una volta in verso antiorario.
Infatti $\xi(s)$ è intera, non è mai nulla fuori dalla striscia critica nè sull'asse reale e ha gli stessi zeri di $\zeta(s)$ nel rettangolo $0 \leq \sigma \leq 1$ e $0 \leq t \leq T$.
Tuttavia lungo il lato $(-1, 2)$ l'argomento di $\xi(s)$ è costante perchè $\xi(s)$ è reale e non si annulla; inoltre la variazione dell'argomento di $\xi(s)$ quando s percorre ∂R da 2 a $\frac{1}{2} + iT$

è uguale a quella per s da $\frac{1}{2} + iT$ a -1 perchè per l'equazione funzionale $\xi(s)$ assume valori coniugati in punti simmetrici rispetto alla retta $\sigma = \frac{1}{2}$.
Segue che

$$N(T) = \frac{1}{\pi}\Delta_l \arg \xi(s)$$

dove l è la parte di ∂R compresa tra 2 e $\frac{1}{2} + iT$.
Siccome

$$\xi(s) = (s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\zeta(s)$$

allora

$$N(T) = \frac{1}{\pi}\left\{\Delta_l \arg(s-1) + \Delta_l \arg \pi^{-\frac{s}{2}} + \Delta_\ell \arg \Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) + \Delta_l \arg \zeta(s)\right\}$$

Tuttavia abbiamo:

$$\Delta_l \arg(s-1) = \arg\left(-\frac{1}{2} + iT\right) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2T} = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{T}\right)$$

$$\Delta_l \arg \pi^{-\frac{s}{2}} = \Delta_l \arg\left(e^{-\frac{s}{2}\log\pi}\right) = -\frac{T}{2}\log\pi$$

Inoltre per Stirling sappiamo che

$$\log\Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\log z - z + \log(\sqrt{2\pi}) + O\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\Delta_l \arg\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) &= \operatorname{Im}\left(\log\Gamma\left(\frac{5}{4} + i\frac{T}{2}\right)\right) = \\
&= \operatorname{Im}\left\{\left(\frac{3}{4} + i\frac{T}{2}\right)\log\left(\frac{5}{4} + i\frac{T}{2}\right) - i\frac{T}{2} - \frac{5}{4} + \frac{1}{2}\log(2\pi) + O\left(\frac{1}{T}\right)\right\} = \\
&= \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{T}\right)\right) + \frac{T}{2}\log\left(\sqrt{\frac{T^2}{4} + \frac{25}{16}}\right) - \frac{T}{2} = \\
&= \frac{3}{8}\pi + \frac{T}{2}\log\frac{T}{2} + \frac{T}{2}\cdot\frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{25}{4T^2}\right) - \frac{T}{2} + O\left(\frac{1}{T}\right) = \\
&= \frac{T}{2}\log\frac{T}{2} - \frac{T}{2} + \frac{3\pi}{8} + O\left(\frac{1}{T}\right)
\end{aligned}$$

Segue che

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + S(T) + O\left(\frac{1}{T}\right)$$

dove

$$S(T) = \frac{1}{\pi}\arg\left(\zeta\left(\frac{1}{2} + iT\right)\right) = \frac{1}{\pi}\Delta_l \arg\zeta(s)$$

Vogliamo infine mostrare che

$$S(T) \ll \log T$$

Siano Δ_1 e Δ_2 le variazioni lungo i segmenti $(2, 2+iT)$ e $\left(2+iT, \frac{1}{2}+iT\right)$ rispettivamente. Se $\mathrm{Re}(s) = \sigma = 2$ allora si ha:

$$|\zeta(2+it)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2+it}}\right| \geq 1 - \left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2+it}}\right| \geq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{|n^{2+it}|} = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 - \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) > \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{Re}\,\zeta(2+it) = \mathrm{Re}\,\zeta(s) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \mathrm{Re}(n^{-s}) \geq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left|n^{-s}\right| = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n^{-2} = 2 - \frac{\pi^2}{6} > \frac{1}{3}$$

quindi

$$|\arg\zeta(2+iT) - \arg\zeta(2)| = |\arg\zeta(2+iT)| = |\Delta_1 \arg\zeta(s)| < \frac{\pi}{2}$$

Siano ora $s_1, \ldots, s_m$ i punti appartenenti al segmento $\left(2+iT, \frac{1}{2}+iT\right)$ per i quali $\mathrm{Re}\,\zeta(s) = 0$.
Detto r uno qualunque dei segmenti nei quali $\left(2+iT, \frac{1}{2}+iT\right)$ è suddiviso da due punti s_j e s_{j+1} consecutivi, si ha evidentemente

$$|\Delta_r \arg\zeta(s)| \leq \pi$$

quindi

$$|\Delta_2 \arg\zeta(s)| \leq (m+1)\pi$$

Poichè

$$\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$$

per $\sigma \in \mathbb{R}$ si ha

$$2\,\mathrm{Re}\,\zeta(\sigma+iT) = \zeta(\sigma+iT) + \zeta(\sigma-iT)$$

Se ne deduce che m è il numero degli zeri reali distinti, appartenenti all'intervallo $[\frac{1}{2}, 2]$ della funzione

$$f(s) = \zeta(s+iT) + \zeta(s-iT)$$

che è ovviamente olomorfa per $s \neq 1 \pm iT$.
Se M è il numero degli zeri di $f(s)$ nel cerchio $|s-2| \leq \frac{3}{2}$ (e supponiamo $T > 2$) allora per un corollario visto all'inizio, preso $r = \frac{3}{2}$ e $R = \frac{7}{4}$ si ha

$$m \leq M \leq \frac{1}{\log\frac{7}{6}} \log \frac{\max_{|s-2|=7/4} |f(s)|}{f(2)}$$

perchè

$$f(2) = 2\,\mathrm{Re}\,\zeta(2+iT) > \frac{2}{3}$$

Ma

$$\max_{|s-2|=\frac{7}{4}} |f(s)| \leq \max_{|s-2|=\frac{7}{4}} |\zeta(s+iT)| + \max_{|s-2|=\frac{7}{4}} |\zeta(\bar{s}+iT)| = 2 \max_{|s-2-iT|=\frac{7}{4}} |\zeta(s)|$$

Quindi

$$m < H \log \left(\max_{|s-2-iT|=7/4} |\zeta(s)| \right) + K$$

con

$$H = \frac{1}{\log 7 - \log 6}$$

$$K = \frac{\log 3}{\log 7 - \log 6}$$

In particolare, applicando la stima

$$\zeta(s) \ll_\varepsilon |s| \quad (\ll_\varepsilon |t|)$$

vista prima con $\varepsilon = \frac{1}{4}$ si ha

$$\max_{|s-2-iT|=\frac{7}{4}} |\zeta(s)| \ll T$$

quindi

$$\log \left(\max_{|s-2-iT|=\frac{7}{4}} |\zeta(s)| \right) \ll \log T$$

Segue perciò la tesi. □

Osservazione 5.17. *Osserviamo che:*

- *E' stato congetturato che l'ordine esatto del resto nella formula di Riemann-Von Mangoldt sia*
$$(\log T \log\log T)^{1/2}$$
- *A causa dei cambiamenti di segno della funzione $S(T)$ si ha*
$$\int_0^T S(\tau) d\tau \ll \log T$$
Vale quindi
$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(N(\tau) - \frac{\tau}{2\pi} \log \frac{\tau}{2\pi} + \frac{\tau}{2\pi} \right) d\tau = \frac{7}{8}$$
da cui il significato della costante $\frac{7}{8}$ nella formula vista prima
- *LH (Lindelöf) $\Rightarrow R = o(\log T)$*
- *RH (Riemann) $\Rightarrow R = O\left(\frac{\log T}{\log\log T}\right)$*

Corollario 5.18. *Si ha uniformemente su T e H che*

$$N(T+H) - N(T) \ll (H+1)\log(T+H)$$

Inoltre se $H \geq H_0$ allora

$$N(T+H) - N(T) \gg H \log T$$

Dimostrazione. Abbiamo

$$N(T+H)-N(T)=\frac{T+H}{2\pi}\log\frac{T+H}{2\pi}-\frac{T+H}{2\pi}-\left(\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}\right)+O\left(\log(T+H)\right)=$$
$$=\int_{\frac{T}{2\pi}}^{\frac{T+H}{2\pi}}\log t dt+O(\log(T+H))=$$
$$=\frac{H}{2\pi}\log\left(\frac{T+\delta H}{2\pi}\right)+O\left(\log(T+H)\right)$$

con $0<\delta<1$.
Segue che

$$N(T+H)-N(T)\ll\frac{H+1}{2\pi}\log(T+H)$$
$$N(T+H)-N(T)>\frac{H}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}+O\left(\log(T+H)\right)\gg H\log T$$

ovvero

$$N(T+H)-N(T)=O(H\log(T+H))+O(\log(T+H))=O((H+1)\log(T+H))$$

□

Corollario 5.19. *Siano* $\rho_1=\beta_1+i\gamma_1,\quad\rho_2=\beta_2+i\gamma_2\ldots$ *gli zeri non banali della funzione* ζ *ordinati per parte immaginaria crescente* ($\gamma_n>0$) *eventualmente contati con molteplicità.*
Allora si ha

$$|\rho_n|\sim\gamma_n\sim\frac{2\pi n}{\log n}$$

Dimostrazione. Poichè $0\leqslant\beta_n\leq 1$ si ha $\gamma_n\leq|\rho_n|\leqslant\gamma_n+1$ da cui

$$|\rho_n|\sim\gamma_n$$

Inoltre

$$N\left(\gamma_n-1\right)\leq n\leqslant N\left(\gamma_n+1\right)$$

in quanto $N(\gamma_n)=n$.
Inoltre dalla formula di Riemann-Von Mangoldt si ha

$$2\pi N\left(\gamma_n\pm 1\right)\sim\left(\gamma_n\pm 1\right)\log\left(\gamma_n\pm 1\right)\sim\gamma_n\log\gamma_n$$

Segue che

$$\gamma_n\log\gamma_n\sim 2\pi N\left(\gamma_n-1\right)\leqslant 2\pi n\leq 2\pi N\left(\gamma_n+1\right)\sim\gamma_n\log\gamma_n$$

da cui

$$\gamma_n\log\gamma_n\sim 2\pi n$$
$$\log\gamma_n+\log\log\gamma_n=\log n+\log 2\pi+o(1)$$

$$\log \gamma_n \sim \log n$$
$$\gamma_n \sim \frac{2\pi n}{\log \gamma_n} \sim \frac{2\pi n}{\log n}$$

□

Osservazione 5.20. *Littlewood ha dimostrato che*

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n \ll \frac{1}{\log \log \log \gamma_n}$$

Corollario 5.21. *Gli zeri non banali ρ di $\zeta(s)$ hanno esponente di convergenza 1. Inoltre*

$$\sum_\rho |\rho|^{-1} = \infty$$

Dimostrazione. Basta limitarsi a considerare gli zeri ρ_n con parte immaginaria positiva. Per il corollario precedente vale

$$\frac{1}{|\rho_n|} \gg \frac{\log n}{n} \gg \frac{1}{n}$$

$$|\gamma_n| \sim \frac{2\pi n}{\log n} \leq \frac{cn}{\log n}$$

quindi ($|\rho_n| \leq \beta + |\gamma_n|$)

$$\sum_n \frac{1}{|\rho_n|} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + |\gamma_n|} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{cn}{\log n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{cn + \log n} = \infty$$

Tuttavia si deduce che $|\gamma_n| \geq \frac{c_1 n}{\log n}$ quindi

$$\frac{1}{|\rho_n|^{1+\varepsilon}} \ll \frac{\log^{1+\varepsilon} n}{n^{1+\varepsilon}} \ll \frac{1}{n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}$$

$$\sum_n \frac{1}{|\rho_n|^{1+\varepsilon}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\gamma_n|^{1+\varepsilon}} \leq c_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^{1+\varepsilon}}{n^{1+\varepsilon}} \leq c_3(\varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} < +\infty$$

□

5.5 Le funzioni $\xi(s)$ e $(s-1)\zeta(s)$

Lemma 5.22. *Le funzioni intere $\xi(s)$ e $(s-1)\zeta(s)$ hanno ordine 1.*

Dimostrazione. Supponiamo $\sigma \geq \frac{1}{2}$. Allora

$$\left| \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx \right| \leq \int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} = 2$$

Siccome

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{\{u\}}{u^{s+1}} du$$

allora per $|s| \geq 2$ vale

$$|\zeta(s)| \leq |s| \left\{ \frac{1}{|s-1|} + \left| \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx \right| \right\} \leq 3|s|$$

Inoltre

$$\left| \frac{s(s-1)}{2} \right| \leq \frac{1}{2}|s|^2$$

$$\left| \pi^{-\frac{s}{2}} \right| = \pi^{-\frac{\sigma}{2}} < 1$$

e per la formula di Stirling si ha

$$\log \left| \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \right| \leq \left| \log \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \right| \ll |s| \log |s|$$

perchè

$$|\log s| \leq |\log |s|| + |\arg s| \leq |\log |s|| + \frac{\pi}{2}$$

Segue che

$$\left| \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \right| \ll e^{|s|^{1+\varepsilon}}$$

e per $\sigma \geq \frac{1}{2}$ vale

$$|\xi(s)| \ll |s|^2 e^{|s|^{1+\varepsilon}} \ll e^{|s|^{1+2\varepsilon}}$$

Inoltre, dall'equazione funzionale segue che lo stesso risultato vale per $\sigma \leq \frac{1}{2}$, quindi $\xi(s)$ ha ordine ≤ 1. Tuttavia abbiamo visto che gli zeri di $\xi(s)$ hanno esponente di convergenza 1, quindi, siccome $\beta \leq \alpha$ (teorema visto all'inizio del corso) si ha che $\xi(s)$ ha ordine 1. Poichè

$$(s-1)\zeta(s) = \xi(s)\pi^{\frac{s}{2}} \frac{1}{\frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$$

e

$$\xi(s),\ \pi^{\frac{s}{2}},\ \frac{1}{\frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$$

hanno tutte ordine 1, allora anche

$$(s-1)\zeta(s)$$

ha ordine 1. □

Come conseguenza immediata di questo corollario si osserva che il prodotto canonico formato con gli zeri ρ di $\xi(s)$ è

$$\prod_\rho \left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}$$

Tenuto conto del fatto che $\xi(0)=\frac{1}{2}$, segue che

$$\xi(s)=\frac{1}{2}e^{As}\prod_\rho \left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}$$

con

$$A=\frac{\xi'}{\xi}(0)=2\xi'(0)$$

.
Analogamente il prodotto canonico formato con gli zeri della funzione $(s-1)\zeta(s)$ è

$$\prod_\rho \left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{2n}\right)e^{-\frac{s}{2n}}$$

dove ρ percorre gli zeri non banali e il secondo prodotto infinito proviene dagli zeri banali. Si ha quindi

$$(s-1)\zeta(s)=\frac{1}{2}e^{Bs}\prod_\rho \left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{2n}\right)e^{-\frac{s}{2n}}$$

con

$$B=\left(\frac{1}{s-1}+\frac{\zeta'}{\zeta}(0)\right)_{s=0}=-2\zeta'(0)-1$$

Inoltre ricordando che

$$\frac{1}{z\Gamma(z)}=e^{\gamma z}\left\{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right\}$$

segue che

$$\begin{aligned}(s-1)\zeta(s)&=\xi(s)\pi^{\frac{s}{2}}\frac{1}{\frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}=\\ &=\frac{1}{2}e^{As}\left\{\prod_\rho \left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}\right\}e^{\frac{1}{2}(\log\pi)s}e^{\frac{\gamma}{2}s}\left\{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{2n}\right)e^{-\frac{s}{2n}}\right\}=\\ &=\frac{1}{2}e^{\left(A+\frac{1}{2}\log\pi+\frac{\gamma}{2}\right)s}\prod_\rho \left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{2n}\right)e^{-\frac{s}{2n}}\end{aligned}$$

da cui

$$B=A+\frac{1}{2}\log\pi+\frac{\gamma}{2}$$

ovvero

$$\xi'(0)+\zeta'(0)=-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{4}-\frac{1}{4}\log\pi$$

Inoltre
$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n(n+z)}$$
Osserviamo quindi che
$$\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} = -\gamma - 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$$
ma
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right) = 2\left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots\right) = 2(1-\log 2)$$
quindi
$$\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{\pi}(\gamma + 2\log 2)$$
Inoltre lo sviluppo in serie di Laurent di $\zeta(s)$ intorno al polo semplice $s = 1$ è, per i primi termini, è
$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + \ldots\ldots$$
Infatti
$$\begin{aligned}
\left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right)_{s=1} &= 1 - \int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^2} dx = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \int_1^{n} \frac{\{x\}}{x^2} dx\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{x-k}{x^2} dx\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} \left\{\log \frac{k+1}{k} - \frac{1}{k+1}\right\}\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\right) = \\
&= \gamma
\end{aligned}$$
Ne segue che
$$\left(\frac{d}{ds}\{(s-1)\zeta(s)\}\right)_{s=1} = \gamma$$
Derivando ora l'equazione
$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2}\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

si ottiene

$$\xi'(s) = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\zeta(s) - \frac{s}{2}\pi^{-\frac{s}{2}}\frac{\log\pi}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\zeta(s) +$$
$$+\frac{s}{2}\pi^{-\frac{s}{2}}\frac{1}{2}\Gamma'\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\zeta(s) + \frac{s}{2}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\frac{d}{ds}\{(s-1)\zeta(s)\}$$

e ponendo $s = 1$ si ottiene

$$\xi'(1) = \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{4} - \frac{1}{4}\log 4\pi$$

Tuttavia derivando l'equazione funzionale

$$\xi(1-s) = \xi(s)$$

si ottiene

$$-\xi'(1-s) = \xi'(s)$$

quindi

$$\xi'(0) = -\xi'(1)$$

e perciò

$$\xi'(0) = -\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{4} + \frac{1}{4}\log 4\pi$$

e siccome

$$\xi'(0) + \zeta'(0) = -\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{4} - \frac{1}{4}\log\pi$$

allora

$$\zeta'(0) = -\frac{1}{2}\log 2\pi$$

Possiamo quindi concludere che

$$\xi(s) = \frac{1}{2}e^{\left(-1-\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{2}\log 4\pi\right)s}\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}$$

$$(s-1)\zeta(s) = \frac{1}{2}e^{(\log 2\pi - 1)s}\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{2n}\right)e^{-\frac{s}{2n}}$$

Osservazione 5.23. *Sappiamo che per $\sigma > 1$ vale*

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + 1 - s\int_1^{\infty}\frac{\{u\}}{u^{s+1}}du$$

$$\lim_{s\to 1}\left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right) = 1 - \int_1^{\infty}\frac{\{u\}}{u^2}du = \gamma$$

5.6 Derivate logaritmiche e il Teorema di Hadamard

Data
$$\xi(s) = \frac{1}{2}e^{As}\prod_{\rho}\left(1 - \frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}$$
allora la sua derivata logaritmica è:
$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = A + \sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right)$$
in quanto
$$\log\left(\prod_{\rho}\left(1 - \frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}\right)' = \left(\sum_{\rho}\log\left(1 - \frac{s}{\rho}\right) + \frac{s}{\rho}\right)' = \sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right)$$
Siccome
$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2}\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$
o equivalentemente
$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\frac{\xi(s)}{s-1} = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}\frac{\xi(s)}{s-1}$$
allora
$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}+1\right) + \frac{1}{2}\log\pi + \frac{\xi'}{\xi}(s)$$
Segue che
$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} + A + \frac{1}{2}\log\pi + \sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}+1\right)$$

È stato dimostrato in maniera indipendente da Hadamard e de la Vallée Poussin nel 1896 che $\zeta(s) \neq 0$ per $\sigma = 1$. Questo risultato è stato fondamentale nelle loro dimostrazioni per il teorema dei numeri primi e per tutte le dimostrazioni successive fintanto che Selberg e Erdös in 1948 trovarono una dimostrazione elementare.
Osserviamo che per $\sigma > 1$, abbiamo
$$\log(\zeta(s)) = \log\left(\prod_{p}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}\right) = -\sum_{p}\log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \sum_{p}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mp^{ms}}$$
o equivalentemente
$$\log\zeta(s) = \sum_{p}\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1}p^{-m\sigma}e^{-itm\log p}$$
Se $\zeta(s)$ ha uno zero in $1 + it$, allora $\mathrm{Re}(\log\zeta(\sigma + it))$ tenderebbe a $-\infty$ per $\sigma \to 1$ da destra. Questo suggerisce che i numeri $\cos(tm\log p)$ siano prevalentemente negativi. Ma

allora ci aspettiamo che i numeri $\cos(2tm\log p)$ siano prevalentemente positivi; tuttavia questo dovrebbe essere in contraddizione col fatto che $\operatorname{Re}\log\zeta(\sigma+2it)$ rimanga limitato superiormente per $\sigma\to 1$.
Vediamo il metodo utilizzato da Mertens che si basa sulla seguente disuguaglianza:

$$3+4\cos\theta+\cos 2\theta\geq 0$$

che vale per tutti i $\theta\in\mathbb{R}$ in quanto equivale all'equazione

$$2\cos^2\theta+4\cos\theta+2=2(\cos\theta+1)^2\geq 0$$

Prendiamo ora la parte reale di $\log\zeta(s)$, ovvero

$$\operatorname{Re}(\log\zeta(\sigma+it))=\log|\zeta(\sigma+it)|=\sum_p\sum_m\frac{1}{mp^{\sigma m}}\cos(mt\log p)$$

Ma allora

$$\begin{aligned}&3\log\zeta(\sigma)+4\operatorname{Re}(\log\zeta(\sigma+it))+\operatorname{Re}(\log\zeta(\sigma+2it))=\\&=3\log\zeta(\sigma)+4\log|\zeta(\sigma+it)|+\log|\zeta(\sigma+2it)|=\\&=\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mp^{\sigma m}}(3+4\cos(mt\log p)+\cos(2mt\log p))\geq 0\end{aligned}$$

in quanto uso la disuguaglianza precedente con $\theta=mt\log p$.
Quindi

$$\zeta^3(\sigma)\left|\zeta^4(\sigma+it)\zeta(\sigma+2it)\right|\geq 1$$

per $\sigma>1$.
Osserviamo che per $\sigma\to 1^+$ vale

$$\zeta(\sigma)\sim(\sigma-1)^{-1}$$

ovvero

$$\zeta(\sigma)=\frac{1}{\sigma-1}+c_1$$

quindi

$$\zeta^3(\sigma)\leq\frac{c_2}{(\sigma-1)^3}$$

Inoltre, se $\zeta(1+it)=0$ per qualche t (che è necessariamente non nullo), allora considerando $\sigma+it-(1+it)$ $(t=\gamma,\ \beta+i\gamma=1+i\gamma)$ segue che

$$|\zeta(\sigma+it)|^4<(\sigma-1+c_3|\sigma-1|^2)^4\leq c_4(\sigma-1)^4$$

mentre

$$|\zeta(\sigma+i2t)|<c_5$$

in quanto ζ è regolare in quel punto.
Ma allora

$$\zeta^3(\sigma)\left|\zeta^4(\sigma+it)\zeta(\sigma+2it)\right| \le c_6\frac{1}{(\sigma-1)^3}(\sigma-1)^4 = c_6(\sigma-1) \to 0$$

per $\sigma \to 1^+$. Ma questo è in contraddizione con la disuguaglianza trovata.

Abbiamo quindi dimostrato il teorema di Hadamard:

Teorema 5.24. *Se $\rho = \beta + i\gamma$ è uno zero non banale allora $0 < \beta < 1$.*

Diamo ora una dimostrazione alternativa del fatto che non esistono zeri non banali della funzione ζ con parte reale uguale a 1.

Teorema 5.25. ***(Hadamard)***
Se $\rho = \beta + i\gamma$ è uno zero non banale allora $0 < \beta < 1$.

Dimostrazione. (**Ingham**)
La dimostrazione si basa sulla seguente relazione che vale per $\sigma > 1$:

$$\frac{\zeta(s)\zeta(s-a)\zeta(s-b)\zeta(s-a-b)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_a(n)\sigma_b(n)}{n^s}$$

dove

$$\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha$$

Se prendiamo ora $a = i\gamma$, $b = -i\gamma$ e $\beta = 1$ allora

$$\frac{\zeta^2(s)\zeta(s-i\gamma)\zeta(s+i\gamma)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_{i\gamma}(n)\sigma_{-i\gamma}(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sigma_{i\gamma}(n)|^2}{n^s}$$

Detta σ_0 l'ascisa di convergenza di questa serie, si ha che $\sigma_0 \le 1$ e per il prolungamento analitico la serie è valida per $\sigma > \sigma_0$ (essendo il membro di sinistra nella relazione necessariamente regolare in questo semipiano).
Inoltre, siccome $|\sigma_{i\gamma}(n)| \ge 0$ allora in σ_0 la funzione

$$\frac{\zeta^2(s)\zeta(s-i\gamma)\zeta(s+i\gamma)}{\zeta(2s)}$$

ha un polo, cioè σ_0 è una singolarità.
Supponiamo ora che $1 + i\gamma$ sia uno zero di $\zeta(s)$, allora anche $1 - i\gamma$ è uno zero e questi due zeri cancellano il polo doppio di $\zeta^2(s)$ in $s = 1$.
Segue che la funzione

$$\frac{\zeta^2(s)\zeta(s-i\gamma)\zeta(s+i\gamma)}{\zeta(2s)}$$

è regolare sull'asse reale fino a quando $s = -1$, dove $\zeta(2s)$ si annulla.
Segue che $\sigma_0 = -1$.
Tuttavia questo porta a una contraddizione in quanto dall'uguaglianza di sopra si avrebbe

$$\frac{\zeta^2\left(\frac{1}{2}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}-i\gamma\right)\zeta\left(\frac{1}{2}+i\gamma\right)}{\zeta\left(2\frac{1}{2}\right)} \geq 1$$

essendo $|\sigma_{i\gamma}(1)| = 1$ e $|\sigma_{i\gamma}(n)| \geq 0$, mentre invece

$$\frac{\zeta^2\left(\frac{1}{2}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}-i\gamma\right)\zeta\left(\frac{1}{2}+i\gamma\right)}{\zeta\left(2\frac{1}{2}\right)} = 0$$

Siamo quindi arrivati ad un assurdo. □

La trattazione di questo problema è stata ampliata da de la Vallée Poussin nel 1899 che mostrò che $\zeta(s) \neq 0$ in una piccola regione a sinistra di $\sigma = 1$, la cui ampiezza è proporzionale ad altezza t a $(\log t)^{-1}$ per t grandi.
Per dimostrare questo fatto, è più conveniente lavorare con la funzione $\zeta'(s)/\zeta(s)$ invece che con la funzione $\log\zeta(s)$, siccome il prolungamento analitico a sinistra di $\sigma = 1$ è difficile, mentre l'altra funzione ha gli unici suoi poli per $\sigma > 0$ in corrispondenza degli zeri di $\zeta(s)$.

5.7 Il teorema di de la Vallèe Poussin

Teorema 5.26. ***(de la Vallèe Poussin)***
Esiste una costante positiva c_0 tale che se $\rho = \beta + i\gamma$ $(\gamma > 0)$ è uno zero per la funzione $\zeta(s)$ allora

$$\beta < 1 - \frac{c_0}{\log\gamma} \qquad (\gamma > 6)$$

Dimostrazione. Posto $s = \sigma + it$ prendiamo

$$-\operatorname{Re}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+t^2} - A' + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}+1\right) - \sum_\rho \operatorname{Re}\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)$$

ma

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = \log z + O\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

quindi per $1 \leq \sigma \leq 2$ e $t \geq 2$ si ha

$$-\operatorname{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it) < A\log t - \sum_\rho\left(\frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2} + \frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2}\right) <$$

$$< A\log t - \sum_\rho \frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2}$$

Sia $1 < \sigma \leq 2$. Abbiamo tre casi:

- Se $t = \gamma$ allora
$$-\operatorname{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + i\gamma) < A\log\gamma - \frac{1}{\sigma - \beta}$$
- Se $t = 2\gamma$ allora
$$-\operatorname{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + i2\gamma) < A\log\gamma$$
- Se $t = 0$ allora
$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} = \frac{1}{\sigma - 1} + O(1)$$

Sappiamo che per $\sigma > 1$ vale
$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}$$
in quanto
$$\begin{aligned}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= -\sum_p \frac{\log p}{p^s}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \\ &= -\sum_p \log p \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{p^{ms}} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\end{aligned}$$
Quindi
$$-\operatorname{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}}\cos(t\log n)$$
(ho convergenza della serie perchè sono in $\sigma > 1$).
Usando la relazione vista precedentemente con $\theta = \gamma\log n$:
$$3 + 4\cos(\gamma\log n) + \cos(2\gamma\log n) \geq 0$$
si ha
$$3\left[-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}\right] + 4\left[-\operatorname{Re}\frac{\zeta'(\sigma + i\gamma)}{\zeta(\sigma + i\gamma)}\right] + \left[-\operatorname{Re}\frac{\zeta'(\sigma + 2i\gamma)}{\zeta(\sigma + 2i\gamma)}\right] \geq 0$$
Andando a sostituire le relazioni trovate si ottiene
$$0 \leq \frac{3}{\sigma - 1} - \frac{4}{\sigma - \beta} + c\log\gamma$$
con $c = 2A + \varepsilon$, ovvero
$$\frac{4}{\sigma - \beta} \leq \frac{3}{\sigma - 1} + c\log\gamma$$

Ma allora, posto $\sigma = 1 + \frac{\delta}{\log\gamma}$ con $\delta > 0$ si ottiene che

$$\frac{4\log\gamma}{\delta + (1-\beta)\log\gamma} \leq \frac{3\log\gamma}{\delta} + c\log\gamma$$

ovvero

$$\frac{4}{\delta + (1-\beta)\log\gamma} \leq \frac{3 + c\delta}{\delta}$$

da cui

$$\frac{\delta + (1-\beta)\log\gamma}{4\delta} \geq \frac{1}{3 + c\delta}$$

ovvero

$$\delta + (1-\beta)\log\gamma \geq \frac{4\delta}{3 + c\delta}$$

da cui

$$1 - \beta \geq \frac{4\delta}{(3 + c\delta)\log\gamma} - \frac{\delta}{\log\gamma} \geq \frac{c_0}{\log\gamma}$$

ovvero

$$\beta < 1 - \frac{c_0}{\log\gamma}$$

□

Osservazione 5.27. *Se* $6 \leq \gamma \leq t$ *allora*

$$1 - \frac{c_0}{\log\gamma} \leq 1 - \frac{c_0}{\log t}$$

quindi la regione

$$\sigma \geq 1 - \frac{c_0}{\log(|t| + 2)}$$

è libera da zeri di ζ*.*
Ulteriori miglioramenti sono stati dati da:

- ***Littlewood***

$$\sigma \geq 1 - \frac{c_0 \log\log(|t| + 2)}{\log(|t| + 2)}$$

- ***Vinogradov***

$$\sigma \geq 1 - \frac{c_0(\varepsilon)}{(\log(|t| + 2))^{\frac{2}{3} + \varepsilon}}$$

Lemma 5.28. *Se* $\rho = \beta + i\gamma$ *sono gli zeri non banali di* $\zeta(s)$*, allora per* T *grande vale*

$$\sum_{\rho} \frac{1}{4 + (T - \gamma)^2} = O(\log T)$$

Dimostrazione. Sappiamo che

$$-\operatorname{Re}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} < A\log t - \sum_{\rho}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)$$

per $1 \leq \sigma \leq 2$ e $t \geq 2$.
Prendiamo ora $s = 2 + iT$. Siccome $|\zeta'/\zeta|$ è lmitata per questo valore di s, otteniamo

$$\sum_{\rho}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right) < A\log T$$

Abbiamo già visto che tutti i termini di entrambe le serie sono positivi, quindi

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{s-\rho}\right) = \frac{2-\beta}{(2-\beta)^2+(T-\gamma)^2} \geq \frac{1}{4+(T-\gamma)^2}$$

ovvero

$$\sum_{\rho}\frac{1}{4+(T-\gamma)^2} \leq \sum_{\rho}\frac{2-\beta}{(2-\beta)^2+(T-\gamma)^2} < A\log T$$

Abbiamo quindi ottenuto la tesi. □

Osservazione 5.29. *Vediamo alcune immediate conseguenze:*

$$\sum_{\rho}\frac{1}{4+(T-\gamma)^2} \leq A\log T$$

quindi

$$\frac{1}{5}\sum_{|\gamma-T|\leq 1} 1 \leq \sum_{|\gamma-T|\leq 1}\frac{1}{4+(T-\gamma)^2} \leq A\log T$$

da cui

$$N(T+1) - N(T) \leq 5A\log T$$

(questa è la formula di Riemann Von Mangoldt applicata ad un intervallo) e

$$\sum_{|\gamma-T|\leq 1} 1 \leq \sum_{|\gamma-T|\leq 1}\frac{1}{4+(T-\gamma)^2} \leq A\log T$$

Questo si riassume in:

- *il numero di zeri con $T-1<\gamma<T+1$ è $O(\log T)$*
- *la somma $\Sigma(T-\gamma)^{-2}$ estesa agli zeri con γ fuori dall'intervallo appena citato è ancora $O(\log T)$*

Lemma 5.30. *Per t grandi (che non coincidono con l'ordinata di uno zero) e $-1 \leq \sigma \leq 2$ vale*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{\rho \text{ t.c. } |t-\gamma|<1}\frac{1}{s-\rho} + O(\log t)$$

dove la somma è limitata a quei ρ per cui $|t-\gamma|<1$.

Dimostrazione. Innanzitutto abbiamo che:

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_\rho \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) + O(\log t) \quad |t| \geq 2$$

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(2+it) = \sum_\rho \left(\frac{1}{2+it-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) + O(\log t)$$

Sottraendo una all'altra si ottiene che

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log t) + \sum_\rho \left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+it-\rho} \right)$$

Per i termini con $|\gamma - t| \geq 1$ si ha

$$\left| \frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+it-\rho} \right| = \frac{2-\sigma}{|(s-\rho)(2+it-\rho)|} \leq \frac{3}{|\gamma - t|^2}$$

e questa somma è $O(\log t)$ per l'osservazione precedente.
Per quanto riguarda i termini con $|\gamma - t| < 1$ si ha $|2+it-\rho| \geq 1$ e il numero di termini è sempre $O(\log t)$ sempre per l'osservazione precedente.
Abbiamo quindi la tesi. □

Osservazione 5.31. *Vale*

$$\sum_{|\gamma - t| \leq 1} \frac{1}{|2+it-\rho|} \leq \sum_{|\gamma - t| \leq 1} \frac{1}{2-\rho} \leq N(t+1) - N(t-1) \ll \log t$$

Inoltre si può stimare il termine $S(T)$ della forma di Von-Mangoldt in un modo alternativo. Avevamo visto che

$$S(T) = \frac{1}{\pi} \arg \zeta \left(\frac{1}{2} + iT \right) - \frac{1}{\pi} \arg \zeta \,(2+iT) = \frac{1}{\pi} \arg \zeta \left(\frac{1}{2} + iT \right) + O(1)$$

e

$$S(T) \ll \log T$$

Questa stima si deduce nel seguente modo:

$$\begin{aligned} S(T) &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Im}\{\log \zeta \left(\frac{1}{2} + iT \right) - \log \zeta \,(2+iT)\} = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{2} \operatorname{Im} \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + iT) d\sigma = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{2} \sum_{|\gamma - T| \leq 1} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\sigma + iT - \rho} \right) d\sigma = \\ &= -\frac{1}{\pi} \sum_{|\gamma - T| \leq 1} \Delta_l \arg(s-\rho) \ll \\ &\ll \sum_{|\gamma - T| \leq 1} 1 \ll \log T \end{aligned}$$

(siamo in orizzontale quindi dt=0)

Capitolo 6

Formule esplicite per ψ

In questo capitolo dimostriamo la formula di VonMangoldt per $\psi(x)$.
Ricordiamo che

$$\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n) = \sum_{p^m \le x} \log p$$

Questa funzione ha discontinuità nei punti in cui x è la potenza di un primo. Al contrario

$$x - \sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2} \log\left(1 - x^{-2}\right)$$

è una funzione intera, quindi non può essere pari a $\psi(x)$.
Per fare in modo che la formula resti valida anche in questi punti, si definisce una nuova funzione $\psi_0(x)$ che vale $\psi(x)$ nei punti in cui x non è potenza di un primo e $\psi(x) - \frac{1}{2}\Lambda(x)$ nei punti in cui x è potenza di un primo.
La formula da dimostrare, usando quindi $\psi_0(x)$, è, per $x > 1$, la seguente:

$$\psi_0(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2} \log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

dove la somma fatta su tutti gli zeri non banali ρ of $\zeta(s)$ deve essere interpretata nel senso simmetrico di

$$\lim_{T \to \infty} \sum_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho}$$

Il valore della costante $\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$ è $\log 2\pi$. L'ultimo termine della formula invece è equivalente a $-\Sigma_\omega x^\omega/\omega$ estesa sugli zeri banali della funzione $\zeta(s)$ dati da $\omega = -2, -4, -6, \ldots$.
Per evitare alcune piccole complicazioni supponiamo $x \ge 2$, anche se la formula resta valida per $x > 1$.
L'idea generale è quella di usare il seguente integrale discontinuo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} y^s \frac{ds}{s} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < y < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{se } y = 1 \\ 1 & \text{se } y > 1, \end{cases}$$

dove $c > 0$, per trovare i termini in una serie di Dirichlet con $n \leq x$, prendendo $y = x/n$. Siccome

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

per $\sigma > 1$, allora il risultato si può riscrivere come

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right] \frac{x^s}{s} ds$$

per $c > 1$.
Se riusciamo a spostare la linea verticale di integrazione all'infinito a sinistra, siamo in grado di esprimere $\psi_0(x)$ come la somma dei residui della funzione $[-\zeta'(s)/\zeta(s)]\, x^s/s$ nei suoi poli. Il polo di $\zeta(s)$ in $s = 1$ contribuisce x; il polo di $1/s$ in $s = 0$ contribuisce $-\zeta'(0)/\zeta(0)$; ogni zero ρ di $\zeta(s)$, sia banale che non banale, contribuisce $-x^\rho/\rho$.
Per cominciare la dimostrazione, dobbiamo partire con un integrale da $c - iT$ a $c + iT$, e trattarlo come un lato di un rettangolo che si estende a sinistra.
Serve scegliere T in modo che i lati orizzontali del rettangolo evitino, per quanto possibile, gli zeri di $\zeta(s)$ nella striscia critica.

Lemma 6.1. *Sia $\delta(y)$ la funzione*

$$\delta(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < y < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } y = 1 \\ 1 & \text{se } y > 1 \end{cases}$$

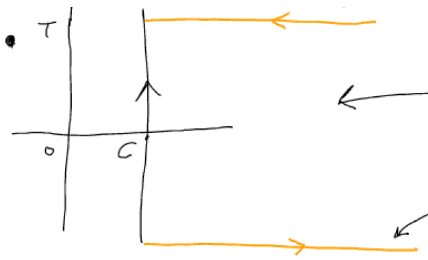
e sia

$$I(y,T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} ds$$

Allora per $y > 0, c > 0, T > 0$,

$$|I(y,T) - \delta(y)| < \begin{cases} y^c \min\left(1, \frac{1}{T|\log y|}\right) & \text{se } y \neq 1, \\ \frac{c}{T} & \text{se } y = 1. \end{cases}$$

Dimostrazione. Supponiamo per prima cosa che $0 < y < 1$.
La funzione $\frac{y^s}{s}$ tende a 0 per $\sigma \to +\infty$, e lo fa uniformemente in t. Quindi possiamo sostituire l'integrale verticale con due integrali orizzontali:



uso residui, non ho poli in

$$|\textstyle\int_{-}| \leq \frac{1}{2\pi} \int_c^{+\infty} \frac{y^\sigma}{|\sigma + iT|} d\sigma << \frac{y^c}{|c+iT|\,|\log y|} + \int_c^{\infty} \frac{y^\sigma \, d\sigma}{(\sigma^2 + T^2)|\log y|}$$

int. per parti

$$I(y,T) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{c+iT}^{\infty+iT}\frac{y^s}{s}ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{\infty-iT}\frac{y^s}{s}ds$$

Ora

$$\left|\int_{c+iT}^{\infty+iT}\frac{y^s}{s}ds\right| \le \frac{1}{T}\int_c^\infty y^\sigma d\sigma = \frac{y^c}{T|\log y|}$$

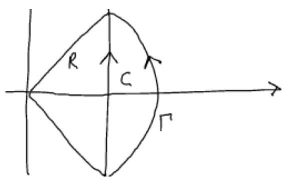
e in modo simile per l'altro integrale.
Questo dimostra una delle due disuguaglianze.
L'altra si ottiene più facilmente sostituendo il cammino verticale con un cammino circolare con centro 0 sul lato destro. Il raggio è

$$R = \left(c^2+T^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

e sull'arco di circonferenza abbiamo

$$|y^s| \le y^c$$

$$|s| = R$$

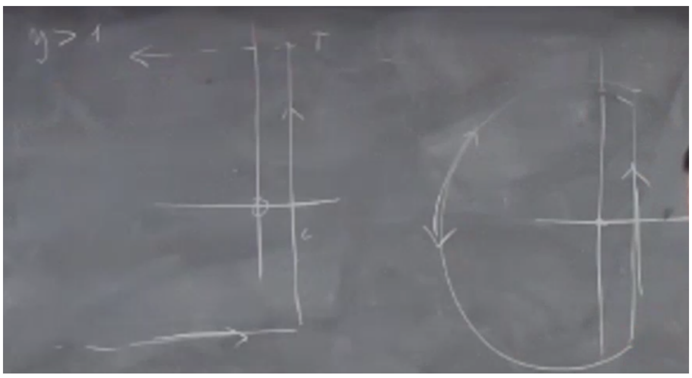


$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{y^s}{s}ds\right| \le \frac{1}{2\pi i}\frac{y^c}{R}\int_\Gamma ds \le \frac{\pi R y^c}{2\pi R} = \frac{y^c}{2}$$

Quindi

$$|I(y,T)| \le \frac{1}{2\pi}\pi R\frac{y^c}{R} < y^c$$

La dimostrazione quando $y > 1$ è simile ma usa un rettangolo o un arco di circonferenza a sinistra.



Il bordo include quindi il polo in $s = 0$, dove il residuo è $1 = \delta(y)$.
Resta da mostrare il caso $y = 1$, che può essere facilmente trattato con calcoli diretti.

Con $s = c + it$, abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{ds}{s} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-T}^{T}\frac{idt}{c+it} = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{c-it}{c^2+t^2}dt = \\ &= -\frac{i}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{t}{c^2+t^2} + \frac{c}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{1}{c^2+t^2}dt = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{T}\frac{2c}{c^2+t^2}dt = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{T/c}\frac{du}{1+u^2} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\int_{T/c}^{\infty}\frac{du}{1+u^2}\end{aligned}$$

e l'ultimo integrale è $\leq c/T$.
Abbiamo quindi dimostrato il lemma. $\square$

Se applichiamo il lemma con $y = \frac{x}{n}$ e $n \in \mathbb{N}$ allora

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{\Lambda(n)}{n^s}x^s\frac{ds}{s} = \begin{cases} \left(1 + O\left(\left(\frac{x}{n}\right)^c \min\left\{1, \frac{1}{T|\log\left(\frac{x}{n}\right)|}\right\}\right)\right)\Lambda(n) & \text{se } n \leq x \\ \left(\frac{1}{2} + O\left(\frac{c}{T}\right)\right)\Lambda(x) & \text{se } n = x \quad (x = p^a) \\ \left(O\left(\left(\frac{x}{n}\right)^c \min\left\{1, \frac{1}{T|\log\left(\frac{x}{n}\right)|}\right\}\right)\right)\Lambda(n) & \text{se } n > x \end{cases}$$

Segue che se $c > 1$ allora

$$\psi_0(x) = \sum_{n<x}\Lambda(n) + \frac{\Lambda(x)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\right)\frac{x^s}{s}ds + O\left(\sum_{n=1,\ n\neq x}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^c}x^c \min\left\{1, \frac{1}{T|\log\left(\frac{x}{n}\right)|}\right\} + \frac{c\Lambda(x)}{T}\right)$$

Stiamo ora il resto.
Scegliamo

$$c = 1 + \frac{1}{\log x}$$

e osserviamo che

$$x^c = ex \ll x$$

Siccome $\Lambda(x) \leq \log x$ allora

$$\frac{c\Lambda(x)}{T} \ll \left(1 + \frac{1}{\log x}\right)\frac{\log x}{T} \ll \frac{\log x}{T}$$

Dobbiamo ora stimare la serie

$$\sum_{n=1,\ n\neq x}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^c} x^c \min\left\{1, \frac{1}{T|\log\left(\frac{x}{n}\right)|}\right\}$$

e suddividiamo i termini della serie in tre gruppi:

- **termini per cui $n \leq \frac{3}{4}x$ oppure $n \geq \frac{5}{4}x$**
Per questi $|\log(x/n)|$ ha un bound inferiore positivo, ovvero $|\log(x/n)| \gg 1$ quindi il loro contributo nella somma è

$$\left(\sum_{n\leq 3/4x} + \sum_{n\leq 5/4x}\right) \frac{\Lambda(n)}{n^c}\frac{x^c}{T} \ll \frac{x}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-c} = \frac{x}{T}\left[-\frac{\zeta'(c)}{\zeta(c)}\right] \ll \frac{x}{T}(\log x)$$

dove abbiamo usato che $x^c = ex \ll x$, mentre per $\sigma > 1$ che $\zeta(\sigma) \ll \frac{1}{\sigma-1}$ e $|\zeta'(s)/\zeta(s) \ll \frac{1}{\sigma-1}$.

- **termini per cui $\frac{3}{4}x < n < x$.**
Sia x_1 la più grande potenza di un primo minore di x. Possiamo supporre che $\frac{3}{4}x < x_1 < x$ siccome in caso contrario i termini presi in considerazione svaniscono. Per il termine $n = x_1$ abbiamo

$$\log\left(\frac{x}{n}\right) = \log\left(\frac{x}{x_1}\right) = -\log\left(1 - \frac{x-x_1}{x}\right) = \frac{x-x_1}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x-x_1}{x}\right)^2 + \cdots \geq \frac{x-x_1}{x}$$

e perciò il contributo di questo termine è

$$\Lambda(x_1)\left(\frac{x}{x_1}\right)^c \frac{x}{T(x-x_1)} \ll \frac{x\log x}{T(x-x_1)}$$

in quanto x e x_1 hanno lo stesso ordine e quindi $\left(\frac{x}{x_1}\right)^c \ll 1$.
Per gli altri termini consideriamo $\frac{3}{4}x < n < x_1$ e osserviamo che

$$\log\left(\frac{x}{n}\right) \geq \log\left(\frac{x_1}{n}\right) = -\log\left(\frac{n}{x_1}\right) = -\log\left(1 - \frac{x_1-n}{x_1}\right) \geq \frac{x_1-n}{x_1} = \frac{\nu}{x_1}$$

Segue che

$$\sum_{1\leq\nu<x_1} \frac{\Lambda(x_1-\nu)x^c}{(x_1-\nu)^c T}\frac{x_1}{\nu} \ll \frac{x(\log x)^2}{T}$$

in quanto $(x_1-\nu) \geq \frac{3}{4}x$ e quindi x^c e $(x_1-\nu)^c$ sono dello stesso ordine (un logaritmo deriva dalla stima di Λ e uno dalla somma su ν).

- **termini per cui $x < n < \frac{5}{4}x$**
Si trattano in maniera analoga al caso precedente, tranne per il fatto che x_1 viene sostituito con x_2, la più piccola potenza maggiore di x.

Utilizziamo come notazione $\langle x \rangle$ per la distanza da x alla potenza di un primo più vicina e diversa da x nel caso in cui x è la potenza di un primo.
Mettendo insieme le stime trovate otteniamo che

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\right)\frac{x^s}{s}ds + O\left(\frac{x(\log x)^2}{T} + \frac{x\log x}{T<x>} + \frac{\log x}{T}\right)$$

ovvero

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s}ds + O\left(\frac{x(\log x)^2}{T} + \frac{x\log x}{T<x>}\right)$$

Tuttavia se $x \in \mathbb{N}$ allora $<x> \geq 1$ e quindi si ha in questo caso che

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s}ds + O\left(\frac{x(\log x)^2}{T}\right)$$

Se invece abbiamo un x generico allora la formula generale è

$$\psi_0(x) - \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\right)\frac{x^s}{s}ds \ll \frac{x(\log x)^2}{T} + (\log x)\min\left(1, \frac{x}{T\langle x\rangle}\right)$$

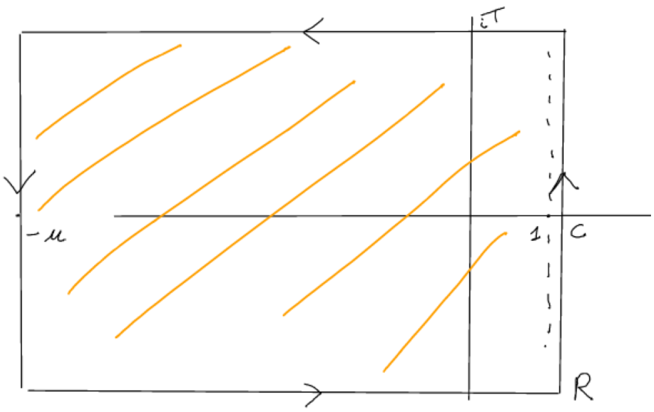
Le formule di questo tipo sono conosciute come **Formule di Perron**.
Vogliamo ora calcolare l'integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s}ds$$

con il teorema dei residui applicato al rettangolo di vertici

$$c - iT, c + iT, -U + iT, -U - iT$$

dove U è un intero dispari grande.



Quindi la linea verticale a sinistra passa a metà tra due degli zeri banali di $\zeta(s)$. Inoltre $T \neq \gamma$ dove $\frac{1}{2} + i\gamma$ è uno zero di ζ.
La somma dei residui dell'integranda nei suoi poli all'interno del rettangolo è

$$x - \sum_{|\gamma|<T} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_{0<2m<U} \frac{x^{-2m}}{-2m}$$

Abbiamo quindi

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \frac{x^s}{s} ds = x - \sum_{|\gamma|<T} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_{0<2m<U} \frac{x^{-2m}}{-2m} + \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{-U+iT}^{c+iT} + \int_{-U-iT}^{U+iT} - \int_{-U-iT}^{c-iT} \right)$$

Innanzitutto, per $2 \leq T \leq x$, bisogna scegliere T attentamente.
Abbiamo visto precedentemente che $N(T+1) - N(T-1) \leq c_0 \log T$. Scegliamo quindi T (variandolo di una quantità ≤ 1) in modo che

$$|\gamma - T| \gg \frac{1}{\log T}$$

Sappiamo anche che per $|t \geq 2|$ e $-1 \leq \sigma \leq 2$ si ha

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{|\gamma - t| \leq 1} \frac{1}{s-\rho} + O(\log t)$$

Segue che

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + iT) = \sum_{|\gamma - T| \leq 1} \frac{1}{s-\rho} + O(\log T) \ll (\log T) \sum_{|\gamma - T| \leq 1} 1 \ll (\log T)^2$$

Segue che

$$\int_{-1 \pm iT}^{c \pm iT} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \frac{x^s}{s} ds \ll \log^2 T \int_{-1}^{c} \left| \frac{x^s}{s} \right| d\sigma \ll \frac{\log^2 T}{T} \int_{-\infty}^{c} x^\sigma d\sigma \ll \frac{x \log^2 T}{T}$$

(la lunghezza è $2 + c$ e quindi non conta).
Rimane da stimare il contributo dato dalle linee orizzontali di integrazione per $-U \leq \sigma \leq -1$ e dalla linea verticale $\sigma = -U$.
Abbiamo bisogno di una stima per $\left|\frac{\zeta'}{\zeta}\right|$ per $\sigma \leq -1$. A tale scopo dimostreremo in un'osservazione successiva che

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| \ll \log(2|s|)$$

per $\sigma \leq -1$ e $|s + 2n| \geq \frac{1}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (abbiamo supposto che i cerchi di raggio $\frac{1}{2}$ intorno a tutti gli zeri banali in $s = -2, -4, \ldots$ siano esclusi).
Seguirà che il contributo del resto degli integrali orizzontali sarà:

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{-1} \log(2|\sigma + iT|) x^\sigma d\sigma \ll \frac{x^{-1} \log T}{T \log x}$$

che è trascurabile rispetto a
$$\frac{x\log^2 T}{T}$$
mentre il contributo dell'integrale verticale è
$$\log(2|U\pm iT|)x^{-U}\int_0^T\frac{dt}{U+t}\ll\frac{\log(2|U\pm iT|)}{x^U}\log T$$
che si annulla per $U\to\infty$.
Mettendo insieme i risultati ottenuti e facendo tendere $U\to\infty$ si ottiene la seguente proposizione:

Proposizione 6.2. *Vale*
$$\psi_0(x)=x-\sum_{|\gamma|<T}\frac{x^\rho}{\rho}-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}-\frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right)+R(x,T)$$
dove
$$|R(x,T)|\ll\frac{x\log^2(xT)}{T}+(\log x)\min\left(1,\frac{x}{T\langle x\rangle}\right)$$
o, nel caso in cui $x\in\mathbb{N}$,
$$|R(x,T)|\ll\frac{x\log^2(xT)}{T}$$

Osservazione 6.3. *Se cambiamo T, la quantità di zeri che possiamo saltare è*
$$\frac{x^\rho}{\rho}\log T\ll\frac{x^\beta\log T}{T}\ll\frac{x\log T}{T}$$
e questa stima rientra nel resto che abbiamo già. Segue che la proposizione sopra vale per $T\geq 2$.

Lemma 6.4. *Per $\sigma\leq -1$ e $|s+2n|\geq\frac{1}{2}$ per ogni $n\in\mathbb{N}$ vale*
$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|\ll\log(2|s|)$$

Dimostrazione. Questa stima segue dall'equazione funzionale che è più conosciuta nella sua forma antisimmetrica
$$\zeta(1-s)=2^{1-s}\pi^{-s}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\pi s\right)\right)\Gamma(s)\zeta(s)$$
in quanto, se $1-\sigma\leq -1$ allora le funzioni nel membro di destra possono essere considerate solo per $\sigma\geq 2$.
L'equazione funzionale appena riportata si ricava nel seguente modo.
Partendo dalla definizione
$$\xi(s)=\frac{s}{2}(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

$$\xi(1-s)=\frac{s}{2}(s-1)\pi^{\frac{s-1}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$$

siccome

$$\xi(s)=\xi(1-s)$$

allora

$$\zeta(1-s)=\pi^{\frac{1}{2}-s}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}\zeta(s)$$

Sappiamo poi che

$$\Gamma(2z)\sqrt{\pi}\cdot 2^{1-2z}=\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Segue che

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}\cdot 2^{1-s}\Gamma(s)}{\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi s}{2}\right)}}=2^{1-s}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s)$$

e quindi per $\sigma\geq 2$ vale

$$\zeta(1-s)=2^{1-s}\pi^{-s}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\pi s\right)\right)\Gamma(s)\zeta(s)$$

La derivata logaritmica del membro di destra, a meno di una costante aggiuntiva, è

$$-\frac{1}{2}\pi\tan\left(\frac{1}{2}\pi s\right)+\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}+\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

ovvero

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(1-s)=-\log(2\pi)-\frac{\pi}{2}\tan\left(\frac{\pi}{2}s\right)+\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}+\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

Osserviamo che:

- il primo termine è limitato se $|s-(2m+1)|\geq\frac{1}{2}$, ovvero se

  $$|(1-s)+2m|\geq\frac{1}{2}$$

  Infatti

  $$\left|\tan\left(\frac{\pi}{2}s\right)\right|=\left|\frac{e^{i\frac{\pi}{2}s}-e^{-i\frac{\pi}{2}s}}{i\left(e^{i\frac{\pi}{2}s}+e^{-i\frac{\pi}{2}s}\right)}\right|=\left|\frac{e^{i\pi s}-1}{e^{i\pi s}+1}\right|\frac{e^{\pi t}+1}{e^{\pi t}-1}=1+\frac{2}{e^{\pi t}-1}=1+\frac{2}{e^{\pi t}-1}\leq 1+2=3$$

- il secondo termine è $\ll\log|s|$ e quindi $\ll\log(2|1-s|)$ per $\sigma\geq 2$ in quanto

  $$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s)=\log s+O\left(\frac{1}{|s|}\right)$$

  e in particolare

  $$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s)\ll\log|s|+O\left(\frac{1}{|s|}\right)$$

- il terzo termine è limitato, infatti per $\sigma \geq 2$ vale

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \ll 1$$

Quindi siccome

$$|1-s| \leq 1 + |s| \leq 2|s| \iff |s| \geq 1$$

allora segue che

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(1-s) \sim \log(2|1-s|)$$

(in particolare in modulo è minore di $\frac{\pi^2}{6}$)

Segue quindi che

$$\left|\zeta'(s)/\zeta(s)\right| \ll \log(2|s|)$$

per $\sigma \leq -1$. □

La formula

$$\psi_0(x) = x - \sum_{|\gamma|<T} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\log\left(1 - x^{-2}\right) + R(x,T)$$

dove

$$|R(x,T)| \ll \frac{x\log^2(xT)}{T} + (\log x)\min\left(1, \frac{x}{T\langle x\rangle}\right)$$

costituisce la forma più precisa della formula esplicita

$$\psi_0(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\log\left(1 - x^{-2}\right)$$

Siccome $T \to \infty$ per ogni $x \geq 2$ allora $R(x,T) \to 0$ e quindi da ciò segue la formula esplicita appena citata.
La convergenza è uniforme in ogni intervallo chiuso di x che non contiene una potenza di un primo, ma non in caso contrario in quanto $\psi_0(x)$ è discontinua in ogni valore di x che è potenza di un primo.
Abbiamo perciò dimostrato che

$$\psi_0(x) = x - \sum_{|\gamma|<T} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\log\left(1 - x^{-2}\right) + R(x,T)$$

dove

$$|R(x,T)| \ll \frac{x\log^2(xT)}{T} + (\log x)\min\left(1, \frac{x}{T\langle x\rangle}\right)$$

con un'ulteriore restrizione su T, tuttavia questa restrizione può essere rimossa.
L'effetto di variare T di una quantità limitata è un cambiamento sulla somma su ρ

di $O(\log T)$ termini, e ogni termine è $O(x/T)$. Segue che la variazione nella somma è $O[x(\log T)/T]$ e questa stima rientra nella stima di $|R(x,T)|$.
Osserviamo infine che se x è un intero allora $\langle x\rangle \geq 1$ e la stima su $|R(x,T)|$ assume la seguente forma più semplice

$$|R(x,T)| \ll \frac{x(\log xT)^2}{T}$$

Questi risultati continuano a valere per $1 < x < 2$, con una leggera variazione nella forma della stima per $R(x,T)$.

Capitolo 7

Il teorema dei numeri primi

Ricordiamo che

$$\psi_0(x) = \sum_{n<x} \Lambda(n) + \frac{1}{2}\Lambda(x)$$

o equivalentemente

$$\psi_0(x) = x - \sum_{|\gamma|<T} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) - \frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right) + O\left(\frac{x\log^2(xT)}{T} + \log x \min\left(1, \frac{x}{T<x>}\right)\right)$$

dove, come notazione universale, si indica $\rho = \beta + i\gamma$ e $<x>= \min\{|x-p^a| : p \geq 2, a \geq 1\}$.
Inoltre per de la Vallèe Poussin si ha che esiste $c_0 > 0$ tale che

$$\beta < 1 - \frac{c_0}{\log T}$$

per $T \geq 2$ per ogni $\rho = \beta + i\gamma$ e $|\gamma| < T$ e $T \leq x$.
Segue quindi che

$$|x^\rho| = x^\beta < x\exp\left[-c_1(\log x)/(\log T)\right]$$

e perciò

$$\left|\sum_{|\gamma|<T} \frac{x^\rho}{\rho}\right| \leq \max_{|\gamma|<T} x^\beta \sum_{|\gamma|<T} \frac{1}{|\rho|} \leq x\exp\left(-\frac{c_0\log x}{\log T}\right) \sum_{|\gamma|<T} \frac{1}{|\rho|}$$

con

$$\begin{aligned}\sum_{|\gamma|<T} \frac{1}{|\rho|} \ll \sum_{2<\gamma\leq T} \frac{1}{\gamma} &= \\ &= \left(\sum_{2<\gamma\leq T} 1\right)\frac{1}{T} + \int_2^T \left(\sum_{2<\gamma\leq u} 1\right)\frac{du}{u^2} = \\ &= \frac{N(T)}{T} + \int_2^T \frac{N(u)}{u^2}du\end{aligned}$$

in quanto $|\rho| \geq \gamma$, $\gamma > 0$.
Sappiamo che

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T)$$

da cui

$$\sum_{|\gamma|<T} \frac{1}{|\gamma|} \ll \frac{T \log T}{T} + \int_2^T \frac{\log u}{u} du \ll \log T + \log^2 T \ll \log^2 T$$

Segue quindi che

$$\sum_{|\gamma|<T} \frac{x^\rho}{\rho} \ll x \log^2 T \exp\left(-\frac{c_0 \log x}{\log T}\right)$$

da cui

$$\psi_0(x) - x \ll x \left(\log^2 T \exp\left(-\frac{c_0 \log x}{\log T}\right) + \frac{\log^2(xT)}{T}\right)$$

(osserviamo che $\log^2(xT)$ è trattato come $\log^2(x)$ in quanto T non supera x).
Affinchè siano dello stesso ordine($\frac{1}{T} = \exp(-\log T)$)

$$\log x \asymp \log^2 T$$

scegliamo T in modo che $T = \exp(\sqrt{\log x})$.
Sappiamo che

$$\exp((\log x)^\varepsilon) \gg (\log x)^N$$

quindi possiamo concludere che esiste una costante c_1 con $0 < c_1 < 1$ tale che

$$\psi_0(x) - x \ll x \exp(-c_1 \sqrt{\log x})$$

in quanto

$$\begin{aligned} |\psi_0(x) - x| &\ll x(\log x)^2 \exp\left[-(\log x)^{\frac{1}{2}}\right] + x(\log x) \exp\left[-c_0(\log x)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &\ll x \exp\left[-c_1(\log x)^{\frac{1}{2}}\right] \end{aligned}$$

supposto che c_1 sia una costante minore sia di 1 che c_0.
Possiamo quindi concludere che

Teorema 7.1. ***(PNT Hadamard-de la Vallèe Poussin)***
Esiste una costante c_1 con $0 < c_1 < 1$ tale che

$$\psi(x) = x + O\left(x \exp(-c_1 \sqrt{\log x})\right)$$

Dimostrazione. Siccome

$$\psi_0(x) = \sum_{n<x} \Lambda(n) + \frac{1}{2}\Lambda(x)$$

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

e abbiamo appena mostrato che esiste una costante c_1 con $0 < c_1 < 1$ tale che

$$\psi_0(x) - x \ll x \exp(-c_1\sqrt{\log x})$$

allora

$$\psi(x) = x + O\left(x \exp(-c_1\sqrt{\log x})\right)$$

$\square$

Osservazione 7.2. *Deriva dalla stima*

$$\beta < 1 - \frac{c_0}{\log T}$$

con $T \geq 2$*.*

Teorema 7.3. ***(Littlewood)***
Esiste una costante c_1 *con* $0 < c_1 < 1$ *tale che*

$$\psi(x) = x + O\left(x \exp(-c_1\sqrt{\log x \log\log x})\right)$$

Dimostrazione. Deriva dalla stima

$$\beta < 1 - \frac{c_0 \log\log T}{\log T}$$

$\square$

Teorema 7.4. ***(Vinogradov-Korobov)***
Esiste una costante c_1 *con* $0 < c_1 < 1$ *tale che*

$$\psi(x) = x + O\left(x \exp\left(-c_1(\log x)^{\frac{3}{5}-\varepsilon}\right)\right)$$

Dimostrazione. Deriva dalla stima

$$\beta < 1 - \frac{c_0}{(\log T)^{\frac{2}{3}+\varepsilon}}$$

Vogliamo bilanciare

$$\frac{\log x}{(\log T)^{\alpha}} \asymp \log T$$

con $0 < \alpha < 1$ da cui

$$\log x = (\log T)^{1+\alpha}$$

$$\log T = (\log x)^{\frac{1}{1+\alpha}}$$

Ponendo $\alpha = \frac{2}{3}$ si ottiene il $\frac{3}{5}$. $\square$

7.1 Conseguenze dell'ipotesi di Riemann

Supponendo vera l'ipotesi di Riemann (**R.H.**), si hanno stime migliori per il termine d'errore, come è stato fatto notare da Koch nel 1901.
Supponendola vera, si avrebbe $\beta = \frac{1}{2}$ per ogni ρ, quindi $|x^\rho| = \sqrt{x}$, e siccome abbiamo mostrato in precedenza che

$$\sum \frac{1}{|\rho|} = O(\log^2 T) \quad 0 < \gamma < T$$

$$\left| \sum_{|\gamma|<T} \frac{x^\rho}{\rho} \right| \ll \sqrt{x} \sum_{|\gamma|<T} \frac{1}{|\gamma|} \ll \sqrt{x} \log^2 T$$

allora la formula esplicita ci dà:

$$|\psi_0(x) - x| \ll \sqrt{x} \log^2 T + \frac{x}{T} \log^2(xT)$$

se x è un intero.
Scegliendo $T = \sqrt{x}$ otteniamo

$$\psi(x) = x + O\left(\sqrt{x} \log^2 x\right)$$

Ma allora segue che

$$\pi(x) = \operatorname{li} x + O\left(\sqrt{x} \log x\right)$$

Se al posto di $\sqrt{x}$ poniamo x^θ con θ un numero compreso tra $\frac{1}{2}$ e 1 tale che tutti gli zeri hanno $\beta \leq \theta$ (**Q.R.H**) allora

$$\psi(x) = x + O\left(x^\theta \log^2 x\right)$$

Esiste anche un'implicazione nel senso opposto grazie al seguente ragionamento.
Se assumiamo che

$$\psi(x) = x + O_\varepsilon\left(x^{\theta+\varepsilon}\right)$$

per ogni $\varepsilon > 0$, segue che tutti gli zeri ρ di $\zeta(s)$ hanno $\beta \leq \theta$.
Infatti per $\sigma > 1$, abbiamo

$$\sum_{n \leq N} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \frac{\psi(N)}{N^s} + s \int_1^N \frac{\psi(u)}{u^{s+1}} du$$

da cui

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = s \int_1^\infty \frac{\psi(u)}{u^{s+1}} du$$

Se $\psi(x) = x + R(x)$ allora

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s \int_1^\infty \frac{1}{u^s} du + s \int_1^\infty \frac{R(u)}{u^{s+1}} du = \frac{s}{s-1} + s \int_1^\infty \frac{R(u)}{u^{s+1}} du$$

Osserviamo che

$$\left|\frac{R(u)}{u^{s+1}}\right| \ll \frac{u^{\theta+\varepsilon}}{u^{s+1}}$$

quindi se prendiamo $\sigma > \theta + 2\varepsilon$ allora

$$\left|\frac{R(u)}{u^{s+1}}\right| \ll \frac{u^{\theta+\varepsilon}}{u^{s+1}} \ll \frac{1}{u^{1+\varepsilon}}$$

Quindi l'integrale converge e possiamo arrivare eventualmente a $\beta = \theta$, ovvero vale $\beta \leq \theta$.
Il fatto di supporre che $R(u) = O\left(u^{\theta+\varepsilon}\right)$ implica che l'integrale rappresenta una funzione regolare di s per $\sigma > \theta + \varepsilon$ e quindi $\zeta(s)$ può non avere zeri in questo semipiano.
Dagli ultimi due risultati si può dedurre che se

$$\psi(x) = x + O\left(x^{\theta+\varepsilon}\right)$$

per ogni $\varepsilon > 0$, dove θ è un numero fissato tra $\frac{1}{2}$ e 1, allora necessariamente

$$\psi(x) = x + O\left(x^{\theta} \log^2 x\right)$$

Il matematico Grosswald ha mostrato che se θ è strettamente maggiore di $\frac{1}{2}$ allora il fattore $\log^2 x$ può essere eliminato.

Osservazione 7.5. *Esiste una* ***congettura di Montgomery****: il resto è* $O(x^{1/2}(\log\log x)^2)$

Osservazione 7.6. *È stato dimostrato che ci sono infiniti cambiamenti di segno, ovvero*

$$\psi(x) - x = \Omega_{\pm}(\sqrt{x})$$

ovvero esistono infiniti x per cui

$$\psi(x) - x \geq c\sqrt{x}$$

e infiniti per cui

$$\psi(x) - x \leq -c\sqrt{x}$$

Osserviamo che Ω è la negazione di o.

Proposizione 7.7. *Posto*

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$$

vale

$$\psi(x) - \vartheta(x) = O(\sqrt{x}\log x)$$

Dimostrazione. Osserviamo che

$$\psi(x) = \sum_{p^a \leq x} \log(p) = \vartheta(x) + \vartheta\left(x^{1/2}\right) + \cdots + \vartheta\left(x^{1/k}\right)$$

dove $k = [\log x/\log 2]$, in quanto $x^{1/\alpha} < 2$ per $\alpha > \log x/\log 2$. Inoltre per ogni $\alpha \geq 2, \alpha \in \mathbb{N}$, si ha che $0 \leq \vartheta\left(x^{1/\alpha}\right) \leq x^{1/\alpha} \log x$. Infatti:

$$\begin{aligned}
\vartheta\left(x^{1/\alpha}\right) &= \sum_{p \leq x^{1/\alpha}} \log p \\
&\leq \sum_{p \leq x^{1/\alpha}} \log x^{1/\alpha} \\
&\leq x^{1/\alpha} \log x^{1/\alpha} \\
&= (1/\alpha) x^{1/\alpha} \log x \\
&\leq x^{1/\alpha} \log x
\end{aligned}$$

□

Osservazione 7.8. *Se vale R.H. allora vale*

$$\vartheta(x) = x + O(\sqrt{x} \log^2 x)$$

Se vale Q.R.H. allora vale

$$\vartheta(x) = x + O(x^\theta \log^2 x)$$

Cerchiamo ora la relazione che collega le funzioni $\pi(x), \psi(x)$ e $\vartheta(x)$. Sappiamo che $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$ e $\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$. Vale quindi:

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 = \sum_{n \leq x} \frac{\vartheta(n) - \vartheta(n-1)}{\log n}$$

Da ciò segue che

$$\begin{aligned}
\pi(x) - \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{\log n} &= \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{\vartheta(n) - n - (\vartheta(n-1) - (n-1))}{\log n} \\
&= \frac{\vartheta(x) - [x]}{\log[x+1]} + \frac{1}{\log 2} + \sum_{2 \leq n \leq x} (\vartheta(n) - n) \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)} \right)
\end{aligned}$$

Introduciamo ora una nuova notazione, ovvero indichiamo con li la sommatoria $\sum \frac{1}{\log n}$. Utilizzando la funzione ψ invece di ϑ otteniamo:

$$\begin{aligned}
\pi(x) - li\ x &= \sum_{2\leq n\leq x} (\psi(n) + O(\sqrt{n}\log n) - n)\left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) + \\
&\quad + \frac{\psi(x) + O(\sqrt{x}\log x) - [x]}{\log[x+1]} + \frac{1}{\log 2} \\
&= \sum_{2\leq n\leq x} (\psi(n) - n)\left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) + \frac{\psi(x) - [x]}{\log[x+1]} + \frac{O(\sqrt{x}\log x)}{\log[x+1]} \\
&\quad + \sum_{2\leq n\leq x} (O(\sqrt{n}\log n))\left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) + \frac{1}{\log 2} \\
&= \sum_{2\leq n\leq x} (\psi(n) - n)\left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) + \frac{\psi(x) - [x]}{\log[x+1]} + O\left(\frac{\sqrt{x}\log x}{\log[x+1]}\right) \\
&\quad + \sum_{2\leq n\leq x} (O(\sqrt{n}\log n))\left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) \\
&= \sum_{2\leq n\leq x} (\psi(n) - n)\left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) + \frac{\psi(x) - [x]}{\log[x+1]} + O(\sqrt{x})
\end{aligned}$$

Osservazione 7.9. *L'ordine di*

$$\sum_{2\leq n\leq x} (O(\sqrt{n}\log n))\left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right)$$

è $O(\sqrt{x})$ in quanto per x che tende a ∞ vale la seguente stima:

$$\begin{aligned}
\sum_{2\leq n\leq x} (O(\sqrt{n}\log n))\left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) &= \sum_{2\leq n\leq x} O\left(\sqrt{n}\left(1 - \frac{\log n}{\log(n+1)}\right)\right) \\
&\leq xO\left(\sqrt{x}\left(1 - \frac{\log x}{\log(x+1)}\right)\right) \\
&= O\left(x\sqrt{x}\left(1 - \frac{\log x}{\log(x+1)}\right)\right) \\
&= O\left(x\sqrt{x}\log\left(\frac{x+1}{x}\right)\frac{1}{\log(x+1)}\right)
\end{aligned}$$

Ma $O\left(x\sqrt{x}\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\frac{1}{\log(x+1)}\right)$ tende a $O(\sqrt{x})$ all'infinito.

Poniamo

$$li(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u}$$

Proposizione 7.10. *Se vale R.H. allora*

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(\sqrt{x}\log x)$$

e analogamente con Q.R.H.

Dimostrazione. Applicando il lemma di sommazione parziale si ottiene

$$\begin{aligned}\pi(x) &= \sum_{p\le x} 1 \\ &= \sum_{p\le x} \log(p)\frac{1}{\log(p)} \\ &= \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(u)}{u(\log(u))^2}du\end{aligned}$$

quindi

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(u)}{u\log^2 u}du$$

Andando ora a sostituire a ϑ la relazione (valida se R.H. è vera)

$$\vartheta(x) = x + O(\sqrt{x}\log^2 x)$$

si ha la tesi. □

7.2 Trasformata di Mellin

Definizione 7.11. *Sia $f(x)$ una funzione definita per $x > 0$, cioè $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, e tale che per un $\sigma \in \mathbb{R}$, vale*

$$\int_0^\infty |f(x)|x^{\sigma-1}dx < +\infty$$

*Si chiama **Trasformata di Mellin** di f la funzione $\widehat{f}$ definita, per $s = \sigma + it$, dalla formula*

$$\widehat{f}(s) = \int_0^\infty f(x)x^s d^*x = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx$$

Osservazione 7.12. *Supponiamo di fare il cambio di variabile $x = e^{-2\pi u}$. Ma allora $\frac{dx}{x} = -2\pi du$. Segue che*

$$\widehat{f}(\sigma + it) = 2\pi\int_{-\infty}^\infty f\left(e^{-2\pi u}\right)e^{-2\pi u\sigma - 2\pi itu}du = 2\pi\int_{-\infty}^\infty \varphi_\sigma(u)e^{-2\pi itu}du = 2\pi\widehat{\varphi_\sigma(t)}$$

dove

$$\varphi_\sigma(u) = f\left(e^{-2\pi u}\right)e^{-2\pi u\sigma}$$

Teorema 7.13. ***(Teorema di inversione)***
Se $f(x)$ è C^1 per $x > 0$ ed è tale che per un $\sigma \in \mathbb{R}$ vale

$$\int_0^\infty |f(x)| x^{\sigma-1} dx < +\infty$$

allora

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \widehat{f}(s) x^{-s} ds$$

Dimostrazione. Con la sostituzione

$$x = e^{-2\pi u}, \quad d^*x = \frac{dx}{x} = -2\pi du$$

si ha

$$\widehat{f}(\sigma + it) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f\left(e^{-2\pi u}\right) e^{-2\pi(\sigma+it)u} du$$

Posto

$$\varphi(u) = f\left(e^{-2\pi u}\right) e^{-2\pi\sigma u}$$

con $-\infty < u < +\infty$, si ha quindi

$$\frac{1}{2\pi} \widehat{f}(\sigma + it) = \widehat{\varphi}(t)$$

dove $\widehat{\varphi}$ è la Trasformata di Fourier di φ.
Ricordiamo che

$$\widehat{\widehat{\varphi}} = \varphi^-$$

vale ovviamente per funzioni $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ tali che $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(u)|$ du $< +\infty$.
Siccome per ipotesi

$$\int_0^\infty |f(x)| x^{\sigma-1} dx < +\infty$$

allora

$$\begin{aligned} f\left(e^{-2\pi u}\right) e^{-2\pi\sigma u} &= \varphi(u) = \\ &= \widehat{\widehat{\varphi}}(-u) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(t) e^{2\pi i u t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\sigma + it) e^{2\pi i u t} dt \end{aligned}$$

da cui

$$f\left(e^{-2\pi u}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{t=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\sigma + it) e^{2\pi u(\sigma+it)} d(\sigma + it)$$

ovvero

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \widehat{f}(s) x^{-s} ds$$

□

Osservazione 7.14. *Riscriviamo*
$$\widehat{\widehat{\varphi}} = \varphi^-$$
come
$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v) e^{2\pi i t(u-v)} dv$$
Osserviamo che vale anche per funzioni φ che sono C^1 a tratti (cioè tali che in ogni intervallo finito φ e $\frac{d\varphi}{du}$ abbiano al più un numero finito di discontinuità di prima specie) che soddisfano le condizioni
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(u)| du < +\infty$$
$$\varphi(u) = \frac{\varphi(u+0) + \varphi(u-0)}{2}$$
Quest'ultima condizione dice che, negli eventuali punti di discontinuità, il valore di φ deve essere la media aritmetica dei limiti destro e sinistro.
Si osserva quindi che il membro di destra di
$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v) e^{2\pi i t(u-v)} dv$$
converge per quei valori di u nei quali φ è continua.
Se invece φ è discontinua, la relazione sopra continua a valere purchè si dia all'integrale rispetto a t il suo valore principale, cioè
$$\varphi(u) = \lim_{T \to +\infty} \int_{-T}^{T} dt \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v) e^{2\pi i t(u-v)} dv$$
Ne segue che il teorema appena enunciato vale anche per funzioni $f(x)$ che sono C^1 a tratti per $x > 0$ che soddisfano
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)| du < +\infty$$
$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$
purchè la funzione
$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \overset{\frown}{f}(s) x^{-s} ds$$
per i valori di x in cui f è discontinua, sia sostituita da
$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \to +\infty} \int_{\sigma - iT}^{\sigma + iT} \overset{\frown}{f}(s) x^{-s} ds$$

Vediamo ora alcuni esempi.

- Osserviamo che $\Gamma(s)$ è la trasformata di Mellin di e^{-x} e quindi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(s)x^{-s}ds = e^{-x} \qquad (x>0, c>0)$$

- Sia

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad 0<x<1 \\ \frac{1}{2} & \text{se} \quad x=1 \\ 0, & \text{se} \quad x>1. \end{cases}$$

Osserviamo che la condizione

$$\int_0^\infty |f(x)|x^{\sigma-1}dx < +\infty$$

è soddisfatta per $\sigma > 0$.
Per $\sigma > 0$ si ha quindi

$$\widehat{f}(s) = \int_0^1 x^{s-1}dx = \frac{1}{s}$$

e perciò, posto $y = \frac{1}{x}$, vale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{y^s}{s}ds = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad 0<y<1 \\ \frac{1}{2}, & \text{se} \quad y=1 \\ 1, & \text{se} \quad y>1 \end{cases} \qquad (c>0)$$

Osserviamo che nel caso $y = 1$ il primo membro dell'equazione sopra si deve intendere come il limite per $T \to +\infty$ di

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{ds}{s}$$

- Sia $k \geq 1$ un intero e sia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(1-x)^k}{k!}, & \text{se} \quad 0<x\leqslant 1 \\ 0, & \text{se} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

La condizione

$$\int_0^\infty |f(x)|x^{\sigma-1}dx < +\infty$$

è soddisfatta per $\sigma > 0$.
Si ha

$$\int_0^1 (1-x)^k x^{s-1}dx = \frac{1}{s}\Big[(1-x)^k x^s\Big]_0^1 + \frac{k}{s}\int_0^1 (1-x)^{k-1}x^s dx = \cdots = \frac{k!}{s(s+1)\ldots(s+k)}$$

ovvero

$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{s(s+1)\cdots(s+k)} \qquad (\sigma > 0)$$

Segue che, posto $y = \frac{1}{x}$, per $c > 0$ vale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{y^s}{s(s+1)\dots(s+k)} ds = \begin{cases} 0, \text{ se } 0 < y \le 1 \\ \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{y}\right)^k, \text{ se } y \geqslant 1 \end{cases}$$

- Sia $k \ge 1$ un intero e

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(-\log x)^k}{k!}, & \text{se} \quad 0 < x \leqslant 1 \\ 0, & \text{se} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

Poichè

$$(-\log x)^k \ll x^{-\varepsilon} \quad (x \to 0)$$

allora la condizione

$$\int_0^\infty |f(x)| x^{\sigma-1} dx < +\infty$$

è soddisfatta per $\sigma > 0$.
Si ha

$$\int_0^1 (-\log x)^k x^{s-1} dx = \frac{1}{s}\Big[(-\log x)^k x^s\Big]_0^1 + \frac{k}{s}\int_0^1 (-\log x)^{k-1} x^{s-1} dx = \dots = \frac{k!}{s^{k+1}}$$

ovvero

$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{s^{k+1}} \quad (\sigma > 0)$$

Ne segue che, posto $y = \frac{1}{x}$, vale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{y^s}{s^{k+1}} ds = \begin{cases} 0, & 0 < y \leqslant 1 \\ \frac{\log^k y}{k!}, & \text{se } y \geqslant 1 \end{cases} \quad (c > 0)$$

Osservazione 7.15. *Se $k = 1$ e $y = \frac{x}{n}$ allora, per $\sigma > 1$, si ha*

$$\sum_{n \le x} \Lambda(n) \log\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\Lambda(n)}{n^s}\right)\frac{x^s}{s^2} ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s^2} ds$$

Osservazione 7.16. *Usando la Trasformata di Fourier il teorema visto precedentemente si può invertire.*
Se $g(s)$ è una funzione definita nella striscia $\alpha \le \sigma \le \beta$, sotto opportune ipotesi di decrescenza all'infinito per $g(s)$, l'indipendenza di

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} g(s) x^{-s} ds$$

dall'ascissa σ di integrazione è garantita dall'analiticità della funzione $g(s)$ come immediata conseguenza del teorema di Cauchy.

Seguendo lo stesso ragionamento del teorema dimostrato precedentemente si vede che se $g(s)$ è olomorfa nella striscia $\alpha \le \sigma \le \beta$, se per $\alpha < \sigma < \beta$ vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\sigma + it)|dt < \infty$$

e se

$$\lim_{t \to \pm\infty} g(\sigma + it) = 0$$

uniformemente per $\alpha \le \sigma \le \beta$, allora posto per $x > 0$, $\alpha < \sigma < \beta$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} g(s) x^{-s} ds$$

allora si ha che $f(x)$ non dipende dall'ascissa σ di integrazione e si ha

$$g(s) = \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx$$

7.3 Formule esplicite per le funzioni ψ_k

Definizione 7.17. *Si definisce*

$$\psi_0(x) = \frac{\psi(x+0) + \psi(x-0)}{2} = \sum_{n<x} \Lambda(n) + \begin{cases} \frac{1}{2}\Lambda(x) & \textit{se } x \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Se ora consideriamo la funzione

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{y^s}{s} ds = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 < y < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se} \quad y = 1 \\ 1 & \text{se} \quad y > 1 \end{cases} \qquad (c > 0)$$

e poniamo $y = \frac{x}{n}$ con n intero positivo allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} n^{-s} \frac{x^s}{s} ds = \begin{cases} 1 & \text{se } n < x \\ \frac{1}{2} & \text{se } n = x \\ 0 & \text{se } n > x \end{cases}$$

dove $(x > 0, c > 0)$.
Segue che

$$\psi_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} n^{-s} \frac{x^s}{s} ds = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Lambda(n) n^{-s} \cdot \frac{x^s}{s} ds$$

In particolare, per $c > 1$, se è lecito invertire l'ordine di sommazione e integrazione, si ha

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds$$

Ammessa la formula di sopra, consideriamo l'integrale

$$\int \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}ds$$

fatto sul bordo del rettangolo di vertici $c \pm iT, -k \pm iT$ (dove k, T sono scelti in modo che $\zeta(s)$ non si annulli sul bordo stesso).
Se il contributo dato all'integrale dai lati orizzontali e dal lato verticale di ascissa $-k$ tende a zero per $k, T \to +\infty$, si potrà esprimere $\psi_0(x)$ come somma dei residui della funzione meromorfa

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}$$

Nel punto $s = 0$ il residuo è

$$-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = -\log 2\pi$$

Nel punto $s = 1$ il residuo è x.
In ogni zero s_0 di $\zeta(s)$ è $-\frac{x^{s_0}}{s_0}$ (uno zero di molteplicità h essendo ripetuto h volte).
Si otterrebbe quindi la seguente formula esplicita per $\psi_0(x)$:

$$\psi_0(x) = x - \sum_{\rho}\frac{x^\rho}{\rho} - \log 2\pi - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \quad (x > 1)$$

dove il termine

$$-\frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

è la somma dei residui negli zeri banali $-2, -4, -6, \ldots$ di $\zeta(s)$, ovvero è

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-2n}}{2n}$$

e la somma

$$\sum_{\rho}\frac{x^\rho}{\rho}$$

è estesa agli zeri non banali. Tuttavia questa serie non è assolutamente convergente, quindi i suoi termini vanno ordinati in modo opportuno.
Per dimostrare effettivamente la formula

$$\psi_0(x) = x - \sum_{\rho}\frac{x^\rho}{\rho} - \log 2\pi - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \quad (x > 1)$$

bisogna considerare la serie

$$\sum_{\rho}\frac{x^\rho}{\rho}$$

come il limite

$$\lim_{T\to+\infty} \sum_{|\operatorname{Im}\rho|\leqslant T} \frac{x^\rho}{\rho}$$

Per evitare di considerare serie o integrali che non sono assolutamente convergenti dimostreremo le formule esplicite per le funzioni $\psi_k(x)$ (medie integrali holderiane di $\psi(x)$ di ordine k) definite qui di seguito.

Definizione 7.18. *Definiamo*

$$\psi_1(x) = \int_1^x \frac{\psi(t)}{t} dt$$

e, per $k > 1$*,*

$$\psi_k(x) = \int_1^x \frac{\psi_{k-1}(t)}{t} dt$$

Proposizione 7.19. *Per ogni* $k \geq 1$ *vale*

$$\psi_k(x) = \frac{1}{k!} \sum_{n\leqslant x} \Lambda(n) \log^k\left(\frac{x}{n}\right)$$

Dimostrazione. Cominciamo con il caso $k = 1$. Per sommazione parziale abbiamo

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x} \Lambda(n) \log\left(\frac{x}{n}\right) &= \sum_{n\leq x} \Lambda(n)\cdot 0 + \int_1^x \left(\sum_{n\leq u} \Lambda(n)\right) \frac{du}{u} = \\
&= \int_1^x \frac{\psi(u)}{u} du = \\
&= \psi_1(x)
\end{aligned}$$

Sempre per sommazione parziale, induttivamente si ottiene che

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k!} \sum_{n\leqslant x} \Lambda(n) \log^k\left(\frac{x}{n}\right) &= \frac{1}{k!} k \int_1^x \left(\sum_{n\leq t} \Lambda(n)\right) \log^{k-1}\left(\frac{x}{t}\right) \cdot \frac{dt}{t} = \\
&= \frac{1}{(k-1)!} \int_1^x \frac{\psi(t)}{t} \log^{k-1}\left(\frac{x}{t}\right) dt = \\
&= \frac{1}{(k-2)!} \int_1^x \frac{\psi(u)}{u} du \int_u^x \log^{k-2}\left(\frac{x}{t}\right) \cdot \frac{dt}{t} = \\
&= \frac{1}{(k-2)!} \int_1^x \log^{k-2}\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t} \int_1^t \frac{\psi(u)}{u} du = \\
&= \frac{1}{(k-2)!} \int_1^x \frac{\psi_1(t)}{t} \log^{k-2}\left(\frac{x}{t}\right) dt = \\
&= \cdots = \\
&= \int_1^x \frac{\psi_{k-1}(t)}{t} dt = \\
&= \psi_k(x)
\end{aligned}$$

□

Lemma 7.20. *Dato $x > 0,\ c > 1,\ k = 1, 2, 3\dots$ vale*

$$\psi_k(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s^{k+1}}ds$$

Dimostrazione. Se consideriamo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{y^s}{s^{k+1}}ds = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < y \le 1 \\ \frac{\log^k y}{k!}, & \text{se } y \geqslant 1 \end{cases}$$

e poniamo $y = \frac{x}{n}$ allora per $x > 0,\ c > 0$ si ha

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} n^{-s}\frac{x^s}{s^{k+1}}ds = \begin{cases} \frac{1}{k!}\log^k\frac{x}{n} & \text{se } n \le x \\ 0 & \text{se } n \geqslant x \end{cases}$$

Segue che

$$\psi_k(x) = \frac{1}{k!}\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\log^k\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} n^{-s}\frac{x^s}{s^{k+1}}ds$$

In particolare, se $c > 1$ si può invertire l'ordine di sommazione e integrazione in quanto

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left|\Lambda(n)n^{-s}\frac{x^s}{s^{k+1}}ds\right| \leqslant x^c\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-c}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{c^2+t^2} < \infty$$

Si ha quindi, per $c > 1$, che

$$\psi_k(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-s}\right)\frac{x^s}{s^{k+1}}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s^{k+1}}ds$$

□

Teorema 7.21. ***(Formula esplicita per*** ψ_1***)***
Per $x \ge 1$ vale

$$\psi_1(x) = x - \sum_{\rho}\frac{x^\rho}{\rho^2} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0)\log x - \left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)'(0) - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-2n}}{n^2}$$

Dimostrazione. Sappiamo dal lemma precedente che

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s^2}ds$$

Consideriamo quindi la funzione meromorfa

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s^2}$$

I suoi residui sono nei punti $s = 0, 1$ e negli zeri sia banali che non banali della funzione ζ. Più precisamente:

$$\operatorname*{Res}_{s=1}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s^2}\right) = x$$

$$\operatorname*{Res}_{s=0}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s^2}\right) = \frac{d}{ds}\left(-s^2\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s^2}\right)_{s=0} = \frac{d}{ds}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}x^s\right)_{s=0} = -\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}\log x - \left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)'(0)$$

$$\operatorname*{Res}_{s=-2n}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s^2}\right) = -\frac{x^{-2n}}{(-2n)^2} = -\frac{x^{-2n}}{4n^2}$$

$$\operatorname*{Res}_{s=\rho}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s^2}\right) = -\frac{x^\rho}{\rho^2}$$

Per il teorema dei residui si ha quindi

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s^2}ds = x - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho^2} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0)\log x - \left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)'(0) - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-2n}}{n^2}$$

dove le serie sono convergenti (gli zeri non banali di ζ hanno esponente di convergenza 1 e nell'altra serie si ha il dilogaritmo e converge per $x = 1$).
Possiamo scegliere un qualunque $c > 1$ in quanto, a differenza del caso con ψ_0 dove dovevamo scegliere un c opportuno in quanto compariva nel resto, in questo caso invece non abbiamo nessun resto. □

Teorema 7.22. ***(Formula esplicita per ψ_k)***
Per $x \geq 1$ e $k = 1, 2, 3\ldots$ si ha

$$\psi_k(x) = x - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho^{k+1}} - \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)^{(j)}(0)\cdot(\log x)^{k-j} + (-1)^k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-2n}}{(2n)^{k+1}}$$

Dimostrazione. Dal lemma precedente sappiamo che

$$\psi_k(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s^{k+1}}ds$$

La funzione meromorfa

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s^{k+1}}$$

ha i seguenti residui:

$$\operatorname*{Res}_{s=0}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s^{k+1}}\right) = \frac{1}{k!}\left\{\frac{d^k}{ds^k}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}x^s\right)\right\}_{s=0} = -\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)^{(j)}(0)\cdot(\log x)^{k-j}$$

$$\operatorname*{Res}_{s=1}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s^{k+1}}\right) = x$$

$$\operatorname*{Res}_{s=-2n}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s^{k+1}}\right)=(-1)^k\frac{x^{-2n}}{(2n)^{k+1}}\qquad (n=1,2,3\ldots)$$

$$\operatorname*{Res}_{s=\rho}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s^{k+1}}\right)=-h\frac{x^\rho}{\rho^{k+1}}$$

se ρ è uno zero non banale di $\zeta(s)$ di molteplicità h.
Sia

$$I(m)=\frac{1}{2\pi i}\oint\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s^{k+1}}ds$$

dove l'integrale è calcolato sul bordo del rettangolo di vertici $2\pm iT_m$, $-2m-1\pm iT_m$, essendo T_m i numeri tali che $m<T_m<m+1$ e

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|\ll\log^2 T_m$$

Sia poi

$$I_1(m)=\frac{1}{2\pi i}\int_{2-iT_m}^{2+iT_m}\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right)\frac{x^s}{s^{k+1}}ds$$

e

$$I_2(m)=I(m)-I_1(m)$$

Per il Teorema dei residui si ha

$$I(m)=x-\sum_{|\gamma|<T_m}\frac{x^\rho}{\rho^{k+1}}-\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\left(\begin{array}{c}k\\ j\end{array}\right)\left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)^{(j)}(0)\cdot(\log x)^{k-j}+(-1)^k\sum_{n=1}^{m}\frac{x^{-2n}}{(2n)^{k+1}}$$

contando gli zeri non banali $\rho=\beta+i\gamma$ secondo la loro molteplicità.
Per il lemma precedente (abbiamo scelto $c=2$) sappiamo che

$$\lim_{m\to\infty}I_1(m)=\psi_k(x)$$

Vediamo ora come si comporta $I_2(m)$ al limite per $m\to\infty$.
Osserviamo che sui lati orizzontali del rettangolo e sul lato verticale di ascissa $-2m-1$ si ha

$$\left|-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right|\ll\log^2|s|\ll\log^2 m$$

in quanto

$$|s|<2m+1+T_m<3m+2$$

Inoltre

$$|x^s|=x^\sigma\le x^2$$

perchè $x\ge1$, e

$$|s^{k+1}|>m^{k+1}$$

Segue che

$$|I_2(m)|\ll\frac{x^2\log^2 m}{m^{k+1}}(4m+6+2T_m)\ll\frac{x^2\log^2 m}{m^k}$$

da cui
$$\lim_{m\to\infty} I_2(m) = 0$$
Si conclude che
$$\begin{aligned}\psi_k &= \lim_{m\to} \{I(m) - I_2(m)\} = \lim_{m\to\infty} I(m) = \\ &= x - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho^{k+1}} - \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array}\right) \left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)^{(j)} (0) \cdot (\log x)^{k-j} + (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n}}{(2n)^{k+1}}\end{aligned}$$

□

Corollario 7.23. *Si ottiene:*

- *applicando* ***de la Vallèe Poussin***
$$\psi_1(x) = x + O(x\exp(-c\sqrt{\log x}))$$
- *supponendo* ***R.H.***
$$\psi_1(x) = x + O(\sqrt{x})$$
- *supponendo* ***Q.R.H.*** *(cioè $\beta \leq \theta < 1$ per ogni ρ)*
$$\psi_1(x) = x + O(x^\theta)$$
- *vale*
$$\psi_1(x) = x + o(x)$$

Teorema 7.24. ***(Versione debole del PNT)***
Se $\beta < 1$ per ogni ρ (Hadamard) allora vale
$$\psi_1(x) = x + o(x)$$

Dimostrazione. Innanzitutto la tesi equivale a dimostrare che
$$\frac{\psi_1(x) - x}{x} = o(1)$$
Dalla formula esplicita per ψ_1, ovvero
$$\psi_1(x) = x - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho^2} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0)\log x - \left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)'(0) - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-2n}}{n^2}$$
segue che
$$\left|\sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho^2}\right| \leq \sum_\rho \frac{x^\beta}{|\rho|^2}$$

Ma allora
$$\frac{\psi_1(x)-x}{x} \ll \sum_\rho \frac{x^{\beta-1}}{|\rho|^2}$$
Facendo il limite si ottiene
$$\lim_{x\to+\infty} \sum_\rho \frac{x^{\beta-1}}{|\rho|^2} = \sum_\rho \frac{1}{|\rho|^2} \lim_{x\to+\infty} x^{\beta-1} = 0$$
in quanto per il Teorema di Hadamard gli zeri di ζ hanno $\beta < 1$. □

Proposizione 7.25. *Vale*
$$\psi(x) = x + o(x)$$

Dimostrazione. Si utilizza un ragionamento tauberiano che permette di passare dalla stima asintotica su ψ_1 alla stessa stima valida per ψ. Questo ragionamento si basa essenzialmente sul fatto che $\psi(x)$ è una funzione crescente.
Sia quindi h (tale che $0 < h < \frac{x}{2}$ (con $x > 2$)).
Osserviamo che
$$\int_{x-h}^{x} \frac{\psi(t)}{t} dt \leq \int_{x-h}^{x} \frac{\psi(x)}{x-h} dt = \psi(x)\frac{h}{x-h}$$
$$\int_{x}^{x+h} \frac{\psi(t)}{t} dt \geq \int_{x}^{x+h} \frac{\psi(x)}{x+h} dt = \psi(x)\frac{h}{x+h}$$
ovvero
$$(x-h)\frac{\psi_1(x-h)-\psi_1(x)}{-h} \leq \psi(x) \leq (x+h)\frac{\psi_1(x+h)-\psi_1(x)}{h}$$
Siccome sappiamo che
$$\psi_1(y) \sim y$$
se applichiamo questa relazione ad entrambi i membri della relazione sopra abbiamo
$$(x-h)\frac{\psi_1(x-h)-\psi_1(x)}{-h} \sim (x-h)\frac{x-h-x}{-h} = x-h$$
$$(x+h)\frac{\psi_1(x+h)-\psi_1(x)}{h} \sim (x+h)\frac{x+h-x}{h} = x+h$$
Scegliendo ora $h = o(x)$ abbiamo che $x \pm h \sim x$ e quindi
$$x \sim f(x) \leq \psi(x) \leq g(x) \sim x$$
e quindi
$$\psi(x) \sim x$$
□

Teorema 7.26. ***(Landau)***
Sia

$$\zeta(s) \ll \left(e^{\phi(t)}\right)$$

per $t \to \infty$ *nella regione*

$$1 - \theta(t) \leqslant \sigma \leqslant 2 \quad (t \geqslant 0)$$

dove $\phi(t)$ *e* $\frac{1}{\theta(t)}$ *sono funzioni positive non decrescenti di* t *per* $t \geqslant 0$ *tali che*

$$\theta(t) \leqslant 1$$

$$\phi(t) \to \infty$$

$$\frac{\phi(t)}{\theta(t)} = o\left(e^{\phi(t)}\right)$$

Allora esiste una costante A_1 *tale che la funzione* $\zeta(s)$ *non ha zeri nella regione*

$$\sigma \geqslant 1 - A_1 \frac{\theta(2t+1)}{\phi(2t+1)}$$

Osservazione 7.27. *In particolare sappiamo che possiamo prendere* $\phi(t) = c_0 \log t$ $(\zeta(s) \ll |t|)$ *in quanto vale per* $\theta(t) = \frac{1}{2}$*. In tal caso*

$$\beta < 1 - \frac{1}{2c_0 \log(t+2)}$$

Se $\theta(t) = \frac{1}{2}$ *allora* $\phi(t) = \log(t+2)$*.*

Ci sono stati ulteriori miglioramenti:

- **Littlewood**

$$\theta(t) = \frac{(\log\log t)^2}{\log t}$$

$$\phi(t) = A \log\log t$$

ed in questa zona si riesce a dimostrare che

$$\zeta(s) \ll (\log t)^A$$

In tal caso diventa

$$\beta < 1 - \frac{c \log t}{\log\log t}$$

- **Vinogradov**
  Si prende
$$\theta(t) = \frac{A}{(\log t)^{\frac{2}{3}-2\varepsilon}}$$
$$\phi(t) = (\log t)^{\varepsilon}$$
  Allora
$$\zeta(s) \ll \exp((\log t)^{\varepsilon})$$
  nella regione
$$\beta < 1 - \frac{c}{(\log t)^{\frac{2}{3}-\varepsilon}}$$

7.4 Somme esponenziali

Ci sono quattro tipi di somme esponenziali

- la prima è
$$\sum_{N<n\leq 2N} e^{2\pi i\alpha n} \ll \frac{1}{||\alpha||}$$
  dove
$$||\alpha|| = \min\{|\alpha - n||n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$
- la seconda (**Vinogradov**) è
$$\sum_{N<n\leq 2N} \Lambda(n)e^{2\pi i\alpha n} \ll \left(\frac{N}{\sqrt{q}} + \sqrt{Nq} + N^{\frac{4}{5}}\right)(\log N)^4$$
  dove
$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2} \quad (a,q) = 1$$
  Da questa segue il teorema dei tre primi di Vinogradov per cui ogni intero dispari è somma di tre primi (poi migliorato da Vaughn)
- la terza (**Vinogradov**) è
$$\sum_{N<n\leq 2N} n^{-it}$$
  Da ciò seguono le stime per $\zeta(\sigma + it)$ quando $1 - \sigma \ll \frac{1}{(\log T)^{\frac{2}{3}-\varepsilon}}$
- la quarta è
$$\sum_{N<n\leq 2N} \frac{\Lambda(n)}{n^{it}}$$

L'ultimo tipo di somma è particolarmente difficile da trattare perchè $\Lambda(n)$ non è monotona e n^{-it} è un esponenziale moltiplicativo.
Usando il suo metodo per minorare somme di potenze di numeri complessi, Turan dimostrò che una stima non banale per queste somme implica la Q.R.H. per la funzione ζ. Tuttavia nessuno è mai riuscito ad ottenere stime non banali per esse.

Capitolo 8

Caratteri di Dirichlet e funzioni L

8.1 Prime definizioni e il Teorema di Dirichlet

Consideriamo $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$. Questo gruppo ha $\phi(q)$ elementi.

Definizione 8.1. *Si dice che χ_q è un* ***carattere di Dirichlet modulo q*** *se è un omomorfismo*

$$(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^* \longrightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$$

Osservazione 8.2. *I caratteri modulo q sono i caratteri del gruppo abeliano $(\mathbb{Z}_{/q\mathbb{Z}})^*$.*

Definizione 8.3. *L'identità nel gruppo dei caratteri è detta* ***carattere principale*** *modulo q ed è la seguente:*

$$\chi_0(n) = \begin{cases} 1 & (n, q) = 1 \\ 0 & (n, q) > 1 \end{cases}$$

Le principali proprietà dei caratteri di Dirichlet sono le seguenti:

- ci sono $\phi(q)$ caratteri modulo q
- $\chi^{-1}(n) = \bar{\chi}(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- si possono estendere su tutto $\mathbb{Z}$, ottendendo le funzioni aritmetiche $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ che sono q-periodiche
- $\chi_q(nm) = \chi_q(n)\chi_q(m) \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}$
- $|\chi(n)| \leq 1$, ovvero $|\chi(n)| = 1$ se $(n, q) = 1$ oppure $|\chi(n)| = 0$ se $(n, q) > 1$, ovvero χ sono funzioni completamente moltiplicative
- $\chi_q\chi'_q(n) = \chi_q(n)\chi'_q(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$
- $\chi_q(n + kq) = \chi_q(n) \quad \forall n, k \in \mathbb{Z}$

- Siccome $\chi_q^2(-1) = \chi_q((-1)^2) = \chi_q(1) = 1$ allora $\chi_q(-1) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$
- $\sum_1^q \chi(n) = 0 \quad \forall \chi \neq \chi_0$

Definizione 8.4. *Un carattere χ_q è detto* ***pari*** *se $\chi_q(-1) = 1$ mentre è detto* ***dispari*** *se $\chi_q(-1) = -1$.*

Vediamo ora la definizione algebrica di carattere di Dirichlet.

- Prendiamo una potenza di un primo dispari, ovvero p^a con $p > 2$ primo e $a \geq 1$. Sappiamo che il gruppo $(\mathbb{Z}_{/p^a\mathbb{Z}})^*$ è ciclico, ovvero
$$< g >= (\mathbb{Z}_{/p^a\mathbb{Z}})^*$$
Sia poi $\omega = e^{\frac{2\pi i m}{\phi(p^a)}}$ tale che
$$\omega^{\phi(p^a)} = 1$$
dove ricordiamo che
$$\phi(p^a) = p^{a-1}(p-1)$$
Quindi la scelta di ω è pari al numeri di caratteri di Dirichlet.
Prendo ora n e calcolo $\chi_{p^a}(n)$. Abbiamo
$$\chi_{p^a}(n) = \omega^{\nu(n)} = e^{\frac{2\pi i m \nu(n)}{\phi(p^a)}}$$
dove $\nu(n)$ è tale che
$$g^\nu = [n]_{p^a}$$
- Nel caso in cui invece $p = 2$ abbiamo che $(\mathbb{Z}_{/2^a\mathbb{Z}})^*$ è ciclico se e solo se $a = 1, 2$. In particolare
  - se $a = 1$ allora $(\mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}})^*$ ha un solo carattere, detto **carattere principale**, essendo $\phi(2) = 1$ e
  $$\chi_2(n) = \chi_0(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$
  - se $a = 2$ allora $(\mathbb{Z}_{/2^2\mathbb{Z}})^* = (\mathbb{Z}_{/4\mathbb{Z}})^*$ ha due caratteri in quanto $\phi(4) = 2$, ovvero:
    - se $\omega = 1$ allora abbiamo χ_0
    - se $\omega = -1 = e^{\frac{2\pi i}{2}}$ allora
    $$\chi_4(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \equiv 1 \ (4) \\ -1 & \text{se } n \equiv 3 \ (4) \\ 0 & \text{se n pari} \end{cases}$$

– se $a \geq 3$ allora $(\mathbb{Z}_{/2^a\mathbb{Z}})^* \cong \mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}_{/2^{a-2}\mathbb{Z}}$. In questo caso non esiste una radice primitiva modulo 2^a, perciò siccome ogni n modulo 2^a si può scrivere come

$$n = (-1)^{\nu} 5^{\nu'}$$

dove ν è definito modulo 2 e ν' è definito modulo 2^{a-2}. Come conseguenza si definisce il carattere

$$\chi(n) = \omega^{\nu} (\omega')^{\nu'}$$

dove

$$\omega^2 = 1 \qquad (\omega')^{2^{a-2}} = 1$$

Il numero di caratteri in questo caso è $\phi(2^a) = 2^{a-1}$.

- Nel caso generale con $q = 2^a p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots$, dato $(n,q) = 1$ il carattere è definito come

$$\chi(n) = \chi\left(n; 2^a\right) \chi\left(n; p_1^{a_1}\right) \chi\left(n; p_2^{a_2}\right) \dots$$

mentre se $(n,q) > 1$ allora $\chi(n) = 0$.
Il numero totale di caratteri modulo q è pari a

$$\phi\left(2^{\alpha}\right) \phi\left(p_1^{\alpha_1}\right) \phi\left(p_2^{\alpha_2}\right) \dots = \phi(q)$$

I diversi caratteri sono funzioni aritmetiche distinte e ognuna di esse è una funzione periodica e moltiplicativa di n.
In particolare, il carattere che associa il valore 1 ad ogni n tale che $(n,q) = 1$ è detto **carattere principale** e si indica con χ_0.
I caratteri modulo un certo q dato formano un gruppo rispetto alla moltiplicazione con il carattere principale come elemento neutro (unità). Questo gruppo, che ha $\phi(q)$ elementi è infatti isomorfo al gruppo moltiplicativo delle classi di resto relativamente prime $(\bmod q)$.
L'isomorfismo si può dimostrare più facilmente riscrivendo la definizione di $\chi(n)$ il termini della funzione esponenziale complessa.
Per il modulo p^a abbiamo

$$\omega = e^{2\pi i m/\phi(p^a)} = e\left[m/\phi\left(p^a\right)\right]$$

e scelte diverse di ω corrispondo a scelte diverse dell'intero m modulo p^a (e quindi corrispondono a caratteri diversi). Quindi

$$\chi\left(n; p^a\right) = e\left[\frac{m\nu}{\phi\left(p^a\right)}\right]$$

dove ν è l'indice di n relativo a una particolare radice primitiva di p^a.
Nel caso 2^a, abbiamo

$$\chi\left(n; 2^a\right) = e\left(\frac{m\nu}{2} + \frac{m'\nu'}{2^{a-2}}\right)$$

dove $n \equiv (-1)^{\nu} 5^{\nu'} \pmod{2^a}$.
Mettendo insieme queste formule otteniamo che

$$\chi(n) = e\left[\frac{m_0\nu_0}{2} + \frac{m_0'\nu_0'}{2^{a-2}} + \frac{m_1\nu_1}{\phi\left(p_1^{a_1}\right)} + \frac{m_2\nu_2}{\phi\left(p_2^{a_2}\right)} + \cdots\right]$$

per $(n,q)=1$, dove $m_0, m_0', m_1, m_2 \ldots$ sono interi che assumono tutti i valori modulo i corrispondenti denominatori.

Esistono poi due importanti relazioni dette **relazioni di ortogonalità**:

$$\frac{1}{\phi(q)}\sum_{n=1}^{q}\chi_q(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } \chi_q \neq \chi_0 \\ 1 & \text{se } \chi_q = \chi_0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi(\bmod q)}\chi(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \equiv 1 \bmod q \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Corollario 8.5. *Se $n \equiv a \mod q$ e $(a,q)=1$ allora*

$$\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi \bmod q}\chi(n)\bar{\chi}(a) = \begin{cases} 1 & \textit{se } n \equiv a \bmod q \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Dimostrazione. Siccome $na^{-1} \equiv 1 \mod q$ allora

$$\chi(na^{-1}) = \chi(n)\chi(a^{-1}) = \chi(n)(\chi(a))^{-1} = \chi(n)\bar{\chi}(a)$$

□

Definizione 8.6. *A ogni carattere χ_q di Dirichlet associamo una funzione, che chiameremo* ***funzione L di Dirichlet associata al carattere****, espressa in termini di serie di Dirichlet:*

$$L(s,\chi_q) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\chi_q(n)}{n^s}$$

dove $s = \sigma + it$ è una variabile complessa con $\sigma > 1$.

Osserviamo che:

- $\sigma > 1$ ho convergenza assoluta
- $\sigma \geq \sigma_0 > 1$ ho convergenza totale

Se in particolare $\chi = \chi_0$ allora

$$L(s,\chi_0) = \sum_{(n,q)=1}\frac{1}{n^s}$$

Definizione 8.7. *Sia χ un carattere modulo q, con $\chi \neq \chi_0$. Si dice* ***funzione** L **relativa al carattere*** χ *la somma della seguente serie:*

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

dove $s = \sigma + it$ è una variabile complessa con $\sigma > 1$.

Osservazione 8.8. *La serie converge assolutamente per $\sigma > 1$.*

Proposizione 8.9. *Se $\chi \neq \chi_0$ la serie converge uniformemente per $\sigma \geq \varepsilon > 0$.*

Dimostrazione. Supponiamo $\sigma > 1$.

$$\sum_{n \leq N} \frac{\chi(n)}{n^s} = \left(\sum_{n \leq N} \chi(n) \right) N^{-s} + s \int_1^N \left(\sum_{n \leq u} \chi(n) \right) \frac{du}{u^{s+1}}$$

Siccome $\chi \neq \chi_0$, segue dalla relazione

$$\sum_n \chi(n) = \begin{cases} \phi(q) & \text{se } \chi = \chi_0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

che $\sum \chi(n)$ su ogni q interi consecutivi è zero e quindi

$$\left| \sum_{n \leq N} \chi(n) \right| \leq q$$

ovvero $\sum_{n \leq N} \chi(n)$ è una funzione limitata in N.
Facendo allora il limite nella relazione precedente per $N \to \infty$ si ottiene che

$$L(s,\chi) = s \int_1^{\infty} \left(\sum_{n \leq u} \chi(n) \right) \frac{du}{u^{s+1}}$$

che converge per $\sigma > 0$ essendo l'esponente di u pari a $s+1$.
Segue che si ha convergenza uniforme per $\sigma \geq \varepsilon > 0$.
Inoltre l'ultimo integrale fornisce un prolungamento analitico di $L(s,\chi)$ come funzione regolare per $\sigma > 0$. $\square$

Osservazione 8.10. *Come conseguenza $L(s,\chi)$ è una funzione olomorfa per $\sigma > 0$. (quindi ho il prolungamento analitico fino a zero) e inoltre si ha una stima di $q|s|/\sigma$.*

Osservazione 8.11. *Sia $\chi = \chi_0$ e considero la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_0(n)}{n^s}$$

allora $\sum_{n\leq N}\chi_0(n)$ *si maggiora con*

$$\left[\frac{N}{q}\right]\phi(q)+\phi(q)=\left(\left[\frac{N}{q}\right]+1\right)\phi(q)$$

Segue che la convergenza assoluta per $\sigma>1$ *non corrisponde ad una convergenza uniforme per* $\sigma\geq\varepsilon$.

Teorema 8.12. ***(Identità di Eulero)***
Data s *variabile complessa con parte reale* $\sigma>1$ *vale:*

$$L(s,\chi)=\prod_p\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

In particolare se $\chi=\chi_0$ *allora*

$$L(s,\chi_0)=\prod_{p\nmid q}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)=\zeta(s)\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)$$

da cui segue che $L(s,\chi_0)$ *è meromorfa su* $\mathbb{C}$ *con un polo semplice in* $s=1$ *e residuo*

$$\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{\phi(q)}{q}$$

Dimostrazione. Cominciamo dapprima a considerare $L\left(s,\chi_0\right)$. Siccome

$$L(s,\chi_0)=\zeta(s)\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)$$

allora basta considerare la funzione $\zeta(s)$.
Trasformiamo la definizione

$$\zeta(s)=\sum_n\frac{1}{n^s}$$

che vale per $\sigma>1$ in una nuova forma che vale più in generale per $\sigma>0$.
Usando la sommazione parziale vale

$$\begin{aligned}\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}&=\sum_{n=1}^{\infty}n\left[n^{-s}-(n+1)^{-s}\right]\\&=s\sum_{n=1}^{\infty}n\int_n^{n+1}x^{-s-1}dx\\&=s\int_1^{\infty}[x]x^{-s-1}dx\end{aligned}$$

Ponendo ora $[x] = x - \{x\}$, dove $\{x\}$ è la parte frazionaria di x, si ottiene

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx$$

L'integrale è assolutamente convergente per $\sigma > 0$ e converge uniformemente per $\sigma \geq \delta > 0$, quindi rappresenta una funzione regolare di s per $\sigma > 0$.
Segue che $\zeta(s)$ è meromorfa per $\sigma > 0$, il cui unico polo è un polo semplice in $s = 1$ con residuo 1. Da ciò segue che lo stesso vale per $L(s, \chi_0)$ tranne per il fatto che in questo caso il residuo è

$$\prod_{p|q}\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{\phi(q)}{q}$$

□

Osservazione 8.13. *Gli zeri della funzione $L(s, \chi_0)$ non sono solo quelli della funzione $\zeta(s)$ ma anche quelli per cui $p^{-s} = 1$ ovvero $t = \frac{2k\pi}{\log p}$ con $p|q$.*

Teorema 8.14. ***(Teorema di Dirichlet)***
Esistono infiniti primi $p \equiv a \pmod{q}$, e la serie $\sum \frac{1}{p}$ con la somma fatta su questi primi è divergente.

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che $L(s, \chi) \neq 0$ per $s > 1$.
Inoltre dall'identità di Eulero si ottiene che

$$\log L(s, \chi) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi\left(p^m\right)}{mp^{ms}}$$

da cui

$$\frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi} \bar{\chi}(a) \log L(s, \chi) = \sum_{\substack{p \\ p^m \equiv a (\bmod q)}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms}}$$

Tuttavia per $s \to 1^+$ vale

$$\sum_{\substack{p \\ p^m \equiv a (\bmod q)}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms}} = \sum_{p \equiv a (\bmod q)} \frac{1}{p^s} + O(1)$$

Quindi dimostrare che

$$\sum_{p \equiv a (\bmod q)} \frac{1}{p^s}$$

diverge per $s \to 1^+$ equivale a dimostrare che

$$\sum_{\substack{p \\ p^m \equiv a (\bmod q)}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms}}$$

tende a $+\infty$ per $s \to 1^+$.
In particolare il termine corrispondente al carattere principale χ_0 è

$$\frac{1}{\phi(q)} \log L\left(s, \chi_0\right)$$

Per la formula di Eulero sappiamo che

$$L(s, \chi_0) = \zeta(s) \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

quindi $\log L\left(s, \chi_0\right) \to +\infty$ per $s \to 1^+$.
Basta quindi mostrare che per $\chi \neq \chi_0,\ \log L(s, \chi)$ è limitato per $s \to 1$ e mostrare questo è equivalente a mostrare che $L(1, \chi) \neq 0$.
Abbiamo due casi:

- se χ è un carattere complesso, ovvero un carattere i cui valori non sono tutti valori reali, ovvero $\bar{\chi} \neq \chi$ allora $L(1, \chi) \neq 0$ in quanto vale la seguente disuguaglianza:

  $$\prod_{\chi} |L(s, \chi)| \geq 1 \quad \text{ per } s > 1$$

  Questa disuguaglianza è vera in quanto basta porre $a = 1$ nell'equazione

  $$\frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi} \bar{\chi}(a) \log L(s, \chi) = \sum_{\substack{p \\ p^m \equiv a (\bmod q)}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms}}$$

  Infatti, posto $a = 1$, otteniamo

  $$\sum_{\chi} \bar{\chi}(1) \log L(s, \chi) = \sum_{\chi} \log L(s, \chi) = \phi(q) \sum_{\substack{p \\ p^m \equiv 1 (\bmod q)}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms}}$$

  Osserviamo che $(s \in \mathbb{R},\ s > 1)$ $\log L(s, \chi)$ è reale e > 0, quindi

  $$\log L(s, \chi) = \log |L(s, \chi)|$$

  e perciò

  $$\prod_{\chi} |L(s, \chi)| \geq 1 \quad \text{ per } s > 1$$

  Segue che se per assurdo $L(1, \chi) = 0$ allora anche $L(1, \bar{\chi}) = 0$, quindi

  $$\lim_{s \to 1^+} \prod_{\chi} |L(s, \chi)| = 0$$

  ma questo è in contraddizione col fatto che

  $$\prod_{\chi} |L(s, \chi)| \geq 1 \quad \text{ per } s > 1$$

- Se $\chi \neq \chi_0$ è un carattere reale diverso dal carattere principale, per dimostrare che $L(1,\chi) \neq 0$ Dirichlet utilizzò la formula del numero di classi, ma qui riportiamo invece una dimostrazione data da de la Vallèe Poussin in cui fa uso della teoria delle funzioni complesse.
  Innanzitutto richiamiamo alcuni risultati dimostrati precedentemente riguardo alle funzioni L di Dirichlet viste come funzioni in una variabile complessa s.
  Poniamo innanzitutto $s = \sigma + it$. Ricordiamo che la serie che definisce $L(s,\chi)$ è assolutamente convergente rispetto ad s per $\sigma > 1$ e uniformemente convergente rispetto a s per $\sigma \geq 1+\delta$ per ogni δ positivo. Quindi le funzioni L sono definite per $\sigma > 1$ e sono funzioni regolari in s per $\sigma > 1$. In realtà abbiamo visto chd ognuna di esse può essere prolungata analiticamente in modo che sia regolare per $\sigma > 0$, con l'unica eccezione che $L\left(s,\chi_0\right)$ ha un polo semplice in $s = 1$.
  Supponiamo ora per assurdo che χ sia un carattere reale non principale mod$q$ e che $L(1,\chi) = 0$. Allora $L(s,\chi)$ ha uno zero in $s = 1$ e il prodotto

  $$L(s,\chi)L\left(s,\chi_0\right)$$

  è regolare in $s = 1$, quindi è regolare per $\sigma > 0$.
  Siccome $L\left(2s,\chi_0\right)$ è regolare e non nullo per $\sigma > \frac{1}{2}$, allora la funzione

  $$F(s) = \frac{L(s,\chi)L\left(s,\chi_0\right)}{L\left(2s,\chi_0\right)}$$

  è regolare per $\sigma > \frac{1}{2}$.
  Osserviamo inoltre che $F(s) \to 0$ per $s \to \left(\frac{1}{2}\right)^{+}$ in quanto $L\left(2s,\chi_0\right) \to +\infty$ (infatti $L\left(2s,\chi_0\right)$ si comporta come $\zeta(2s)$).

La formula del prodotto di Eulero per $F(s)$ diventa

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{L(s,\chi)L\left(s,\chi_0\right)}{L\left(2s,\chi_0\right)} = \\
&= \prod_p \frac{\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}\left(1-\frac{\chi_0(p)}{p^s}\right)^{-1}}{\left(1-\frac{\chi_0(p)}{p^{2s}}\right)^{-1}} = \\
&= \prod_{p\nmid q} \frac{\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}}{\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1}} = \\
&= \prod_{\chi(p)=1} \frac{\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}}{\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1}} = \\
&= \prod_{\chi(p)=1} \frac{1+\frac{1}{p^s}}{1-\frac{1}{p^s}} = \\
&= \prod_{\chi(p)=1} \frac{p^s+1}{p^s-1} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}
\end{aligned}
$$

con $a_n \geq 0,\ a_1 = 1$ $(\sigma > 1)$, in quanto i fattori con $\chi(p) = -1$ nel prodotto di Eulero diventano

$$\frac{\left(1+p^{-s}\right)^{-1}\left(1-p^{-s}\right)^{-1}}{\left(1-p^{-2s}\right)^{-1}} = 1$$

Osserviamo che la formula

$$F(s) = \prod_{\chi(p)=1} \left(\frac{1+p^{-s}}{1-p^{-s}}\right)$$

vale per $\sigma > 1$. Se non esistessero primi con $\chi(p) = 1$ dovremmo avere $F(s) = 1$ per ogni $\sigma > 1$, e quindi per prolungamento analitico per ogni $\sigma > \frac{1}{2}$. Tuttavia questo è in contraddizione col fatto che $F(s) \to 0$ per $s \to \frac{1}{2}$.
Il prodotto può essere scritto in serie di Dirichlet come:

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

dove $a_n \geq 0$ e $a_1 = 1$. Tuttavia, come già sappiamo, questa serie è ben definita solo per $\sigma > 1$.
Siccome $F(s)$ è regolare per $\sigma > \frac{1}{2}$, ha un'espansione in serie di potenze di $s-2$

con un raggio di convergenza di almeno $\frac{3}{2}$. Questa serie di potenze (sviluppo di Taylor di F centrato in 2) è

$$F(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{F^{(m)}(2)}{m!}(s-2)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{m!}(2-s)^m$$

dove

$$F^{(m)}(2) = (-1)^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (\log n)^m}{n^2} = (-1)^m b_m$$

con $b_m \geq 0$. Quindi

$$F(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{m!}(2-s)^m$$

e questo vale per $|2-s| < \frac{3}{2}$.
Se $\frac{1}{2} < s < 2$, allora siccome tutti i termini sono non negativi abbiamo che

$$F(s) \geq F(2) \geq 1$$

(ho troncato Taylor con $m = 0$) e questo contraddice il fatto che $F(s) \to 0$ per $s \to \left(\frac{1}{2}\right)^+$.
Quindi l'ipotesi che $L(1, \chi) = 0$ è un assurdo.

Abbiamo così dimostrato il Teorema di Dirichlet. $\square$

8.2 Caratteri primitivi

Sia $\chi(n)$ un qualunque carattere modulo q diverso dal carattere principale.
Sappiamo che se $(n, q) > 1$, allora $\chi(n) = 0$; se $(n, q) = 1$, allora $\chi(n) \neq 0$ essendo una radice dell'unità, ed è una funzione periodica di n con periodo q. E' possibile tuttavia che per alcuni valori di n che soddisfano la condizione $(n, q) = 1$, la funzione $\chi(n)$ potrebbe avere un periodo minore di q. I caratteri χ che presentano questa situazione vengono detti **non primitivi**. In caso contrario il carattere χ è detto **primitivo**.
Sia ora $\chi(n)$ un carattere non principale modulo q che non è primitivo e sia q_1 il suo periodo più piccolo. Allora $q_1 < q$; ma vale anche $q_1 > 1$, altrimenti dovremmo avere $\chi(n) = \chi(1) = 1$ per ogni n tale che $(n, q) = 1$, in contraddizione con l'ipotesi per cui χ non è il carattere principale.
Inoltre, q_1 è un fattore di q, in quanto se q e q_1 sono periodi allora anche (q, q_1) lo è, e perciò questo numero non può essere minore di q_1 (abbiamo supposto che q_1 sia il periodo di valore minimo).

Proposizione 8.15. *Dato un carattere non primitivo χ modulo q, esistono un fattore proprio q_1 di q e un carattere primitivo χ_1 modulo q_1 tale che*

$$\chi(n) = \begin{cases} \chi_1(n) & \textit{se } (n, q) = 1 \\ 0 & \textit{se } (n, q) > 1 \end{cases}$$

*In tal caso si dice che χ_1 **induce** χ e q_1 si dice **conduttore** di χ modulo q.*

Dimostrazione. Cominciamo innanzitutto col definire $\chi_1(n)$. Prendiamo:

- se $(n,q)=1$ allora prendiamo $\chi_1(n)=\chi(n)$
- se $(n,q_1)=1$ ma $(n,q)>1$ allora scegliamo un intero t tale che

  $$(n+tq_1,q)=1$$

  e definiamo

  $$\chi_1(n)=\chi\left(n+tq_1\right)$$

  Questo intero t esiste in quanto basta avere

  $$(n+tq_1,r)=1$$

  dove r (che è diverso da $q/(q,q_1)$) è il prodotto delle potenze di primi che dividono q e che sono relativamente prime con q_1.
  La particolare scelta di t non è rilevante in quanto il valore di $\chi(n+tq_1)$ sarà lo stesso
- se $(n,q_1)>1$ allora poniamo $\chi_1(n)=0$

Osserviamo che $\chi_1(n)$ è periodica con periodo q_1 e la sua proprietà moltiplicativa segue facilmente da quella di $\chi(n)$.
Inoltre, $\chi_1(n)$ non è sempre nullo quando $(n,q_1)=1$ in quanto $\chi_1(1)=\chi(1)=1$. Segue che è uno dei $\phi\left(q_1\right)$ caratteri modulo q_1.
Inoltre, i valori di $\chi_1(n)$ quando $(n,q_1)=1$ includono i valori di $\chi(n)$ quando $(n,q)=1$ e quindi non possono essere periodici con periodo minore di q_1 e nemmeno possono essere tutti 1.
Segue che $\chi_1(n)$ è un carattere primitivo modulo q_1. $\square$

E' ovvio che se sono dati q_1 e χ_1 e q è un qualsiasi multiplo proprio di q_1, la definizione sopra di χ forma un carattere $(\bmod q)$.

Esempio 8.16. *Un esempio di carattere non primitivo è il simbolo di Legendre* $\left(\frac{n}{p}\right)$ *che è un carattere non primitivo* $(\bmod p^{\alpha})$ *se* $\alpha>1$*, essendo indotto dallo stesso carattere* $(\bmod p)$ *ma questo è un caso particolarmente semplice in quanto in questo caso le condizioni* $(n,q)=1$ *e* $(n,q_1)=1$ *sono la stessa cosa.*
Ancora, il simbolo di Legendre $\left(\frac{n}{p_1}\right)$ *induce un carattere non primitivo modulo* p_1p_2 *(dove* $p_2\neq p_1$*) definito nel seguente modo:*

$$\chi(n)=\begin{cases}\left(\frac{n}{p_1}\right) & \text{se } (n,p_1p_2)=1\\ 0 & \text{se } (n,p_1p_2)>1\end{cases}$$

Sappiamo già che ogni carattere $(\bmod q)$ è rappresentabile come

$$\chi(n)=\chi\left(n;p_1^{\alpha_1}\right)\chi\left(n;p_2^{\alpha_2}\right)\dots$$

dove $q = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots$, e i caratteri nel membro di destra sono caratteri rispetto ai corrispondenti moduli indicati. (qui supponiamo che p_1 sia 2.)
Si osserva che χ è primitivo se e solo se ognuno dei caratteri a destra è primitivo. Se χ non è primitivo allora uno o più caratteri a destra sono principali oppure non primitivi. In quest'ultimo caso

$$\chi\left(n; p^{\alpha}\right) = \chi\left(n; p^{\beta}\right)$$

dove $1 \leq \beta < \alpha$.
Allora q_1 è il prodotto delle potenze di primi $p_i^{\beta_i}$, e χ_1 è il prodotto dei caratteri $\chi\left(n; p_i^{\beta_i}\right)$, omettendo però ogni fattore che sia un carattere principale.
Esprimendoli in termini della funzione esponenziale complessa come visto all'inizio, un carattere è primitivo se e solo se tutti gli m_i sono relativamente primi rispetto ai corrispondenti p_i (con una modifica per m_0 e m_0' a seconda che $\alpha > 2$ o $\alpha = 2$).
La relazione

$$\chi(n) = \begin{cases} \chi_1(n) & \text{se } (n,q) = 1 \\ 0 & \text{se } (n,q) > 1 \end{cases}$$

tra un carattere non primitivo χ e il carattere primitivo χ_1 che lo induce implica una semplice relazione tra le rispettive funzioni L.
Infatti per la formula del prodotto di Eulero vale

$$\begin{aligned} L(s,\chi) &= \prod_{p \nmid q} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} = \\ &= \prod_{p \nmid q} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)^{-1} = \\ &= \prod_{p} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \mid q} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}\right) = \\ &= L(s,\chi_1) \prod_{p \mid q} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}\right) \end{aligned}$$

Questo ragionamento è valido solo per $\sigma > 1$, dove i prodotti infiniti convergono. Tuttavia, per prolungamento analitico il risultato resta vero per $\sigma > 0$, anzi per ogni s come vedremo dopo.
In particolare $L\left(1,\chi_1\right) \neq 0$ implica che $L(1,\chi) \neq 0$.

8.3 Somme di Gauss

Definizione 8.17. *Sia χ un carattere modulo q. Si definisce **somma di Gauss relativa al carattere** χ la seguente:*

$$\tau(\chi) = \sum_{m=1}^{q} \chi(m) e^{\frac{2\pi i m}{q}} = \sum_{m=1}^{q} \chi(m) e_q(m)$$

dove $e_q(m) = e^{\frac{2\pi i m}{q}}$.

Osservazione 8.18. *Se* $(n,q) = 1$ *allora*

$$\begin{aligned}\chi(n)\tau(\bar{\chi}) &= \sum_{m=1}^{q} \bar{\chi}(m)\chi(n)e_q(m) \\ &= \sum_{h=1}^{q} \bar{\chi}(h)e_q(nh)\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che

$$mn^{-1} = h \in \mathbb{Z}_{/q\mathbb{Z}} \Leftrightarrow m \equiv nh \pmod{q} \Leftrightarrow \chi(n)\bar{\chi}(m) = \chi(n)\bar{\chi}(nh) = \bar{\chi}(h)$$

Quindi, avendo supposto che $(n,q) = 1$ *e* $\tau(\chi) \neq 0$ *si ha che*

$$\chi(n) = \frac{1}{\tau(\bar{\chi})} \sum_{h=1}^{q} \bar{\chi}(h)e_q(nh)$$

Proposizione 8.19. *Se* χ *è un carattere primitivo modulo* q *allora*

$$\chi(n)\tau(\bar{\chi}) = \sum_{h=1}^{q} \bar{\chi}(h)e_q(nh)$$

vale anche per $(n,q) > 1$.

Dimostrazione. Innanzitutto poniamo

$$\frac{n}{q} = \frac{n_1}{q_1}$$

dove $(n_1, q_1) = 1$ e $q_1 \mid q$, $q_1 < q$. Possiamo inoltre supporre che $q_1 > 1$, siccome la relazione è banalmente vera se n è un multiplo di q.
Dobbiamo quindi dimostrare che

$$\sum_{h=1}^{q} \bar{\chi}(h)e\left(n_1 h/q_1\right) = 0$$

Innanzitutto scriviamo $q = q_1 q_2$ e poniamo $h = uq_1 + v$, dove

$$0 \le u < q_2, \quad 1 \le v \le q_1$$

Allora l'esponenziale dipende solo da v, e perciò basterà provare che

$$\sum_{u=0}^{q_2-1} \bar{\chi}\left(uq_1 + v\right) = 0$$

per ogni v.
Vista come una funzione di v, l'ultima somma, che chiamiamo $S(v)$, è periodica con periodo q_1, in quanto sostituire v con $v+q_1$ equivale a cambiare l'intervallo di definizione di u in $1 \leq u \leq q_2$ e $u = q_2$ equivale a $u = 0$.
Se c è un qualunque numero che soddisfa

$$(c, q) = 1, \quad c \equiv 1 \,(\bmod q_1)$$

allora

$$\chi(c) S(v) = \sum_{u=0}^{q_2-1} \bar{\chi}\,(c u q_1 + c v) = \sum_{u=0}^{q_2-1} \bar{\chi}\,(u q_1 + c v) = S(v)$$

Usando ora la proprietà caratteristica dei caratteri primitivi per cui se $(n, q) = 1$ allora la funzione $\chi(n)$ non è periodica per un qualsiasi modulo q_1 che è un fattore proprio di q.
Questo implica che esistono interi c_1, c_2 tali che

$$(c_1, q) = (c_2, q) = 1, \quad c_1 \equiv c_2 \,(\bmod q_1)\,, \quad \chi\,(c_1) \neq \chi\,(c_2)$$

Quindi esiste $c \equiv c_1 c_2^{-1}$ tale che

$$(c, q) = 1, \quad c \equiv 1 \,(\bmod q_1)$$

e per il quale vale $\chi(c) \neq 1$.
Segue che $S(v) = 0$ per ogni v. $\square$

Proposizione 8.20. *Dato un carattere primitivo χ vale*

$$|\tau(\chi)| = \sqrt{q}$$

Dimostrazione. Sappiamo che

$$\chi(n)\tau(\bar{\chi}) = \sum_{h=1}^{q} \bar{\chi}(h) e_q(nh)$$

Allora

$$|\chi(n)|^2 |\tau(\chi)|^2 = \sum_{h_1=1}^{q} \sum_{h_2=1}^{q} \bar{\chi}\,(h_1)\,\chi\,(h_2)\, e_q\,[n\,(h_1 - h_2)]$$

Ora facciamo la somma su n ad entrambi i membri, dove n varia nell'insieme di tutti i residui $(\bmod q)$.
Abbiamo quindi

$$\sum_{n \,(\bmod q)} |\chi(n)|^2 |\tau(\chi)|^2$$

$$\sum_{n \,(\bmod q)} \sum_{h_1=1}^{q} \sum_{h_2=1}^{q} \bar{\chi}\,(h_1)\,\chi\,(h_2)\, e_q\,[n\,(h_1 - h_2)] = \sum_{n=1}^{q} \sum_{h=1}^{q} |\chi(h)|^2 = q \sum_{h=1}^{q} |\chi(h)|^2 = q\phi(q)$$

in quanto la somma dei valori di $|\chi(n)|^2$ è $\phi(q)$ e la somma degli esponenziali è zero tranne quando $h_1 \equiv h_2$.
Segue che

$$\phi(q)|\tau(\chi)|^2 = q\sum_h |\chi(h)|^2 = q\phi(q)$$

da cui

$$|\tau(\chi)| = \sqrt{q}$$

□

Proposizione 8.21. *Dato un carattere χ non primitivo modulo q, sia χ_1 il carattere primitivo modulo q_1 che induce χ.*
Allora

$$\tau(\chi) = \mu(r)\chi_1(r)\tau(\chi_1)$$

dove $r = \frac{q}{q_1}$.

Dimostrazione. Osserviamo che

$$\tau(\chi) = \sum_{m=1}^{q} \chi(m)e(m/q) = \sum_{\substack{m=1\\(m,q)=1}}^{q} \chi_1(m)e(m/q)$$

Poniamo poi $q = q_1 r$.
Abbiamo due casi:

- se $(q_1, r) > 1$ allora $\tau(\chi) = 0$.
  Infatti poniamo $D = (q_1, r)$; i valori di m che compaiono nella somma possono essere espressi come
  $$m = m_1 + \frac{tq_1 r}{D}$$
  dove
  $$(m_1, q) = 1, \quad 0 < m_1 \leq \frac{q_1 r}{D}, \quad 0 < t \leq D$$
  Ma allora $\chi_1(m) = \chi_1(m_1)$ in quanto $q_1 r/D$ è un intero multiplo di q_1. Quindi la somma per $\tau(\chi)$ contiene come fattore la somma
  $$\sum_{t=1}^{D} e(t/D)$$
  che è nulla in quanto $D > 1$.

- Sia $(q_1, r) = 1$.
  Possiamo porre
  $$m = uq_1 + vr, \quad \text{dove} \quad 0 < u \leq r, \quad 0 < v \leq q_1$$

Segue che

$$\tau(\chi)=\sum_{\substack{u=1\\(u,r)=1}}^{r}\sum_{\substack{v=1\\(v,q_1)=1}}^{q_1}\chi_1(vr)e\left(\frac{u}{r}+\frac{v}{q_1}\right)=\mu(r)\chi_1(r)\tau\left(\chi_1\right).$$

Abbiamo quindi la tesi. □

8.4 Equazione funzionale generalizzata per la funzione Θ

Proposizione 8.22. *Se $x>0$ e $0\le\alpha\le 1$ si ha*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-\pi n^2x+2\pi in\alpha}=\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-\frac{\pi}{x}(n+\alpha)^2}$$

Dimostrazione. Sia

$$f(\xi)=e^{-\pi\xi^2-2\pi i\alpha\frac{\xi}{\sqrt{x}}}$$

e, preso $x>0$, poniamo

$$f_x(\xi)=f(\xi\sqrt{x})=e^{-\pi\xi^2x-2\pi i\alpha\xi}$$

Osserviamo che $f_x(\xi)\in\mathscr{S}$ e la formula di Poisson implica che

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{(f_x)}(n)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f_x(n)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-\pi n^2x-2\pi in\alpha}$$

(essendo $n\in\mathbb{Z}$, allora abbiamo potuto sostituire $2\pi in\alpha$ con $-2\pi in\alpha$).
D'altra parte

$$\widehat{(f_x)}(\xi)=\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi t^2x-2\pi i\alpha t-2\pi i\xi t}dt$$

da cui derivando e integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned}D\widehat{(f_x)}(\xi)&=-2\pi i\int_{\mathbb{R}}te^{-\pi t^2x-2\pi i\alpha t-2\pi i\xi t}dt=\\&=\frac{i}{x}\int_{\mathbb{R}}d\left(e^{-\pi t^2x}\right)e^{-2\pi i\alpha t-2\pi i\xi t}dt=\\&=-\frac{2\pi}{x}(\xi+\alpha)\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi t^2x-2\pi i\alpha t-2\pi i\xi t}dt=\\&=-\frac{2\pi}{x}(\xi+\alpha)\widehat{(f_x)}(\xi)\end{aligned}$$

Pertanto risolvendo l'equazione differenziale

$$\log\widehat{(f_x)}(\xi)=-\frac{\pi}{x}\left(\xi^2+2\alpha\xi\right)+c_0$$

si ottiene che

$$\widehat{(f_x)}(\xi) = C \exp\left(-\frac{\pi}{x}\left(\xi^2 + 2\alpha\xi\right)\right)$$

con $C \in \mathbb{R}$.
Ma allora segue che

$$\widehat{(f_x)}(-\alpha) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2 x} dt = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\widehat{(f_x)}(-\alpha) = Ce^{\frac{\pi\alpha^2}{x}}$$

Quindi

$$C = \frac{e^{-\frac{\pi\alpha^2}{x}}}{\sqrt{x}}$$

e perciò

$$\widehat{(f_x)}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{\pi}{x}\left(\xi^2+2\alpha\xi+\alpha^2\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{\pi}{x}(\xi+\alpha)^2}$$

da cui

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{(f_x)}(n) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi}{x}(n+\alpha)^2}$$

Andando a sostituire i risultati ottenuti si ottiene la tesi. □

Osservazione 8.23. *L'equazione vale anche per $z = x + iy$ con $x > 0$.*

Proposizione 8.24. *Se $x > 0$ e $0 \leq \alpha \leq 1$ allora*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} ne^{-n^2\pi x+2\pi i\alpha n} = \frac{i}{x\sqrt{x}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (n+\alpha)e^{-\frac{\pi}{x}(n+\alpha)^2}$$

Dimostrazione. Data

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x+2\pi i n\alpha} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi}{x}(n+\alpha)^2}$$

se deriviamo entrambi i membri rispetto ad α (questo passaggio è lecito in quanto la serie derivata converge uniformemente) si ottiene

$$2\pi i \sum_{n\in\mathbb{Z}} ne^{-n^2\pi x+2\pi i\alpha n} = -\frac{2\pi}{x\sqrt{x}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (n+\alpha)e^{-\frac{\pi}{x}(n+\alpha)^2}$$

ovvero

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} ne^{-n^2\pi x+2\pi i\alpha n} = \frac{i}{x\sqrt{x}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (n+\alpha)e^{-\frac{\pi}{x}(n+\alpha)^2}$$

□

8.5 La funzione $\xi(s,\chi)$

Proposizione 8.25. *Sia χ un carattere primitivo modulo q e sia*

$$\xi(s,\chi) = \left(\frac{\pi}{q}\right)^{-\frac{1}{2}(s+a)} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) L(s,\chi)$$

con

$$a = \begin{cases} 0 & se\ \chi(-1) = 1 \\ 1 & se\ \chi(-1) = -1 \end{cases}$$

Allora

$$\xi(1-s,\bar{\chi}) = \frac{i^a q^{\frac{1}{2}}}{\tau(\chi)} \xi(s,\chi)$$

In particolare $\xi(s,\chi)$ è intera e di ordine 1.

Dimostrazione. Sia

$$\chi(n) = \frac{1}{\tau(\bar{\chi})} \sum_{m=1}^{q} \bar{\chi}(m) e(mn/q)$$

L'equazione funzionale di una funzione L assume forme diverse a seconda che $\chi(-1) = 1$ o $\chi(-1) = -1$. Una di queste due uguaglianze deve per forza valere in quanto $\chi(-1)^2 = \chi(1) = 1$.
Vediamo separatamente i due casi:

- **Caso** $\chi(-1) = 1$.
  Sappiamo che

  $$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{s}{2}-1} du$$

  Ponendo

  $$u = \pi n^2 \frac{x}{q}$$

  abbiamo

  $$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{s}{2}-1} du = n^s \left(\frac{q}{\pi}\right)^{-\frac{s}{2}} \int_0^{\infty} e^{-n^2\pi x/q} x^{\frac{s}{2}-1} dx$$

  ovvero

  $$\pi^{-\frac{s}{2}} q^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) n^{-s} = \int_0^{\infty} e^{-n^2\pi x/q} x^{\frac{s}{2}-1} dx$$

  Ma allora moltiplicando per $\chi(n)$ e sommando su n si ottiene

  $$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{q}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) L(s,\chi) &= \left(\frac{\pi}{q}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-n^2\pi x/q} x^{\frac{s}{2}-1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \theta(x,\chi) x^{\frac{s}{2}-1} dx \end{aligned}$$

dove

$$\theta(x,\chi)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\chi(n)e^{-n^2\pi x/q}$$

Inoltre siccome abbiamo visto che

$$\chi(n)=\frac{1}{\tau(\bar{\chi})}\sum_{m=1}^{q}\bar{\chi}(m)e(mn/q)$$

allora

$$\theta(x,\chi)=\frac{1}{\tau(\bar{\chi})}\sum_{m=1}^{q}\bar{\chi}(m)\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-\frac{n^2\pi x}{q}+\frac{2\pi inm}{q}}$$

Ponendo x/q al posto di x e $\alpha=m/q$ nella formula

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-\pi n^2x+2\pi in\alpha}=\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-\frac{\pi}{x}(n+\alpha)^2}$$

otteniamo

$$\begin{aligned}\theta(x,\chi)\tau(\bar{\chi})&=\sum_{m=1}^{q}\bar{\chi}(m)\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-\frac{n^2\pi x}{q}+\frac{2\pi inm}{q}}=\\&=\sqrt{\frac{q}{x}}\sum_{m=1}^{q}\bar{\chi}(m)\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-\pi\left(n+\frac{m}{q}\right)^2\frac{q}{x}}=\\&=\sqrt{\frac{q}{x}}\sum_{m=1}^{q}\bar{\chi}(m)\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-\pi(nq+m)^2\frac{1}{qx}}=\\&=\sqrt{\frac{q}{x}}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\bar{\chi}(l)e^{-\pi\frac{l^2}{qx}}=\\&=\sqrt{\frac{q}{x}}\theta\left(\frac{1}{x},\bar{\chi}\right)\end{aligned}$$

dove abbiamo usato che $\overline{\chi}(m)=\overline{\chi}(m+nq)$ per ogni $n\in\mathbb{Z}$.
Segue che

$$\begin{aligned}\xi(s,\chi)&=\frac{1}{2}\int_0^\infty\theta(x,\chi)x^{\frac{s}{2}-1}dx=\\&=\frac{1}{2}\int_1^\infty\theta(x,\chi)x^{\frac{s}{2}-1}dx+\frac{1}{2}\int_0^1\theta(x,\chi)x^{\frac{s}{2}-1}dx=\\&=\frac{1}{2}\int_1^\infty\theta(x,\chi)x^{\frac{s}{2}-1}dx+\frac{1}{2}\int_1^\infty\theta\left(\frac{1}{x},\chi\right)x^{-\frac{s}{2}-1}dx=\\&=\frac{1}{2}\int_1^\infty\theta(x,\chi)x^{\frac{s}{2}-1}dx+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{q}}{\tau(\bar{\chi})}\int_1^\infty\theta(x,\bar{\chi})x^{\frac{-s-1}{2}}dx\end{aligned}$$

dove nella terza uguaglianza abbiamo usato il cambio di variabile $y = 1/x$ (poi ribattezzato con x) mentre nella quarta uguaglianza abbiamo usato la relazione

$$\theta\left(\frac{1}{x}, \chi\right) = \frac{1}{\tau(\bar{\chi})}\sqrt{qx}\ \theta(x, \bar{\chi})$$

Questa espressione rappresenta una funzione di s che è regolare ovunque e perciò costituisce il prolungamento analitico di $L(s, \chi)$ sull'intero piano ed è regolare ovunque in quanto $\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)$ non è mai 0.
Inoltre, sostituendo s con $1 - s$ e χ con $\bar{\chi}$, l'espressione di sopra diventa

$$\xi(1-s, \bar{\chi}) = \frac{1}{2}\int_1^\infty \theta(x, \bar{\chi}) x^{\frac{1-s}{2}-1} dx + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{q}}{\tau(\chi)}\int_1^\infty \theta(x, \chi) x^{\frac{s}{2}-1} dx$$

Tuttavia

$$\frac{\sqrt{q}}{\tau(\bar{\chi})}\frac{\sqrt{q}}{\tau(\chi)} = \frac{q}{\tau(\bar{\chi})\tau(\chi)} = \frac{q}{|\tau(\chi)|^2} = 1$$

Infatti

$$\tau(\bar{\chi}) = \overline{\tau(\chi)}$$

in quanto

$$\begin{aligned}
\overline{\tau(\bar{\chi})} &= \overline{\sum_{m=1}^{q} \bar{\chi}(m) e^{\frac{2\pi i m}{q}}} = \\
&= \sum_{m=1}^{q} \chi(m) e^{-\frac{2\pi i m}{q}} = \\
&= \sum_{l=-q}^{-1} \chi(-l) e^{\frac{2\pi i l}{q}} = \\
&= \sum_{l=-q}^{-1} \chi(l) e^{\frac{2\pi i l}{q}} = \\
&= \tau(\chi)
\end{aligned}$$

Segue che

$$\xi(1-s, \bar{\chi}) = \frac{1}{2}\int_1^\infty \theta(x, \bar{\chi}) x^{\frac{1-s}{2}-1} dx + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{q}}{\tau(\chi)}\int_1^\infty \theta(x, \chi) x^{\frac{s}{2}-1} dx = \frac{\sqrt{q}}{\tau(\chi)}\xi(s, \chi)$$

Abbiamo quindi ottenuto l'equazione funzionale per $L(s, \chi)$ nella forma

$$\pi^{-\frac{1}{2}(1-s)} q^{\frac{1}{2}(1-s)} \Gamma\left[\frac{1}{2}(1-s)\right] L(1-s, \bar{\chi}) = \frac{q^{\frac{1}{2}}}{\tau(\chi)} \pi^{-\frac{1}{2}s} q^{\frac{1}{2}s} \Gamma\left(\frac{1}{2}s\right) L(s, \chi)$$

e questo è valido per ogni carattere primitivo χ modulo q per cui $\chi(-1) = 1$.
Siccome $L(1-s, \bar{\chi})$ non ha zeri per $1 - \sigma > 1$, ovvero per $\sigma < 0$, e $\Gamma\left[\frac{1}{2}(1-s)\right]$

non ha zeri, allora gli unici zeri di $L(s,\chi)$ per $\sigma < 0$ sono in $s = -2, -4, -6, \dots$ e corrispondono ai poli di $\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)$.
Esiste anche uno zero di $L(s,\chi)$ in $s = 0$ corrispondente al polo di $\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)$ in quel punto.

- **Caso** $\chi(-1) = -1$.
  Non possiamo usare lo stesso ragionamento di prima in quanto in questo caso $\theta(x,\chi)$ si annulla.
  Modifichiamo quindi la procedura sostituendo $\frac{s}{2}$ con $\frac{s+1}{2}$ nella formula originale, che quindi diventa

$$\pi^{-\frac{1}{2}(s+1)} q^{\frac{1}{2}(s+1)} \Gamma\left[\frac{1}{2}(s+1)\right] n^{-s} = \int_0^\infty n e^{-n^2\pi x/q} x^{\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}} dx$$

Segue che

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\pi}{q}\right)^{-\frac{1}{2}(s+1)} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) L(s,\chi) &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty n\chi(n) e^{-\pi n^2 x/q} x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} dx = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \theta_1(x,\chi) x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} dx = \\
&= \frac{1}{2}\int_1^\infty \theta_1(x,\chi) x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} dx + \frac{1}{2}\frac{i\sqrt{q}}{\tau(\bar{\chi})}\int_1^\infty \theta_1(x,\bar{\chi}) x^{-\frac{1}{2}s} dx
\end{aligned}$$

dove

$$\theta_1(x,\chi) = \sum_{-\infty}^{\infty} n\chi(n) e^{-n^2\pi x/q}$$

e l'ultima uguaglianza segue dall'equazione funzionale soddisfatta da $\theta_1(x,\chi)$:

$$\tau(\bar{\chi})\theta_1(x,\chi) = \frac{i\sqrt{q}}{x^{\frac{3}{2}}}\theta_1\left(\frac{1}{x},\bar{\chi}\right)$$

Questa equazione funzionale si ottiene con un ragionamento simile a quello visto per la funzione θ di Jacobi ma in questo caso si fa uso della relazione

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n e^{-n^2\pi x + 2\pi i\alpha n} = \frac{i}{x\sqrt{x}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} (n+\alpha) e^{-\frac{\pi}{x}(n+\alpha)^2}$$

dove, sostituendo x con $\frac{x}{q}$ e α con $\frac{m}{q}$ otteniamo la relazione

$$\sum_{-\infty}^{\infty} n e^{-n^2\pi\frac{x}{q} + \frac{2\pi i m n}{q}} = i\left(\frac{q}{x}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_{-\infty}^{\infty}\left(n + \frac{m}{q}\right) e^{-\pi\left(n+\frac{m}{q}\right)^2 \frac{q}{x}}$$

L' uguaglianza trovata

$$\left(\frac{\pi}{q}\right)^{-\frac{1}{2}(s+1)} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) L(s,\chi) = \frac{1}{2}\int_1^\infty \theta_1(x,\chi) x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} dx + \frac{1}{2}\frac{i\sqrt{q}}{\tau(\bar{\chi})}\int_1^\infty \theta_1(x,\bar{\chi}) x^{-\frac{1}{2}s} dx$$

ci dà ancora il prolungamento analitico di $L(s, \chi)$ come funzione regolare su tutto il piano.
Se sostituiamo ora s con $1-s$ e χ con $\bar{\chi}$, l'espressione diventa uguale ai suoi precedenti valori ma moltiplicata per $i\sqrt{q}/\tau(\chi)$, in quanto ora

$$\tau(\chi)\tau(\bar{\chi}) = -q$$

Perciò in questo caso l'equazione funzionale diventa

$$\pi^{-\frac{1}{2}(2-s)}q^{\frac{1}{2}(2-s)}\Gamma\left[\frac{1}{2}(2-s)\right]L(1-s,\bar{\chi}) = \frac{iq^{\frac{1}{2}}}{\tau(\chi)}\pi^{-\frac{1}{2}(s+1)}q^{\frac{1}{2}(s+1)}\Gamma\left[\frac{1}{2}(s+1)\right]L(s,\chi)$$

Gli zeri di $L(s, \chi)$ per $\sigma < 0$ sono ora in corrispondenza dei poli di $\Gamma\left[\frac{1}{2}(s+1)\right]$, ovvero in $s = -1, -3, -5, \ldots$
Abbiamo quindi ottenuto che

$$\xi(1-s,\bar{\chi}) = \frac{i\sqrt{q}}{\tau(\chi)}\xi(x,\chi)$$

È possibile unire le due forme dell'equazione funzionale definendo un numero a che dipende da χ definito come

$$a = \begin{cases} 0 & \text{se } \chi(-1) = 1 \\ 1 & \text{se } \chi(-1) = -1 \end{cases}$$

L'equazione funzionale diventa quindi, se

$$\xi(s,\chi) = \left(\frac{\pi}{q}\right)^{-\frac{1}{2}(s+a)}\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)L(s,\chi)$$

allora

$$\xi(1-s,\bar{\chi}) = \frac{i^a q^{\frac{1}{2}}}{\tau(\chi)}\xi(s,\chi)$$

□

Osservazione 8.26. *Osserviamo che:*

- *vale* $\tau(\overline{\chi}) = -\overline{\tau(\chi)}$ *in quanto* $\chi(-n) = -\chi(n)$ *nel caso in cui* $\chi(-1) = -1$
- *se* $\chi(n) \notin \mathbb{R}$ *allora* $L(\overline{s},\chi) \neq \overline{L(s,\chi)}$ *ma* $L(\overline{s},\chi) = \overline{L(s,\overline{\chi})}$

8.6 Prodotto di Weierstrass e derivata logaritmica di $\xi(s,\chi)$ e $L(s,\chi)$

Sia χ un carattere primitivo modulo q, e definiamo

$$\xi(s,\chi) = \left(\frac{\pi}{q}\right)^{-\frac{1}{2}(s+a)}\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)L(s,\chi)$$

dove a vale

$$a = \begin{cases} 0 & \text{se } \chi(-1) = 1 \\ 1 & \text{se } \chi(-1) = -1 \end{cases}$$

(osserviamo che non serve includere il fattore $s(s-1)$ che era stato introdotto nella definizione di $\xi(s)$ per cancellare i poli di $\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)$ e $\zeta(s)$ in $s=0$ e $s=1$ rispettivamente). Inoltre, abbiamo già visto che $\xi(s,\chi)$ è una funzione intera e soddisfa l'equazione funzionale

$$\xi(1-s,\bar{\chi}) = \frac{i^a q^{\frac{1}{2}}}{\tau(\chi)}\xi(s,\chi)$$

in cui il fattore moltiplicativo ha valore assoluto 1.

Proposizione 8.27. *La funzione $\xi(s,\chi)$ ha ordine* 1.

Dimostrazione. Sappiamo che

$$\xi(s,\chi) = \left(\frac{\pi}{q}\right)^{-\frac{1}{2}(s+a)} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) L(s,\chi)$$

dove a vale

$$a = \begin{cases} 0 & \text{se } \chi(-1) = 1 \\ 1 & \text{se } \chi(-1) = -1 \end{cases}$$

Inoltre

$$\left|\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)\right| \ll e^{c|s|\log(|s|)} \ll e^{|s|^{1+\varepsilon}} \qquad \forall\varepsilon > 0,\ \sigma > \frac{1}{2}$$

mentre

$$|L(s,\chi)| \leq \zeta(\sigma) \qquad \sigma > 1$$

e, come abbiamo visto in precedenza, vale il seguente prolungamento analitico per $\sigma \geq \varepsilon$ (si ha convergenza totale)

$$L(s,\chi) = s\int_1^\infty S(x)x^{-s-1}dx, \qquad \text{dove } S(x) = \sum_{n\leq x}\chi(n)$$

che è valida per $\sigma > 0$.
Siccome $|S(x)| \leq q$ segue che

$$|L(s,\chi)| \leq 2q|s| \qquad \text{per } \sigma \geq \frac{1}{2}$$

Quindi

$$|\xi(s,\chi)| \leq 2q^{\frac{\sigma}{2}+\frac{3}{2}}|s|\left|\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)\right| \ll e^{|s|^{1+\varepsilon}}$$

□

Un risultato simile vale per $\sigma \leq \frac{1}{2}$, grazie all'equazione funzionale.

Osservazione 8.28. *Esistono infiniti zeri $\rho_\chi = \beta_\chi + i\gamma_\chi$ con $0 \leq \beta_\chi \leq 1$ ed esponente di convergenza 1, ovvero*

$$\sum \frac{1}{|\rho_n|^{1+\varepsilon}}$$

converge per ogni $\varepsilon > 0$ Tuttavia

$$\sum \frac{1}{|\rho_n|}$$

diverge.
Inoltre gli zeri non sono simmetrici rispetto all'asse reale in quanto se χ non è un carattere reale allora $L(\bar{s}, \chi) \neq \overline{L(s, \chi)}$ ma $L(\bar{s}, \chi) = \overline{L(s, \bar{\chi})}$.
Gli zeri nella striscia critica sono invece ancora simmetrici rispetto l'asse $\sigma = \frac{1}{2}$.
Infatti se ρ è uno zero di $L(s, \chi)$, allora siccome

$$L(\rho, \chi) = L(\bar{\bar{\rho}}, \chi) = \overline{L(\bar{\rho}, \bar{\chi})} = 0$$

segue che $\bar{\rho}$ è uno zero rispetto al carattere coniugato $\bar{\chi}$. Ma allora, per l'equazione funzionale segue che $1 - \bar{\rho} = \rho'$ è uno zero rispetto al carattere χ (doppio coniugato è il carattere stesso). Si ha perciò la simmetria degli zeri rispetto a un carattere χ rispetto alla retta $\sigma = \frac{1}{2}$.

Proposizione 8.29. *Si ha il seguente prodotto di Weierstrass:*

$$\xi(s, \chi) = e^{A+Bs} \prod_{\rho_\chi} \left(1 - \frac{s}{\rho_\chi}\right) e^{\frac{s}{\rho_\chi}}$$

In questo caso però A e B dipendono da χ.

Dimostrazione. Osserviamo che possiamo esprimere $e^A = \xi(0, \chi)$ in termini di $L(0, \chi)$, quindi di $\xi(1, \bar{\chi})$ e perciò in termini di $L(1, \bar{\chi}) \ll \log q$.
Resta da trovare $B(\chi)$.
Osserviamo che nonostante la serie $\sum |\rho_\chi|^{-1}$ diverge, la serie $\sum \rho_\chi^{-1}$ converge; infatti se raggruppiamo insieme i termini con ρ_χ e $\bar{\rho_\chi}$ allora possiamo osservare che, posto $\rho_\chi = \beta_\chi + i\gamma_\chi$, vale

$$\frac{1}{\rho_\chi} + \frac{1}{\bar{\rho_\chi}} = \frac{2\beta_\chi}{\beta_\chi^2 + \gamma_\chi^2} \leq \frac{2}{|\rho_\chi|^2}$$

e sappiamo che $\sum |\rho_\chi|^{-2}$ converge.
Ma allora, siccome

$$\frac{\xi'(s, \chi)}{\xi(s, \chi)} = B(\chi) + \sum_{\rho_\chi} \left(\frac{1}{s - \rho_\chi} + \frac{1}{\rho_\chi}\right)$$

e vale l'equazione funzionale

$$\xi(1 - s, \bar{\chi}) = \frac{i^a q^{\frac{1}{2}}}{\tau(\chi)} \xi(s, \chi)$$

allora abbiamo

$$B(\chi) = \frac{\xi'(0,\chi)}{\xi(0,\chi)} = -\frac{\xi'(1,\bar\chi)}{\xi(1,\bar\chi)} = -B(\bar\chi) - \sum_{\bar\rho}\left(\frac{1}{1-\bar\rho} + \frac{1}{\bar\rho}\right)$$

Siccome $B(\bar\chi) = \overline{B(\chi)}$ segue che

$$2\operatorname{Re} B(\chi) = -\sum_{\rho}\left(\operatorname{Re}\frac{1}{1-\bar\rho} + \operatorname{Re}\frac{1}{\bar\rho}\right)$$

Ora scriviamo ρ invece di $1-\bar\rho$; questo è possibile in quanto permutazioni di termini non negativi non alterano la somma. Segue che

$$\operatorname{Re} B(\chi) = -\frac{1}{2}\sum_{\rho}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\bar\rho}\right) = -\sum_{\rho}\operatorname{Re}\frac{1}{\rho}$$

In particolare, se χ è un carattere reale allora $B(\chi)$ è negativo e si esprime in termini degli zeri ρ_χ tramite la relazione

$$B(\chi) = -\sum_{\rho_\chi}\frac{1}{\rho_\chi} = -2\sum_{\gamma_\chi>0}\frac{\beta_\chi}{\beta_\chi^2 + \gamma_\chi^2}$$

La difficoltà nel stimare $B(\chi)$ è collegata al fatto che $L(s,\chi)$ potrebbe avere uno zero vicino $s=0$. □

Corollario 8.30. ***(Derivata logaritmica di*** $L(s,\chi)$***)***
Per $s \in K \subset \mathbb{C} - \cup\rho_\chi$ *vale*

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = -\frac{1}{2}\log\frac{q}{\pi} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s+a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} + B(\chi) + \sum_{\rho_\chi}\left(\frac{1}{s-\rho_\chi} + \frac{1}{\rho_\chi}\right)$$

Dimostrazione. Facendo la derivata logaritmica di

$$\xi(s,\chi) = e^{A+Bs}\prod_{\rho_\chi}\left(1 - \frac{s}{\rho_\chi}\right)e^{\frac{s}{\rho_\chi}}$$

e

$$\xi(s,\chi) = \left(\frac{\pi}{q}\right)^{-\frac{1}{2}(s+a)}\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)L(s,\chi)$$

si ottengono rispettivamente

$$\frac{\xi'(s,\chi)}{\xi(s,\chi)} = B(\chi) + \sum_{\rho_\chi}\left(\frac{1}{s-\rho_\chi} + \frac{1}{\rho_\chi}\right)$$

$$\frac{\xi'(s,\chi)}{\xi(s,\chi)} = \frac{1}{2}\log\frac{q}{\pi} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s+a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+s}{2}\right)} + \frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}$$

Quindi uguagliando le due equazioni si ottiene la derivata logaritmica di $L(s,\chi)$:

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = -\frac{1}{2}\log\frac{q}{\pi} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s+a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} + B(\chi) + \sum_{\rho_\chi}\left(\frac{1}{s-\rho_\chi} + \frac{1}{\rho_\chi}\right)$$

$\square$

Osservazione 8.31. *Il numero $B(\chi)$ può essere espresso in termini dell'espansione di $\frac{L'}{L}$ in potenze di s, ma risulta difficile stimare in maniera opportuna $B(\chi)$ come funzione di q.*

8.7 Il numero $N(T,\chi)$

Teorema 8.32. ***(Formula di Riemann-VonMangold)***
Sia χ un carattere primitivo modulo q e sia

$$N(T,\chi) = \frac{1}{2}\#\left\{\rho_\chi = \beta_\chi + i\gamma_\chi | L(\rho_\chi,\chi) = 0,\ |\beta_\chi| < 1,\ |\gamma_\chi| < T\right\}$$

Allora, preso $T \geq 2$, vale

$$N(T,\chi) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{qT}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T + \log q)$$

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che non è più appropriato considerare solo il semipiano superiore in quanto gli zeri non sono in generale posizionati simmetricamente rispetto all'asse reale.
Inoltre, siccome in questo caso $N(T,\chi)$ viene trattata come una funzione di due parametri T e q, non è più appropriato supporre T arbitrariamente grande, quindi assumiamo $T \geq 2$.
Vogliamo ora considerare la variazione in $\arg\xi(s,\chi)$ quando s descrive il rettangolo R avente come vertici

$$\frac{5}{2} - iT, \quad \frac{5}{2} + iT, \quad -\frac{3}{2} + iT, \quad -\frac{3}{2} - iT$$

in modo da evitare il possibile zero in $s = -1$.
Questo rettangolo contiene un solo zero banale di $L(s,\chi)$ in $s = 0$ (se $a = 0$) oppure $s = -1$ (se $a = 1$), e perciò

$$N(T,\chi) = \frac{1}{2\pi}\Delta_R \arg\xi(s,\chi) - 1$$

Siccome

$$\xi(1-s,\bar{\chi}) = \frac{i^a\sqrt{q}}{\tau(\chi)}\xi(s,\chi)$$

il contributo della metà sinistra del bordo è uguale a quello a destra in quanto

$$\arg\xi(\sigma+it,\chi) = \arg\xi(1-\sigma-it,\bar{\chi}) + c = \arg\overline{\xi(1-\sigma+it,\chi)} + c$$

dove c è indipendente da s (sarebbe il termine che deriva calcolando l'argomento di $i^a\sqrt{q}/\tau(\chi)$).
Per la definizione

$$\xi(s,\chi) = \left(\frac{\pi}{q}\right)^{-\frac{1}{2}(s+a)} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) L(s,\chi)$$

allora $\Delta \arg \xi(s,\chi)$ è la somma dei seguenti tre termini (calcolati solo sul rettangolo di destra e poi moltiplicati per due visto che il contributo di destra è uguale a quello di sinistra in modo a coprire tutto R):

$$\Delta \arg \left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{s+a}{2}} = T \log\left(\frac{q}{\pi}\right)$$

$$\Delta \arg \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) = T \log \frac{T}{2} - T + O(1)$$

$$\Delta \arg L(s,\chi)$$

I primi due termini ci danno i termini principali nella formula di $N(T,\chi)$, mentre ci resta da mostrare che

$$\arg L\left(\frac{1}{2} + iT, \chi\right) = O(\log T + \log q)$$

(la variazione lungo il tratto verticale è $\pi/2$ quindi trascurabile, diventa $O(1)$).
Vediamo quindi come ottenerlo.
Consideriamo

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = -\frac{1}{2}\log\frac{q}{\pi} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s+a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} + B(\chi) + \sum_{\rho_\chi}\left(\frac{1}{s-\rho_\chi} + \frac{1}{\rho_\chi}\right)$$

Sappiamo che

$$\xi(s,\chi) = e^{A+Bs}\prod_{\rho_\chi}\left(1 - \frac{s}{\rho_\chi}\right)e^{\frac{s}{\rho_\chi}}$$

e

$$\frac{\xi'(s,\chi)}{\xi(s,\chi)} = B(\chi) + \sum_{\rho_\chi}\left(\frac{1}{s-\rho_\chi} + \frac{1}{\rho_\chi}\right)$$

Sostituendo $s = 0$ si ottiene

$$B(\chi) = \frac{\xi'(0,\chi)}{\xi(0,\chi)} = -\frac{\xi'(1,\bar{\chi})}{\xi(1,\bar{\chi})} = -B(\bar{\chi}) - \sum_{\rho_{\bar{\chi}}}\left(\frac{1}{1-\rho_{\bar{\chi}}} + \frac{1}{\rho_{\bar{\chi}}}\right) = -B(\bar{\chi}) - \sum_{\bar{\rho}_\chi}\left(\frac{1}{1-\bar{\rho}_\chi} + \frac{1}{\bar{\rho}_\chi}\right)$$

Ora scriviamo ρ_χ invece di $1 - \bar{\rho}_\chi$; questo è possibile in quanto permutazioni di termini non negativi non alterano la somma (c'è una corrispondenza biunivoca).
Inoltre siccome

$$B(\chi) = \frac{\xi'(0,\chi)}{\xi(0,\chi)}$$

allora

$$B(\bar{\chi}) = \overline{B(\chi)}$$

Quindi

$$2\,\mathrm{Re}\,B(\chi) = -2\sum_{\rho} \mathrm{Re}\,\frac{1}{\rho_\chi}$$

che converge in quanto la sua parte reale è

$$\frac{\beta_\chi}{\beta_\chi^2 + \gamma_\chi^2}$$

Quindi

$$\mathrm{Re}\,B(\chi) = -\sum_{\rho} \mathrm{Re}\,\frac{1}{\rho_\chi}$$

Segue che

$$-\,\mathrm{Re}\,\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \frac{1}{2}\log\frac{q}{\pi} + \mathrm{Re}\,\frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s+a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} - \mathrm{Re}\,B(\chi) - \sum_{\rho_\chi}\left(\mathrm{Re}\,\frac{1}{s-\rho_\chi} + \mathrm{Re}\,\frac{1}{\rho_\chi}\right)$$

ovvero

$$-\,\mathrm{Re}\,\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \frac{1}{2}\log\frac{q}{\pi} + \mathrm{Re}\,\frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s+a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} - \sum_{\rho_\chi}\mathrm{Re}\,\frac{1}{s-\rho_\chi}$$

Segue che

$$-\,\mathrm{Re}\,\frac{L'}{L}(\sigma+it,\chi) \le c\log(q(|t|+2)) - \sum_{\rho_\chi}\frac{\sigma-\beta_\chi}{(\sigma-\beta_\chi)^2+(t-\gamma_\chi)^2}$$

Ma allora

$$\sum_{\gamma_\chi}\frac{1}{1+(t-\gamma)^2} = O(\mathscr{L})$$

dove $\mathscr{L} = \log q(|t|+2)$.
In particolare

$$\sum_{|\gamma_\chi - t|<1} 1 = O(\mathscr{L})$$

Segue che (per i t che non coincidono con l'ordinata di uno zero e per $-1 \le \sigma \le 2$) vale

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \sum_{|\gamma_\chi - t|<1}\frac{1}{s-\rho_\chi} + O(\mathscr{L})$$

$$\arg\left(\frac{1}{2}+iT,\chi\right) + O(1) = \int_{1/2}^{1}\mathrm{Im}\,\frac{L'}{L}(\sigma+it,\chi)d\sigma \ll \log q(|t|+2)$$

Mettendo insieme i risultati si ottiene la formula voluta per $N(T,\chi)$. □

La formula appena trovata per $N(T,\chi)$ implica che per q grandi allora il numero di zeri con $|t| < T_0$, dove T_0 è una costante assoluta opportuna, è più grande di un multiplo costante di $\log q$.
Questo mostra che la stima
$$\sum_\rho \frac{1}{1+\gamma^2} = O(\log q)$$
è in pratica la migliore possibile.

Osservazione 8.33. *Se χ non è un carattere primitivo indotto dal carattere primitivo $\chi_1 \pmod{q_1}$, allora*
$$L(s,\chi) = L(s,\chi_1)\prod_{p|q}\left(1-\frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)$$
e quindi
$$\frac{L'}{L}(s,\chi) = \frac{L'}{L}(s,\chi_1) + \sum_{p|q}\frac{p^{-s}\log p}{1-\frac{\chi_1(p)}{p^s}}$$
Ma allora
$$\left|\frac{L'}{L}(s,\chi) - \frac{L'}{L}(s,\chi_1)\right| \le \sum_{p|q}\frac{\log p}{p^s-1} \ll \sum_{p|q}\log p \ll \log q$$
Ma allora resta valida la formula
$$N(T,\chi) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{qT}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T + \log q)$$
resta valida per $N(T,\chi)$, a patto di sostituire q con q_1.
Tuttavia, se $N_R(T,\chi)$ indica il numero di zeri nel rettangolo R definito sopra, allora dobbiamo includere gli zeri su $\sigma = 0$ di
$$\prod_{p|q}\left(1-\frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)$$
Questi zeri si hanno quando $p^{-it} = \pm 1$ e sono i multipli di $\frac{\pi}{\log p}$.Questi zeri (per ogni p che non divide q_1) sono situati alla stessa distanza l'uno dall'altro di $\frac{2\pi}{\log p}$. Il loro numero, con $|t| < T$, è
$$O\left(\sum_{p|q}(T\log p + 1)\right) = O(T\log q)$$
Quindi
$$N_R(T,\chi) = \frac{T}{\pi}\log\frac{T}{2\pi} + O(T\log q)$$
per $T \ge 2$.

Capitolo 9

Regioni libere da zeri per $L(s, \chi)$

Supponiamo che $t \geq 0$.
Questa scelta non comporta una perdita di generalità in quanto gli zeri di $L(s, \chi)$ con $t < 0$ sono i complessi coniugati degli zeri di $L(s, \bar{\chi})$ con $t > 0$.
Inoltre, siccome ci interessano i caratteri non principali, supponiamo $q \geq 3$.
La derivata logaritmica della formula del prodotto di Eulero ci dà

$$-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^{\sigma+it}} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma} \chi(n) e^{-it\log n}$$

per $\sigma > 1$.
Possiamo rappresentare la parte reale di $\chi(n)e^{-it\log n}$, per $(n, q) = 1$, con $\cos\theta$, e θ viene sostituito con 2θ se χ viene sostituito con χ^2 e t con $2t$; inoltre θ deve essere sostituito con 0 se χ è sostituito con χ_0 e t con 0.
Quindi, usando la disuguaglianza di de la Vallèe Poussin si ottiene in maniera analoga che

$$3\left[-\frac{L'(\sigma,\chi_0)}{L(\sigma,\chi_0)}\right] + 4\left[-\operatorname{Re}\frac{L'(\sigma+it,\chi)}{L(\sigma+it,\chi)}\right] + \left[-\operatorname{Re}\frac{L'\left(\sigma+2it,\chi^2\right)}{L\left(\sigma+2it,\chi^2\right)}\right] \geq 0.$$

Se χ è un carattere reale (ma solo in questo caso) abbiamo $\chi^2 = \chi_0$, e questo crea problemi. Il problema si verifica quando t è piccolo e ci troviamo sotto l'influenza del polo di $L(s, \chi_0)$ in $s = 1$.
Analizziamo quindi separatamente il caso in cui χ è complesso e quello in cui χ è reale.

9.1 Il caso in cui χ è complesso

Teorema 9.1. *Dato χ un carattere complesso modulo q, esiste una costante positiva c tale che ogni zero $\beta_\chi + i\gamma_\chi$ di $L(s, \chi)$ soddisfa la disuguaglianza*

$$\beta_\chi < 1 - \frac{c}{\mathscr{L}}$$

dove

$$\mathscr{L} = \log q + \log(|\gamma_\chi| + 2)$$

Dimostrazione. Innanzitutto il primo termine non crea difficoltà in quanto

$$-\frac{L'(\sigma,\chi_0)}{L(\sigma,\chi_0)} = \sum_1^{\infty} \chi_0(n)\Lambda(n)n^{-\sigma} \leq -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} < \frac{1}{\sigma-1} + c_1$$

per $1 < \sigma < 2$, dove c_1 è una costante assoluta positiva.
Per quanto riguarda gli altri due termini, abbiamo visto prima che

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = -\frac{1}{2}\log\frac{q}{\pi} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s+a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} + B(\chi) + \sum_{\rho_\chi}\left(\frac{1}{s-\rho_\chi} + \frac{1}{\rho_\chi}\right)$$

quindi considerando la parte reale abbiamo

$$-\operatorname{Re}\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \frac{1}{2}\log\frac{q}{\pi} + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\frac{\Gamma'\left(\frac{s+a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} - \operatorname{Re}B(\chi) - \operatorname{Re}\sum_{\rho_\chi}\left(\frac{1}{s-\rho_\chi} + \frac{1}{\rho_\chi}\right)$$

dove a vale 0 oppure 1.
Inoltre, possiamo eliminare $B(\chi)$ e $\sum \frac{1}{\rho_\chi}$ in quanto abbiamo visto precedentemente che

$$\operatorname{Re}B(\chi) = -\frac{1}{2}\sum_{\rho_\chi}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\bar{\rho_\chi}}\right) = -\sum_{\rho_\chi}\operatorname{Re}\frac{1}{\rho_\chi}$$

Siccome il termine Γ di sopra è $O(\log(t+2))$, possiamo riscrivere la relazione come

$$-\operatorname{Re}\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} < c_2\mathscr{L} - \sum_{\rho_\chi}\operatorname{Re}\frac{1}{s-\rho_\chi}$$

dove

$$\mathscr{L} = \log q + \log(t+2)$$

Per $\sigma > 1$ questo vale per ogni carattere primitivo χ, sia reale che complesso. Siccome

$$\operatorname{Re}\frac{1}{s-\rho_\chi} = \frac{\sigma-\beta_\chi}{|s-\rho_\chi|^2} \geq 0$$

possiamo trascurare la serie o una parte di essa. Trascuriamo la serie intera quando dobbiamo stimare $\frac{L'\left(\sigma+2it,\chi^2\right)}{L(\sigma+2it,\chi^2)}$. In tal caso c'è una piccola complicazione dovuta al fatto che χ^2, anche se non è principale, potrebbe non essere primitivo. Tuttavia se χ_1 è il carattere primitivo che induce χ^2, siccome sappiamo che

$$L(s,\chi^2) = L(s,\chi_1)\prod_{p|q}\left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)$$

allora

$$\left|\frac{L'\left(s,\chi^2\right)}{L\left(s,\chi^2\right)} - \frac{L'\left(s,\chi_1\right)}{L\left(s,\chi_1\right)}\right| \leq \sum_{p|q}\frac{p^{-\sigma}\log p}{1-p^{-\sigma}} \leq \sum_{p|q}\log p \leq \log q$$

e quindi il bound superiore $c_2\mathscr{L}$ resta valido.
Scegliamo ora come t l'ordinata γ_χ di uno zero $\beta_\chi + i\gamma_\chi$ di $L(s,\chi)$. Considerando nella somma di
$$-\operatorname{Re}\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} < c_2\mathscr{L} - \sum_\rho \operatorname{Re}\frac{1}{s-\rho_\chi}$$
solo il termine corrispondente a questo zero otteniamo
$$-\operatorname{Re}\frac{L'(\sigma+it,\chi)}{L(\sigma+it,\chi)} < c_2\mathscr{L} - \frac{1}{\sigma-\beta_\chi}$$
Se ora andiamo a sostituire le tre stime trovate nella disuguaglianza iniziale
$$3\left[-\frac{L'(\sigma,\chi_0)}{L(\sigma,\chi_0)}\right] + 4\left[-\operatorname{Re}\frac{L'(\sigma+it,\chi)}{L(\sigma+it,\chi)}\right] + \left[-\operatorname{Re}\frac{L'\left(\sigma+2it,\chi^2\right)}{L\left(\sigma+2it,\chi^2\right)}\right] \geq 0.$$
otteniamo
$$\frac{4}{\sigma-\beta_\chi} < \frac{3}{\sigma-1} + c_3\mathscr{L}$$
Se ora prendiamo $\sigma = 1 + \frac{c_4}{\mathscr{L}}$, con c_4 opportuna costante, otteniamo
$$\beta_\chi < 1 - \frac{c_5}{\mathscr{L}}$$
Questo risultato è stato dimostrato nel caso in cui χ è un carattere complesso primitivo; tuttavia la restrizione ai caratteri primitivi χ può essere omessa in quanto abbiamo visto che gli zeri di $L(s,\chi)$ in più rispetto a quelli che sono anche zeri della funzione $L(s,\chi_1)$, dove χ_1 induce χ, sono gli zeri di un numero finito di fattori $1-\chi_1(p)p^{-s}$ e sono sulla retta $\sigma = 0$. □

9.2 Il caso in cui χ è reale

Teorema 9.2. *Sia χ un carattere reale non principale modulo q. Allora esiste una costante assoluta positiva c tale che se $0<\delta<c$ allora ogni zero $\beta_\chi + i\gamma_\chi$ di $L(s,\chi)$ per cui*
$$|\gamma_\chi| \geq \frac{\delta}{\log q}$$
vale
$$\beta_\chi < 1 - \frac{\delta}{5\mathscr{L}}$$
dove $\mathscr{L}$ è
$$\mathscr{L} = \log q + \log(|\gamma_\chi| + 2)$$

Dimostrazione. Nelle ipotesi abbiamo omesso che χ è primitivo per gli stessi motivi di prima.
Il ragionamento di prima deve essere modificato per il seguente motivo: la disuguaglianza

per $-\operatorname{Re}\frac{L'}{L}$ con $s=\sigma+2it$ e χ sostituito con χ^2 non è più applicabile in quanto χ^2 è il carattere principale.
Dobbiamo quindi mettere in relazione $\frac{L'}{L}$ con $\frac{\zeta'}{\zeta}$, e poi per lo stesso motivo usato nel caso complesso, quando χ^2 non era primitivo, abbiamo

$$\left|\frac{L'\left(s,\chi_0\right)}{L\left(s,\chi_0\right)}-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|\leq\log q$$

per $\sigma>1$.
Per quanto riguarda $-\frac{\zeta'}{\zeta}$, siccome abbiamo il polo in $s=1$ il termine $\frac{1}{s-1}$ non può essere trascurato e quindi

$$-\operatorname{Re}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}<\operatorname{Re}\frac{1}{s-1}+c_6\log(t+2)$$

Quindi, prendendo $s=\sigma+2it$ si ha

$$-\operatorname{Re}\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}<\operatorname{Re}\frac{1}{\sigma-1+2it}+c_6\log(t+2)$$

e perciò segue che

$$-\operatorname{Re}\frac{L'\left(\sigma+2it,\chi^2\right)}{L\left(\sigma+2it,\chi^2\right)}<\operatorname{Re}\frac{1}{\sigma-1+2it}+c_7\mathscr{L}$$

dove

$$\mathscr{L}=\log q+\log(|t|+2)$$

Andando a sostituire nella disuguaglianza iniziale

$$3\left[-\frac{L'\left(\sigma,\chi_0\right)}{L\left(\sigma,\chi_0\right)}\right]+4\left[-\operatorname{Re}\frac{L'(\sigma+it,\chi)}{L(\sigma+it,\chi)}\right]+\left[-\operatorname{Re}\frac{L'\left(\sigma+2it,\chi^2\right)}{L\left(\sigma+2it,\chi^2\right)}\right]\geq 0.$$

le stime trovate si ottiene

$$\frac{4}{\sigma-\beta}<\frac{3}{\sigma-1}+\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\sigma-1+2it}\right)+c_8\mathscr{L}$$

Poniamo ora $t=\gamma_\chi$. Se prendiamo

$$\sigma=1+\frac{\delta}{\mathscr{L}}$$

e supponiamo che

$$|\gamma_\chi|\geq\frac{\delta}{\mathscr{L}}$$

allora otteniamo

$$\frac{4}{\sigma-\beta}<\frac{3\mathscr{L}}{\delta}+\frac{\mathscr{L}}{5\delta}+c_8\mathscr{L}$$

da cui

$$\beta < 1 - \frac{4 - 5c_8\delta}{16 + 5c_8\delta}\frac{\delta}{\mathscr{L}}$$

Se δ è sufficientemente piccolo rispetto a c_8, allora, tenuto conto che $|\gamma_\chi| \geq \frac{\delta}{\mathscr{L}}$ si ha che

$$\beta_\chi < 1 - \frac{\delta}{5\mathscr{L}}$$

dove

$$\mathscr{L} = \log q + \log(|\gamma_\chi| + 2)$$

Osserviamo infine che la condizione $|\gamma_\chi| \geq \frac{\delta}{\mathscr{L}}$ è soddisfatta se $|\gamma_\chi| \geq \frac{\delta}{\log q}$.
Abbiamo quindi dimostrato la tesi. □

Proposizione 9.3. *Se χ è un carattere reale non principale modulo q allora esiste una costante assoluta positiva c tale che, se $0 < \delta < c$, l'unico zero possibile $\rho_\chi = \beta_\chi + i\gamma_\chi$ di $L(s, \chi)$ che soddisfa le seguenti proprietà:*

$$|\gamma_\chi| < \frac{\delta}{\log q}$$

$$\beta_\chi > 1 - \frac{\delta}{\log q}$$

è uno zero ρ_χ reale e semplice, cioè $\gamma_\chi = 0$.

Dimostrazione. Vogliamo mostrare che esiste al più uno zero con $\sigma > 1 - \delta'/\log q$ dove δ' è una opportuna costante positiva e che, se ne esiste uno, deve essere reale.
Innanzitutto il fatto che sia reale si giustifica nel seguente modo:supponendo di sapere che può esistere al più uno zero, se esistesse uno zero non reale, allora esisterebbero due zeri in punti complessi coniugati, in contraddizione col fatto che esiste al più uno zero.
Dimostriamo ora che esiste al più uno zero.
La disuguaglianza

$$-\operatorname{Re}\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} < c_2\mathscr{L} - \sum_\rho \operatorname{Re}\frac{1}{s - \rho_\chi}$$

vista precedentemente, se riscritta con $s = \sigma > 1$, diventa

$$-\frac{L'(\sigma,\chi)}{L(\sigma,\chi)} < c_{10}\log q - \sum_\rho \frac{1}{\sigma - \rho}$$

essendo l'ultima somma reale in quanto gli zeri compaiono in coppie di complessi coniugati.
Nell'usare questa disuguaglianza abbiamo in realtà supposto che χ è un carattere primitivo.
Tuttavia questa ipotesi non è restrittiva.
Se per assurdo esistessero zeri in $\beta_\chi \pm i\gamma_\chi$, dove $\gamma_\chi \neq 0$, dovremmo avere

$$-\frac{L'(\sigma,\chi)}{L(\sigma,\chi)} < c_{10}\log q - \frac{2(\sigma - \beta_\chi)}{(\sigma - \beta_\chi)^2 + \gamma_\chi^2}$$

Per il membro di sinistra abbiamo

$$-\frac{L'(\sigma,\chi)}{L(\sigma,\chi)} = \sum_1^\infty \chi(n)\Lambda(n)n^{-\sigma} \geq -\sum_1^\infty \Lambda(n)n^{-\sigma} = \frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} > -\frac{1}{\sigma-1} - c_{11}$$

da cui

$$-\frac{1}{\sigma-1} < c_{12}\log q - \frac{2(\sigma-\beta_\chi)}{(\sigma-\beta_\chi)^2+\gamma_\chi^2}$$

Se prendiamo ora

$$\sigma = 1 + \frac{2\delta}{\log q}$$

allora

$$|\gamma| < \frac{\delta}{\log q} = \frac{1}{2}(\sigma-1) < \frac{1}{2}(\sigma-\beta_\chi)$$

e l'ultima disuguaglianza implica che

$$-\frac{1}{\sigma-1} < c_{12}\log q - \frac{8}{5(\sigma-\beta_\chi)}$$

Se il δ del risultato precedente è sufficientemente piccolo in relazione a c_{12}, allora abbiamo

$$\beta_\chi < 1 - \frac{\delta}{\log q}$$

Ma questo è assurdo in quando per ipotesi β_χ doveva soddisfare

$$\beta_\chi > 1 - \frac{\delta}{\log q}$$

Il ragionamento è sostanzialmente lo stesso se invece di due zeri complessi coniugati esistono due zeri reali (oppure uno zero doppio). □

Osservazione 9.4. *I tre risultati dimostrati possono essere uniti in un unico teorema che semplifica gli enunciati considerando due casi a seconda che* $|t| \geq 1$ *oppure* $|t| \leq 1$*. Infatti nel primo caso il numero* $\mathscr{L}$ *è sostanzialmente* $\log q|t|$ *mentre nel secondo caso è* $\log q$.

Teorema 9.5. *Esiste una costante assoluta positiva* c *con la seguente proprietà.*

- *Se* χ *è un carattere complesso modulo* q *allora* $L(s,\chi)$ *non ha zeri nella regione definita da*

$$\sigma \geq \begin{cases} 1 - \frac{c}{\log q|t|} & \text{se } |t| \geq 1 \\ 1 - \frac{c}{\log q} & \text{se } |t| \leq 1 \end{cases}$$

- *Se* χ *è un carattere reale non principale, l'unico zero possibile di* $L(s,\chi)$ *in questa regione è uno zero reale semplice.*

o equivalentemente

Teorema 9.6. *Esiste una costante* $c_0 > 0$ *tale che se* χ *è un carattere primitivo modulo* q *e* $L(\beta_\chi + i\gamma_\chi, \chi) = 0$ *allora*

$$\beta_\chi < \begin{cases} 1 - \frac{c_0}{\log(q|\gamma_\chi|)} & \text{se } |\gamma_\chi| \geq 1 \\ 1 - \frac{c_0}{\log q} & \text{se } |\gamma_\chi| \leq 1 \end{cases}$$

e se in più χ *è reale allora esiste unico al più uno zero* β_0 *reale semplice tale che* $L(\beta_0, \chi) = 0$ *e* β_0 *non soddisfa le condizioni sopra indicate.*

Vediamo ora un risultato di Landau che ci mostra che se esistono valori di q per cui una funzione L formata con un carattere reale primitivo $(\bmod q)$ ha uno zero con $\beta > 1 - c/\log q$, allora questi valori di q sono molto rari.

Teorema 9.7. ***(Landau)***
Se χ_1, χ_2 *sono caratteri primitivi reali distinti rispetto ai moduli* q_1, q_2 *rispettivamente, e se le corrispondenti funzioni* L *hanno zeri reali* β_1, β_2*, allora*

$$\min(\beta_1, \beta_2) < 1 - \frac{c_{15}}{\log q_1 q_2}$$

dove c_{15} *è qualche costante assoluta positiva. La possibilità che* $q_1 = q_2$ *non viene esclusa.*

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sul fatto che $\chi_1(n)\chi_2(n)$ è un carattere rispetto al modulo $q_1 q_2$, essendo moltiplicativo e periodico. In generale non è detto che sia un carattere primitivo, tuttavia non è principale. Infatti se per assurdo $\chi_1(n)\chi_2(n) = 1$ per ogni n tale che $(n, q_1 q_2) = 1$, allora dovremmo avere $\chi_1(n) = \chi_2(n)$ ogni volta che $(n, q_1 q_2) = 1$, ma questo vorrebbe dire che i caratteri primitivi χ_1 e χ_2 dovrebbero indurre lo stesso carattere rispetto al modulo $q_1 q_2$. Tuttavia questo è impossibile per quanto visto nel capitolo precedente.
Per $\sigma > 1$, abbiamo

$$-\frac{L'(\sigma, \chi_1\chi_2)}{L(\sigma, \chi_1\chi_2)} < c_{16} \log q_1 q_2$$

per lo stesso motivo usato con $L(s, \chi^2)$ quando χ^2 non era principale ma non necessariamente primitivo. Inoltre, siccome

$$-\operatorname{Re} \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} < c_2 \mathscr{L} - \sum_\rho \operatorname{Re} \frac{1}{s - \rho_\chi}$$

allora

$$-\frac{L'(\sigma, \chi_j)}{L(\sigma, \chi_j)} < c_{17} \log q_j - \frac{1}{\sigma - \beta_j}$$

(abbiamo omesso il simbolo Re in quanto in questo caso risulta superfluo).
Consideriamo ora la seguente equazione

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}-\frac{L'(\sigma,\chi_1)}{L(\sigma,\chi_1)}-\frac{L'(\sigma,\chi_2)}{L(\sigma,\chi_2)}-\frac{L'(\sigma,\chi_1\chi_2)}{L(\sigma,\chi_1\chi_2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\left[1+\chi_1(n)\right]\left[1+\chi_2(n)\right]n^{-\sigma}\geq 0$$

Se in questa espressione andiamo a sostituire le precedenti stime e anche quella per $-\zeta'(\sigma)/\zeta(\sigma)$, otteniamo

$$\frac{1}{\sigma-\beta_1}+\frac{1}{\sigma-\beta_2}<\frac{1}{\sigma-1}+c_{18}\log q_1q_2$$

Se prendiamo come valore di σ

$$\sigma=1+\frac{\delta}{\log q_1q_2}$$

con δ una costante positiva sufficientemente piccola, l'ultima disuguaglianza mostra che β_1 e β_2 non possono essere entrambe più grandi di $1-\frac{\delta'}{\log q_1q_2}$, dove δ' è una costante positiva opportuna.
Abbiamo quindi dimostrato che

$$\min\left(\beta_1,\beta_2\right)<1-\frac{c}{\log q_1q_2}$$

dove c è qualche costante assoluta positiva. □

Vediamo alcune immediate conseguenze:

- Se $q_1=q_2=q$ allora

  $$\min(\beta_1,\beta_2)<1-\frac{c_1}{2\log q}=1-\frac{c_2}{\log q}$$

  con $c_2=\frac{c_1}{2}$

- si osserva che per al più uno tra i caratteri reali non principali $\chi(\bmod q)$ la funzione $L(s,\chi)$ può avere uno zero nella regione

  $$\sigma\geq\begin{cases}1-\frac{c}{\log q|t|} & \text{if } |t|\geq 1\\ 1-\frac{c}{\log q} & \text{if } |t|\leq 1\end{cases}$$

  (abbiamo sottointeso $c_{14}\leq\frac{1}{2}c_{15}$)

- un'altra conseguenza riguarda la possibile successione $q_1,q_2,\ldots$ di interi positivi q con la proprietà che esiste un carattere reale primitivo $\chi(\bmod q)$ per cui $L(s,\chi)$ ha uno zero reale β che soddisfa

  $$\beta>1-c_{19}/\log q$$

Se c_{19} è scelta opportunamente, ad esempio $c_{19} = \frac{1}{3}c_{15}$, allora

$$q_{j+1} > q_j^2$$

Siccome abbiamo dimostrato che

$$\min(\beta_1, \beta_2) < 1 - \frac{c_{15}}{\log q_1 q_2}$$

allora segue che

$$1 - \frac{c_{19}}{\log q_j} < 1 - \frac{c_{15}}{\log q_j q_{j+1}}$$

da cui il risultato voluto.
Più precisamente, siano $q_1, q_2, \ldots$ e χ_j un carattere reale primitivo modulo q_j tale che esista β_j per cui $L(\beta_j, \chi_j) = 0$ con $\beta_j > 1 - \frac{c_3}{\log q_j}$.Allora

$$q_{j+1} > q_j^2$$

Infatti se per assurdo fosse $q_{j+1} \leq q_j^2$ allora

$$\min(\beta_j, \beta_{j+1}) < 1 - \frac{c_1}{\log(q_j q_{j+1})} < 1 - \frac{c_1}{3\log q_j} = 1 - \frac{c_3}{\log q_j} < 1 - \frac{c_3}{\log q_{j+1}}$$

con $c_3 = c_1/3$, ma questo è in contrasto con l'ipotesi su β_j

Corollario 9.8. ***(Page)***
Esiste una costante positiva opportuna c_{20} tale che esiste al più un carattere reale primitivo χ rispetto a un modulo $q \leq z$ $(z \geq 3)$ per il quale la funzione $L(s, \chi)$ ha uno zero reale β_χ che soddisfa

$$\beta_\chi > 1 - \frac{c_{20}}{\log z}$$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esistano due caratteri con queste proprietà, ovvero esistano (β_1, χ_1, q_1) e (β_2, χ_2, q_2) con $q_1, q_2 \leq z$ e tali che per $j = 1, 2$ valga

$$\beta_j > 1 - \frac{c_{20}}{\log z}$$

Allora avremmo

$$q_1 q_2 \leq z^2$$

da cui

$$\min(\beta_1, \beta_2) < 1 - \frac{c_{15}}{\log q_1 q_2} \leq 1 - \frac{c_{15}}{2\log z} = 1 - \frac{c_{20}}{\log z}$$

dove l'ultima uguaglianza vale se $c_{20} = \frac{c_{15}}{2}$. Tuttavia questo contraddice le ipotesi su β_j. $\square$

Se esistesse questo carattere reale "eccezionale" χ_1 rispetto a un certo modulo $q_1 \leq z$ allora q_1 sarebbe una funzione di z, e gli unici caratteri reali non principali χ rispetto a moduli $q \leq z$ per cui $L(s,\chi)$ ha uno zero reale che soddisfa

$$\beta_0 = \beta_\chi > 1 - \frac{c_{20}}{\log z}$$

sarebbero χ_1 e i caratteri non primitivi indotti da χ_1. I loro moduli saranno multipli di q_1.

Proposizione 9.9. *Sia χ un carattere reale primitivo modulo q. Allora vale*

$$L(1,\chi) > \frac{c_{21}}{\sqrt{q}}$$

Dimostrazione. Usando la formula del numero delle classi, siccome $h(d) \geq 1$, posto $d = \pm q$ nelle relazioni

$$h(d) = \frac{w|d|^{\frac{1}{2}}}{2\pi} L(1,\chi) \qquad \text{per } d < 0$$
$$h(d) = \frac{\sqrt{d}}{\log \varepsilon} L(1,\chi) \qquad \text{per } d > 0$$

si ottiene

$$L(1,\chi) > \frac{c_{21}}{\sqrt{q}}$$

□

Proposizione 9.10. *Dato χ un carattere modulo q qualunque, e*

$$1 - \frac{1}{\log q} \leq \sigma \leq 1$$

allora

$$\left|L'(\sigma,\chi)\right| < c_{22} \log^2 q$$

ovvero

$$L'(\sigma,\chi) \ll \log^2 q$$

Dimostrazione. Siccome $\sigma > 1$ (in realtà resta vera per $\sigma > 0$ in quanto $\log n/n^\sigma$ è decrescente) allora

$$L'(\sigma,\chi) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)(\log n)}{n^\sigma} = \sigma \int_2^\infty \left(\sum_{n \leq u} \chi(n) \right) \frac{1 + \sigma \log u}{u^{\sigma+1}} du$$

che converge uniformemente per $\sigma \geq \varepsilon$ (Abel).
Siccome $n \leq q$ e $\sigma \geq 1 - \frac{1}{\log q}$ allora

$$n^\sigma \geq \exp\left(\left(1 - \frac{1}{\log q}\right) \log n \right) \leq \frac{n}{e}$$

e quindi

$$\left|\sum_{n=1}^{q}\frac{\chi(n)(\log n)}{n^\sigma}\right| \le \sum_{n=1}^{q}\frac{\log n}{n} < c_{24}\log^2 q \ll \log^2 q$$

Inoltre

$$\left|\sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{\chi(n)(\log n)}{n^\sigma}\right| \le \sigma\int_q^\infty \left|\sum_{n\le u}\chi(n)\right|\frac{1+\log u}{u^2}du \ll q\int_q^\infty \frac{\log u}{u^2}du \ll q\frac{\log q}{q} = \log q$$

$(u^{\sigma-1} \ge q^{\sigma-1} \ge q^{-1/\log q} = \frac{1}{e})$.
Equivalentemente, per sommazione parziale, osservando che $\frac{\log n}{n^\sigma}$ decresce per $n > q$, abbiamo

$$\left|\sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{\chi(n)(\log n)}{n^\sigma}\right| \le \frac{\log q}{q^\sigma}\max_N\left|\sum_{q+1}^{N}\chi(n)\right|$$
$$\le \frac{(\log q)eq}{q}$$

Segue la tesi. □

Osservazione 9.11. *Lo stesso argomento vale se applicato a $L(\sigma,\chi)$. In tal caso si ha*

$$|L(\sigma,\chi)| < c_{25}\log q$$

per

$$1-\frac{1}{\log q} \le \sigma \le 1$$

Osservazione 9.12. *Siccome*

$$|L'(\sigma,\chi)| < c_{22}\log^2 q$$

per

$$1-\frac{1}{\log q} \le \sigma \le 1$$

allora segue che (usiamo il teorema del valore principale del calcolo differenziale), dato β_0 tale che $L(\beta_0,\chi)=0$, vale

$$L(1,\chi) = L(1,\chi) - L(\beta_0,\chi) = L'(\sigma,\chi)(1-\beta_0) \ll< (1-\beta_0)c_{22}\log^2 q$$

Siccome

$$L(1,\chi) > \frac{c_{21}}{\sqrt{q}}$$

segue che

$$\beta_0 < 1 - \frac{c_{23}}{\sqrt{q}\log^2 q}$$

(Se il discriminante del corpo quadratico associato è positivo allora si risparmia un $\log q$ *al denominatore).*
Per la solita motivazione, questo risultato vale anche per un carattere reale non principale e non primitivo χ*.*
Se $\chi(-1) = 1$ *allora (corrisponde al caso* $d > 0$*) la disuguaglianza può essere ulteriormente migliorata in modo che* $\beta_0 < 1 - cq^{-1/2}$ *se* $\chi(-1) = -1$ *oppure* $\beta_0 < 1 - cq^{-1/2} \log q$ *se* $\chi(-1) = 1$*.*

Capitolo 10

Formule esplicite per $\psi(x, \chi)$

Definizione 10.1. *Dato un carattere χ modulo q si definisce*

$$\psi(x, \chi) = \sum_{n \leq x} \chi(n)\Lambda(n)$$

Osservazione 10.2. *Osserviamo che se $\chi = \chi_0$ allora*

$$\begin{aligned}
\psi(x, \chi_0) &= \sum_{n \leq x,\ (n,q)=1} \Lambda(n) = \\
&= \psi(x) - \sum_{n \leq x,\ (n,q)>1} \Lambda(n) = \\
&= \psi(x) + O\left(\sum_{p|q} \sum_{a \leq \frac{\log x}{\log p}} \log p \right) = \\
&= \psi(x) + O\left(\log x \sum_{p|q} 1 \right) = \\
&= \psi(x) + O\left(\log x \log q\right) = \\
&= \psi(x) + O\left(\log^2(qx)\right)
\end{aligned}$$

Poniamo poi

$$\psi_0(x, \chi) = \sum_{n < x} \chi(n)\Lambda(n) + \begin{cases} \frac{1}{2}\chi(x)\Lambda(x) & \text{se } x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

Se $\chi \neq \chi_0$ allora

$$\psi_0(x, \chi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} -\frac{L'}{L}(s, \chi) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x \log^2 x}{T} + \log x \min\left(1, \frac{x}{T < x >}\right)\right)$$

dove
$$c = 1 + \frac{1}{\log x}$$
(abbiamo scritto l'integrale spezzato in quanto l'integrale non converge assolutamente e inoltre la stima del resto è la stessa in quanto il modulo di $\chi(n)$ è 1).
Cominciamo col calcolare i residui della funzione
$$-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\frac{x^s}{s}$$
Gli unici poli sono in corrispondenze degli zeri di $L(s,\chi)$ e in $s = 0$. Tuttavia, nel caso in cui $\chi(-1) = 1$ si ha una complicazione in quanto in questo caso uno degli zeri della funzione $L(s,\chi)$ stessa si trova proprio in $s = 0$. In questo caso quindi la funzione
$$-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\frac{x^s}{s}$$
ha un doppio polo in $s = 0$.
Analizziamo separatamente i due casi:

- **caso** $\chi(-1) = -1$
  In questo caso ($a = 1$) non ci sono problemi e i residui sono
  $$-\frac{x^{\rho_\chi}}{\rho_\chi}$$
  $$-\frac{L'(0,\chi)}{L(0,\chi)}$$
  $$-\frac{x^{-2m+1}}{1-2m} \quad (m \in \mathbb{N})$$
  Segue che la formula esplicita è
  $$\psi_0(x,\chi) = -\sum_{\rho_\chi}\frac{x^{\rho_\chi}}{\rho_\chi} - \frac{L'(0,\chi)}{L(0,\chi)} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{1-2m}}{2m-1}$$
  dove il membro di destra è la somma dei residui della funzione presa in considerazione.

- **Caso** $\chi(-1) = 1$
  In questo caso ($a = 0$) i residui sono
  $$-\frac{x^{\rho_\chi}}{\rho_\chi}$$
  $$-\log x - \lim_{s\to 0}\left(\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} - \frac{1}{s}\right)$$

$$\frac{x^{-2m}}{12m} \quad (m \in \mathbb{N})$$

Infatti, siccome $L(s,\chi)$ ha uno zero semplice in $s=0$, l'espansione in un intorno di $s=0$ di L'/L è della forma

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \frac{1}{s} + b + \cdots$$

dove $b = b(\chi)$.

Siccome

$$\frac{x^s}{s} = \frac{1}{s} + (\log x) + \cdots$$

il residuo della funzione

$$-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} \frac{x^s}{s}$$

in $s=0$ è

$$-(\log x + b)$$

dove

$$b = \lim_{s \to 0} \left(\frac{L'}{L}(s,\chi) - \frac{1}{s} \right)$$

La formula esplicita diventa quindi

$$\psi_0(x,\chi) = -\sum_{\rho_\chi} \frac{x^{\rho_\chi}}{\rho_\chi} - \log x - b(\chi) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{-2m}}{2m}$$

Osserviamo che $b(\chi)$ può essere espresso in termini di $B(\chi)$ usando la relazione

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = -\frac{1}{2} \log \frac{q}{\pi} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'\left(\frac{s+a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} + B(\chi) + \sum_{\rho_\chi} \left(\frac{1}{s-\rho_\chi} + \frac{1}{\rho_\chi} \right)$$

Vediamo ora la dimostrazione e la stima del termine di errore quando la somma è presa su $|\gamma| < T$.

Supponiamo $x \geq 2$ e $T \geq 2$. Il carattere $\chi(n)$ non influisce sulla stima della somma (perchè il suo modulo è 1) e quindi la stima resta uguale a quella usata per $\psi(x)$. Per quanto riguarda la scelta di T, lo scegliamo in modo che

$$\frac{L'(\sigma \pm iT,\chi)}{L(\sigma \pm iT,\chi)} = O\left(\log^2 qT\right) \quad \text{per } -1 \leq \sigma \leq 2$$

Osserviamo che il contributo dato dagli integrali dei tratti orizzontali all'interno di questo range per σ è perciò

$$\ll \frac{x \log^2 qT}{T \log x}$$

La stima per L'/L nel semipiano $\sigma \leq -1$, quando vengono esclusi cerchi di raggio $\frac{1}{2}$ inotrno agli zeri banali, è
$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = O[\log(q|s|)]$$
Infatti questa stima segue dalla derivata logaritmica dell'equazione funzionale di $L(s,\chi)$ nella sua forma antisimmetrica, ovvero
$$L(1-s,\chi) = \varepsilon(\chi)2^{1-s}\pi^{-s}q^{s-\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}\pi(s-a)\Gamma(s)L(s,\bar{\chi})$$
dove $|\varepsilon(\chi)| = 1$ e $a = 0$ oppure 1 (si ricava dalla forma simmetrica).
Il contributo della restante parte degli integrali orizzontali è perciò
$$\ll \frac{\log qT}{Tx\log x}$$
e quindi è trascurabile.
Segue che
$$\psi_0(x,\chi) = -\sum_{|\gamma_\chi|<T}\frac{x^{\rho_\chi}}{\rho_\chi} - (1-a)\log x - b(\chi) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{a-2m}}{2m-a} + R(x,T)$$
dove
$$|R(x,T)| \ll \frac{x}{T}\log^2(qxT) + (\log x)\min\left(1, \frac{x}{T\langle x\rangle}\right)$$
Se x è fissato, osserviamo che questo resto tende a 0 per $T \to \infty$, e quindi abbiamo il risultato
$$\psi_0(x,\chi) = -\sum_{\rho_\chi}\frac{x^{\rho_\chi}}{\rho_\chi} - \frac{L'(0,\chi)}{L(0,\chi)} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{1-2m}}{2m-1}$$
se $a = 1$ oppure il risultato
$$\psi_0(x,\chi) = -\sum_{\rho_\chi}\frac{x^{\rho_\chi}}{\rho_\chi} - \log x - b(\chi) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{-2m}}{2m}$$
se $a = 0$.
Se x è un intero è possibile sostituire la precedente stima per $|R(x,T)|$ con la seguente stima
$$|R(x,T)| \ll \frac{x}{T}\log^2(qxT)$$
Osserviamo ora che è possibile non fare più distinzioni tra ψ e ψ_0 in quanto non siamo più interessati ad avere formule esatte, ma con un termine di resto. Quindi è possibile semplificare la formula vista per ψ_0 assorbendo $\log x$ e la somma su m nel termine di errore. Possiamo usare la forma
$$|R(x,T)| \ll \frac{x}{T}\log^2(qxT)$$

del termine di errore in quanto il fatto di sostituire x con l'intero più vicino ha come effetto su $\psi_0(x,\chi)$ $\quad O(\log x)$.
Inoltre, per semplicità supponiamo $T \le x$. Allora

$$\psi(x,\chi) = -\sum_{|\gamma_\chi|<T} \frac{x^{\rho_\chi}}{\rho_\chi} - b(\chi) + R_1(x,T)$$

dove

$$|R_1(x,T)| \ll \frac{x}{T}\log^2 qx$$

Vogliamo ora esplicitare $b(\chi)$.
Siccome

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = -\frac{1}{2}\log\frac{q}{\pi} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s+a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)} + B(\chi) + \sum_{\rho_\chi}\left(\frac{1}{s-\rho_\chi} + \frac{1}{\rho_\chi}\right)$$

Sostituendo s con 2 e andando a sottrarre tra loro le due equazioni si ottiene

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = O(1) - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}a\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}a\right)} + \sum_{\rho_\chi}\left(\frac{1}{s-\rho_\chi} - \frac{1}{2-\rho_\chi}\right)$$

dove $O(1)$ è assoluta.
A questo punto abbiamo due casi:

- **Caso** $\chi(-1) = -1$
  In questo caso $a = 1$ e il termine $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ è regolare in $s = 0$
- **Caso** $\chi(-1) = 1$
  In questo caso $a = 0$ e la sua espansione in un intorno di $s = 0$ è

$$\frac{1}{s} + \text{cost} + \dots$$

Quindi il numero $b(\chi)$ che abbiamo definito prima come il valore di $L'(0,\chi)/L(0,\chi)$ nel primo caso e come il termine costante nell'espansione di $L'(s,\chi)/L(s,\chi)$ in un intorno di $s = 0$ nel secondo caso, soddisfa

$$b(\chi) = O(1) - \sum_{\rho_\chi}\left(\frac{1}{\rho_\chi} + \frac{1}{2-\rho_\chi}\right)$$

Per quanto riguarda i termini nella serie con $|\gamma_\chi| \ge 1$, abbiamo

$$\sum_{|\gamma_\chi|\ge 1}\left|\frac{1}{\rho_\chi} + \frac{1}{2-\rho_\chi}\right| = 2\sum_{|\gamma_\chi|\ge 1}\frac{1}{|\rho_\chi(2-\rho_\chi)|} \ll \sum_{|\gamma_\chi|\ge 1}\frac{1}{1+\gamma_\chi^2} \ll \log q$$

L'ultima somma può essere stimata come $O(\log q)$ usando la relazione seguente vista in precedenza

$$\sum_{\rho} \frac{1}{1+(t-\gamma)^2} = O(\mathscr{L})$$

dove $\mathscr{L} = \log q(|t|+2)$ e ponendo $t = 0$.
Inoltre

$$\sum_{|\gamma_\chi|\leq 1} \frac{1}{2-\rho_\chi} \ll \sum_{|\gamma_\chi|\leq 1} 1 \ll \log q$$

Segue che

$$b(\chi) = O(\log q) - \sum_{|\gamma_\chi|<1} \frac{1}{\rho_\chi}$$

Possiamo quindi riscrivere la formula per $\psi(x,\chi)$ come

$$\psi(x,\chi) = -\sum_{|\gamma_\chi|<T} \frac{x^{\rho_\chi}}{\rho_\chi} + \sum_{|\gamma_\chi|<1} \frac{1}{\rho_\chi} + R_2(x,T)$$

dove $R_2(x,T)$ soddisfa

$$|R_2(x,T)| \ll \frac{x}{T}\log^2(qxT)$$

Per un teorema visto in precedenza sappiamo che non esistono zeri della funzione $L(s,\chi)$ che soddisfano

$$|\gamma_\chi| < 1, \quad \beta_\chi > 1 - \frac{c}{\log q}$$

tranne eventualmente nel caso in cui χ è reale, dove in questo caso ci potrebbe essere uno zero reale semplice (ma non si sa). Qui c è una costante numerica che possiamo supporre minore di $\frac{1}{4}$, da cui $\beta_1 = \beta_\chi > \frac{3}{4}$, essendo $q \geq 3$.
Questo zero reale con queste caratteristiche è detto **zero eccezionale** e viene indicato con β_1.
Ci sarà anche uno zero nel punto $1-\beta_1$.
Indichiamo ora con Σ' la somma sugli zeri che esclude i possibili zeri β_1 e $1-\beta_1$.
La formula per $\psi(x,\chi)$ si può quindi riscrivere come

$$\psi(x,\chi) = -\sideset{}{'}\sum_{|\gamma_\chi|<T} \frac{x^{\rho_\chi}}{\rho_\chi} + \sideset{}{'}\sum_{|\gamma_\chi|<1} \frac{1}{\rho_\chi} - \frac{x^{\beta_1}-1}{\beta_1} - \frac{x^{1-\beta_1}-1}{1-\beta_1} + R_2(x,T)$$

La seconda somma può essere assorbita nel termine di errore in quanto

$$\frac{1}{\rho_\chi} = O(\log q)$$

per gli zeri in questione, e il loro numero è $O(\log q)$ (segue dalla formula per $N(T,\chi)$ con $T = 2$), ovvero

$$\sideset{}{'}\sum_{|\gamma_\chi|<1} \frac{1}{\rho_\chi} \ll \log^2 q$$

Possiamo anche trascurare il termine $\frac{1}{\beta_1}$, che è $O(1)$.
Infine
$$\frac{x^{1-\beta_1}-1}{1-\beta_1}=x^{\sigma}\log x$$
per qualche σ compreso tra 0 e $1-\beta_1$, e l'ultima espressione è minore di $x^{\frac{1}{4}}\log x$.
Come conseguenza, dato χ primitivo e $2\leq T\leq x$, vale la seguente relazione:
$$\psi(x,\chi)=-\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1}-\sum_{|\gamma|<T}{}' \frac{x^{\rho}}{\rho}+R_3(x,T)$$
dove
$$|R_3(x,T)|\ll\frac{x}{T}\log^2(qx)+x^{\frac{1}{4}}\log x$$
Osserviamo che il termine $-\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1}$ compare solo se χ è reale.
Infine mostriamo che
$$\psi(x,\chi)=-\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1}-\sum_{|\gamma|<T}{}' \frac{x^{\rho}}{\rho}+R_3(x,T)$$
dove
$$|R_3(x,T)|\ll\frac{x}{T}\log^2(qx)+x^{\frac{1}{4}}\log x$$
vale per qualunque carattere non principale χ, sia che sia primitivo o no.
Supponiamo che χ non sia primitivo e sia indotto dal carattere primitivo $\chi_1 \pmod{q_1}$.
La differenza tra $\psi(x,\chi)$ e $\psi(x,\chi_1)$ è al più
$$\sum_{\substack{n\leq x\\(n,q)>1}}\Lambda(n)=\sum_{p|q}\sum_{\nu\text{ t.c. } p^{\nu}\leq x}\log p\ll(\log x)\sum_{p|q}\log p\ll(\log x)(\log q)$$
che è trascurabile rispetto alla stima appena vista di $|R_3(x,T)|$, dove $T\leq x$.
Questa espressione si applica al termine di errore nella formula per $\psi(x,\chi_1)$ perchè $q>q_1$.
Abbiamo quindi
$$\left|\sum_{n\leq x}\Lambda(n)\chi(n)-\sum_{n\leq x}\Lambda(n)\chi_1(n)\right|\leq\sum_{\substack{n\leq x\\(n,q)>1}}\Lambda(n)\ll\log^2(qx)$$
Prestiamo ora attenzione alla definizione di zero eccezionale β_1: questa definizione coinvolge il modulo, quindi supponendo di usare la stessa definizione quando χ non è primitivo, uno zero eccezionale per $L(s,\chi)$ sarà certamente uno zero eccezionale per $L(s,\chi_1)$, ma non necessariamente viceversa.
Tuttavia, se uno zero è eccezionale per χ_1 ma non per χ, il termine $-\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1}$, che è reso esplicito nella formula per $\psi(x,\chi_1)$, rimarrà presente anche nella formula per $\psi(x,\chi)$, in quanto comparirà in quel caso nella somma $-\sum' \frac{x^{\rho}}{\rho}$. Quindi la formula resta valida.
I risultati trovati finora si possono raggruppare nel seguente teorema.

Teorema 10.3. ***(Formula esplicita per** $\psi(x,\chi)$**)***
Se χ è un carattere non principale rispetto al modulo q e $2 \leq T \leq x$ allora

$$\psi(x,\chi) = -\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} - \sideset{}{'}\sum_{|\gamma_\chi|<T} \frac{x^{\rho_\chi}}{\rho_\chi} + R_3(x,T)$$

dove

$$|R_3(x,T)| \ll \frac{x}{T}\log^2 qx + x^{\frac{1}{4}}\log x$$

Il termine $-\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1}$ deve essere omesso tranne nel caso in cui χ è un carattere reale per cui $L(s,\chi)$ ha uno zero β_1 (che è necessariamente unico e semplice) che soddisfa

$$\beta_1 > 1 - \frac{c}{\log q}$$

dove c è una certa costante assoluta; inoltre la somma $\sum'$ esclude β_1 e $1-\beta_1$ (se esistono).

Come abbiamo già visto esiste al più un solo carattere reale $(\mathrm{mod} q)$ per cui questo zero β_1 può esistere.
Inoltre si può notare che il termine $x^{\frac{1}{4}}\log x$ può essere omesso nel caso in cui β_1 non esiste.

Capitolo 11

Il teorema di Siegel

Esistono due forme del Teorema di Siegel.

Teorema 11.1. ***(Prima forma)***
Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero positivo $C_1(\varepsilon)$ tale che, se χ è un carattere primitivo reale rispetto al modulo q, allora

$$L(1, \chi) > C_1(\varepsilon) q^{-\varepsilon}$$

Dimostrazione. Usiamo il metodo di Estermann.
L'idea di base è quella di trovare una combinazione tra le funzioni L di due caratteri.
Siano χ_1, χ_2 due caratteri reali primitivi rispetto ai moduli rispettivamente q_1, q_2. Abbiamo già visto che il carattere $\chi_1 \chi_2$ non è principale (anche se non è necessariamente primitivo) rispetto al modulo $q_1 q_2$.
Sia ora

$$F(s) = \zeta(s) L(s, \chi_1) L(s, \chi_2) L(s, \chi_1 \chi_2)$$

Allora $F(s)$ è regolare in tutto il piano ad eccezione di un polo semplice in $s = 1$, e il suo residuo in corrispondenza di questo polo è

$$\lambda = L(1, \chi_1) L(1, \chi_2) L(1, \chi_1 \chi_2)$$

Un ruolo essenziale nella dimostrazione del Teorema di Siegel viene ricoperto dalla seguente disuguaglianza:

$$F(s) > \frac{1}{2} - \frac{c_4 \lambda}{1 - s} (q_1 q_2)^{8(1-s)} \qquad \text{per } \frac{7}{8} < s < 1$$

(s è reale).
Cominciamo quindi col dimostrare la seguente disuguaglianza.
Moltiplicando i vari prodotti di Eulero si ottiene

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

per $\sigma > 1$, dove $a_1 = 1$ e $a_n \geq 0$ per ogni n. Infatti

$$\log F(s) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} p^{-ms} \left[1 + \chi_1\left(p^m\right)\right] \left[1 + \chi_2\left(p^m\right)\right]$$

dove i coefficienti sono ovviamente non negativi.
Con lo stesso ragionamento usato da de la Vallèe Poussin si ha in un intorno di $s = 2$ che

$$F(s) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (2-s)^m$$

per $|s-2| < 1$, dove $b_0 \geq 1$ e $b_m \geq 0$ per ogni m in quanto

$$b_m = \frac{(-1)^m}{m!} \frac{d^m}{(ds)^m} (F(s))_{s=2} = \frac{1}{m!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (\log n)^m}{n^2} \geq 0$$

Siccome

$$\frac{1}{s-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (2-s)^m$$

segue che

$$F(s) - \frac{\lambda}{s-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(b_m - \lambda\right) (2-s)^m$$

per $|s-2| \leq \frac{3}{2}$ (il membro a sinistra è regolare in quanto in 1 non abbiamo più problemi perchè abbiamo tolto la parte singolare e quindi possiamo arrivare almeno fino a 1/2).
Sulla circonferenza del cerchio $|s-2| = \frac{3}{2}$, la funzione $\zeta(s)$ è limitata e le funzioni L soddisfano $(1/2 \leq s < 1)$

$$\left|L\left(s, \chi_1\right)\right| < c_5 q_1, \quad \left|L\left(s, \chi_2\right)\right| < c_5 q_2, \quad \left|L\left(s, \chi_1 \chi_2\right)\right| < c_5 q_1 q_2,$$

per un risultato visto in precedenza, quindi vale anche per $\frac{7}{8} < s < 1$.
Quindi

$$|F(s)| < c_6 q_1^2 q_2^2$$

sulla circonferenza e lo stesso vale per $\frac{\lambda}{(s-1)}$, in quanto λ è il prodotto di tre funzioni L che soddisfano le disugugaglianze appena trovate.
Segue dalle disuguaglianze di Cauchy per i coefficienti di una serie di potenze, applicate a

$$F(s) - \frac{\lambda}{(s-1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(b_m - \lambda\right) (2-s)^m$$

che

$$\left|b_m - \lambda\right| < 2 c_6 q_1^2 q_2^2 \left(\frac{2}{3}\right)^m$$

Per $\frac{7}{8} \leq s < 1$ abbiamo

$$\begin{aligned}\sum_{m=M}^{\infty} |b_m - \lambda| (2-s)^m &\leq \sum_{m=M}^{\infty} 2c_6 q_1^2 q_2^2 \left| \frac{2}{3}(2-s) \right|^m \leq \\ &\leq 2c_6 q_1^2 q_2^2 \sum_{m=M}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^m < \\ &< c_7 q_1^2 q_2^2 \left(\frac{3}{4}\right)^M < \\ &< c_7 q_1^2 q_2^2 e^{-M/4}\end{aligned}$$

dove $e^{-1/4} > \frac{3}{4}$ in quanto $e^{-x} = 1 - x + x^2 \cdots > 1 - x$.
Quindi in questo intervallo

$$\begin{aligned}F(s) - \frac{\lambda}{s-1} &\geq 1 - \lambda \sum_{m=0}^{M-1} (2-s)^m - c_7 q_1^2 q_2^2 e^{-M/4} = \\ &= 1 - \lambda \frac{(2-s)^M - 1}{1-s} - c_7 q_1^2 q_2^2 e^{-M/4}\end{aligned}$$

Scegliamo M in modo che

$$\frac{1}{2} e^{-1/4} \leq c_7 q_1^2 q_2^2 e^{-M/4} < \frac{1}{2}$$

e otteniamo quindi

$$F(s) > \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{1-s}(2-s)^M$$

Siccome

$$\frac{1}{4} M \leq 2 \log q_1 q_2 + c_8$$

ovvero

$$M \leq 8 \log q_1 q_2 + c_9$$

allora abbiamo

$$(2-s)^M = \exp[M \log(1 + 1 - s)] < \exp[M(1-s)] < c_{10} \left(q_1 q_2\right)^{8(1-s)}$$

ovvero abbiamo dimostrato la disugugaglianza voluta.
A questo punto, per dedurre il Teorema di Siegel, distinguiamo due casi sulla base del numero positivo ε dato:

- se esiste un carattere reale primitivo per cui $L(s, \chi)$ ha uno zero reale compreso tra $1 - \frac{1}{16}\varepsilon$ e 1, allora scegliamo come χ_1 questo carattere preso in considerazione e come β_1 lo zero in questione.
  Segue che $F(\beta_1) = 0$, indipendentemente da quale sia il carattere χ_2.

- se non esiste un carattere del tipo precedente, allora scelgo come χ_1 un qualunque carattere reale primitivo e come β_1 un qualunque numero che soddisfa $1 - \frac{1}{16}\varepsilon < \beta_1 < 1$. Segue che $F(\beta_1) < 0$, indipendentemente da quale sia il carattere χ_2, in quanto per $0 < s < 1$ si ha $\zeta(s) < 0$ mentre le tre funzioni L sono positive in $s = 1$ e non si annullano per $\beta_1 \leq s \leq 1$.

Quindi, in entrambi i casi esiste β_1 tale che $F(\beta_1) \leq 0$ e la disuguaglianza dimostrata ci fornisce la seguente relazione:

$$c_4\lambda > \frac{1}{2}(1-\beta_1)(q_1q_2)^{-8(1-\beta_1)}$$

Da adesso in poi teniamo χ_1 e β_1 fissi.
Sia χ_2 un qualunque carattere reale primitivo rispetto a un modulo $q_2 > q_1$.
Segue che

$$\lambda < (c_{11}\log q_1) L(1,\chi_2)(c_{11}\log q_1q_2)$$

Quindi

$$L(1,\chi_2) > Cq_2^{-8(1-\beta_1)}(\log q_2)^{-1}$$

dove C dipende solo da χ_1, e perciò solo da ε.
Siccome $8(1-\beta_1) < \frac{1}{2}\varepsilon$, allora l'ultima disuguaglianza implica che

$$L(1,\chi_2) > C_1(\varepsilon)q_2^{-\varepsilon}$$

se q_2 è sufficientemente grande (come possiamo supporre).
Abbiamo così dimostrato il Teorema di Siegel. □

Teorema 11.2. ***(Seconda forma)***
Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero positivo $C_3(\varepsilon)$ tale che, se χ è un qualunque carattere reale non principale con modulo q allora $L(s,\chi) \neq 0$ per

$$s > 1 - C_3(\varepsilon)q^{-\varepsilon}$$

Dimostrazione. Segue dalla prima forma, usando la relazione vista in precedenza

$$L'(s,\chi) = O\left(\log^2 q\right)$$

per $1 - \frac{1}{\log q} \leq s \leq 1$.
Ragioniamo per assurdo.
Se q è grande (possiamo supporlo) allora uno zero β_χ di $L(s,\chi)$ che soddisfa

$$s > 1 - C_3(\varepsilon)q^{-\varepsilon}$$

si trova nell'intervallo

$$1 - \frac{1}{\log q} \leq s \leq 1$$

Segue che

$$L(1,\chi) = L(1,\chi) - L(\beta,\chi) = L'(s,\chi)(1-\beta_1) < c_1 \left(\log^2 q\right) C_3(\varepsilon) q^{-\varepsilon}$$

Tuttavia il risultato ottenuto contraddice la prima forma del Teorema di Siegel secondo cui

$$L(1,\chi) > C_1(\varepsilon) q^{-\varepsilon}$$

nel caso in cui si sostituisce ε con $\frac{1}{2}\varepsilon$.
Abbiamo quindi dimostrato la seconda forma del teorema nel caso in cui χ è primitivo; tuttavia questo basta a dimostrare la tesi quando χ è un qualunque carattere reale non principale. □

Corollario 11.3. *Vale*

$$\beta_1 > C(\varepsilon) q^{-\varepsilon} \log^2 q > C'(\varepsilon) q^{-\frac{\varepsilon}{2}}$$

Dimostrazione. Usiamo Lagrange. □

Corollario 11.4. *Ogni zero reale β_χ di $L(s,\chi)$, con χ carattere reale non principale, soddisfa*

$$\beta_\chi \leq 1 - C_3(\varepsilon) q^{-\varepsilon}$$

Osservazione 11.5. *Osserviamo che:*

- *vale*

$$\beta_1 > c(\varepsilon) q^{-\varepsilon} \log^2 q \geq c(\varepsilon) q^{-\varepsilon/2}$$

- *come conseguenza*

$$x^{\beta_1} < x \exp\left(-\frac{c(\varepsilon)\log x}{q^\varepsilon}\right)$$

  Se $q \leq (\log x)^N$ con $N > 0$ e si prende $\varepsilon = \frac{1}{2N}$, allora

$$q^\varepsilon = q^{\frac{1}{2N}} \leq (\log x)^{\frac{1}{2}}$$

  e si ottiene la formula asintotica

Capitolo 12

Il teorema dei numeri primi per le progressioni aritmetiche

Definiamo innanzitutto la seguente funzione

$$\psi(x;q,a) = \sum_{\substack{n\leq x \\ n\equiv a(\bmod q)}} \Lambda(n)$$

Dalla relazione di ortogonalità vista in precedenza

$$\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi}\bar{\chi}(a)\chi(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n\equiv a(\text{mod} q) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

segue che

$$\psi(x;q,a) = \frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi}\bar{\chi}(a)\psi(x,\chi)$$

dove la somma è fatta su tutti i caratteri modulo q.
Il contributo del carattere principale χ_0 nella somma ci dà il termine principale.
Con un ragionamento simile a quello del capitolo precedente si ha

$$|\psi\left(x,\chi_0\right) - \psi(x)| \leq \sum_{\substack{n\leq x \\ (n.q)>1}} \Lambda(n) \ll (\log q)(\log x)$$

Sappiamo poi che per il Teorema dei numeri primi di de la Vallèe Poussin si ha

$$\psi(x) = x + O\left(x\exp\left(-c_1(\log x)^{\frac{1}{2}}\right)\right)$$

dove c_1 è una costante positiva.
Segue che, se $(a,q)=1$, vale

$$\psi(x;q,a) = \frac{x}{\phi(q)} + \frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\bar{\chi}(a)\psi(x,\chi) + O\left(\frac{1}{\phi(q)}\left\{x\exp\left[-c_1(\log x)^{\frac{1}{2}}\right] + \log^2 qx\right\}\right)$$

Nel caso in cui $\chi \neq \chi_0$ allora sappiamo già che $\psi(x,\chi)$ diventa

$$\psi(x,\chi) = -\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} - \sum_{|\gamma_\chi|<T}{}' \frac{x^{\rho_\chi}}{\rho_\chi} + R_3(x,T)$$

dove

$$|R_3(x,T)| \ll \frac{x}{T}\log^2 qx + x^{\frac{1}{4}}\log x$$

supposto che $2 \leq T \leq x$.
Il termine che contiene β_1 compare per al più un carattere reale non principale χ.
Sappiamo poi che tutti gli zeri ρ_χ che compaiono nella somma a destra soddisfano

$$\beta < 1 - \frac{c_2}{\log(qT)}$$

per qualche costante assoluta positiva c_2.
Quindi

$$|x^{\rho_\chi}| = x^\beta < x\exp\left(-c_2\frac{\log x}{\log(qT)}\right)$$

Stimiamo quindi la somma

$$\left|\sum_{|\gamma_\chi|<T}{}' \frac{x^{\rho_\chi}}{\rho_\chi}\right| \leq \sum_{1\leq|\gamma_\chi|<T}{}' \frac{x^{\beta_\chi}}{|\gamma_\chi|} + \sum_{|\gamma_\chi|\leq 1}{}' \frac{x^{\beta_\chi}}{|\gamma_\chi|}$$

Osserviamo che

$$\sum_{1\leq|\gamma_\chi|<T}{}' \frac{1}{|\gamma_\chi|} \ll \int_1^T \frac{N(t,\chi)}{t^2}dt \ll \int_1^T \frac{\log(qt)}{t}dt \ll \log^2(qT) \ll \log^2(qx)$$

$$\sum_{|\gamma_\chi|\leq 1}{}' \frac{1}{|\gamma_\chi|} \ll \log^2 q$$

Segue che

$$\psi(x,\chi) = -\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} + R_4(x,T)$$

dove

$$|R_4(x,T)| \ll x\left(\log^2(qx)\right)\exp\left(-c_2\frac{\log x}{\log(qT)}\right) + \frac{x}{T}\log^2(qx) + x^{\frac{1}{4}}\log x$$

Bisogna fare delle ipotesi sulla dimensione di q in relazione a quella di x. Se supponiamo che

$$q \leq \exp\left(C\sqrt{\log x}\right)$$

dove C è una qualunque costante positiva e scegliamo

$$T = \exp\left(C\sqrt{\log x}\right)$$

allora tutti i termini nella stima di $|R_4(x,T)|$ sono

$$\ll x \exp\left(-C'\sqrt{\log x}\right)$$

per qualche costante positiva C' che dipende solo da C.
Quindi abbiamo

$$\psi(x,\chi) = -\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} + O\left(x\exp\left(-C'\sqrt{\log x}\right)\right)$$

per ogni carattere χ non principale.
Se quindi andiamo a sostituire nella formula che lega $\psi(x;q,a)$ con $\psi(x,\chi)$ e ricordando che il termine che contiene β_1 compare per al più un carattere χ, otteniamo il seguente teorema:

Teorema 12.1. *Sia C una qualsiasi costante positiva. Allora*

$$\psi(x;q,a) = \frac{x}{\phi(q)} - \frac{\bar{\chi}_1(a)x^{\beta_1}}{\phi(q)\beta_1} + O\left(x\exp\left(-C'\sqrt{\log x}\right)\right)$$

dove C' è una costante positiva che dipende solo da C, e questo risultato vale uniformemente rispetto a q nel range

$$q \leq \exp\left(C\sqrt{\log x}\right)$$

Qui χ_1 è l'unico carattere reale $\bmod q$, se esiste, per cui $L(s,\chi_1)$ ha uno zero reale β_1 che soddisfa

$$\beta_1 > 1 - \frac{c}{\log q}$$

per una certa costante positiva assoluta c.

Le difficoltà maggiori nello studio della distribuzione dei numeri primi nelle progressioni aritmetiche sono dovute al termine contenente β_1. L'unica limitazione universale che abbiamo per β_1 è

$$\beta_1 < 1 - \frac{c_3}{\sqrt{q}\log^2 q}$$

Segue che il termine contenente β_1 diventa

$$\ll \frac{x}{\phi(q)}\exp\left(-c_3\frac{\log x}{\sqrt{q}\log^2 q}\right)$$

Questo termine sarà dello stesso ordine del termine di errore $O\left(x\exp\left(-C'\sqrt{\log x}\right)\right)$ solo se imponiamo una condizione molto restrittiva su q, ovvero

$$q \leq (\log x)^{1-\delta}$$

per qualche $\delta > 0$ fissato.
Otteniamo quindi il seguente risultato.

Proposizione 12.2. *Supponiamo che*

$$q \leq (\log x)^{1-\delta}$$

per qualche $\delta > 0$ fissato. Allora

$$\psi(x; q, a) = \frac{x}{\phi(q)} + O\left(x \exp\left(-c_4\sqrt{\log x}\right)\right)$$

dove c_4 è una costante assoluta.

Questo è un risultato debole, ma è l'unico, a meno di piccole variazioni, che è effettivo, ovvero dato un valore numerico di δ, si possono calcolare esplicitamente i valori di c_4 e della costante indotta dal simbolo O.

Proposizione 12.3. ***(Page)***
Sia C una qualunque costante. Allora, tranne nel caso in cui q è un multiplo di un particolare intero q_1 che dipende da x, abbiamo

$$\psi(x; q, a) = \frac{x}{\phi(q)} + O\left(x \exp\left(-C''\sqrt{\log x}\right)\right)$$

dove C'' è una costante positiva che dipende solo da C, e questo vale uniformemente rispetto a q nel range

$$q \leq \exp\left(C\sqrt{\log x}\right)$$

Inoltre l'intero q_1 soddisfa la relazione

$$q_1 \log^4 q_1 \gg \log x$$

Dimostrazione. Abbiamo visto in precedenza che Page dimostrò il seguente risultato:

Esiste una costante positiva opportuna c_{20} tale che esiste al più un carattere reale primitivo χ rispetto a un modulo $q \leq z$ $(z \geq 3)$ per il quale la funzione $L(s, \chi)$ ha uno zero reale β_χ che soddisfa

$$\beta_\chi > 1 - \frac{c_{20}}{\log z}$$

Se prendiamo in particolare

$$z = \exp\left(C\sqrt{\log x}\right)$$

allora possiamo dedurre che esiste al più un carattere reale primitivo rispetto a un modulo che non supera z per cui

$$\beta_1 > 1 - \frac{c_5}{\log z} = 1 - \frac{c_5}{C\sqrt{\log x}}$$

Indichiamo il modulo di questo carattere, se esiste, con q_1.
Se q non è multiplo di q_1 allora

$$\beta_1 \leq 1 - \frac{c_5}{C\sqrt{\log x}}$$

per ogni carattere reale non principale $\chi \pmod q$, sia che sia primitivo oppure no. Otteniamo quindi lo stesso tipo di stima per il termine contenente β_1 come prima. Osserviamo però che, se q_1 esiste, deve soddisfare

$$1 - \frac{c_5}{C\sqrt{\log x}} \leq 1 - \frac{c_3}{\sqrt{q_1}\log^2 q_1}$$

ovvero

$$q_1 \log^4 q_1 \gg \log x$$

□

Ricordiamo che l'**ipotesi di Riemann generalizzata** (GRH) afferma che non solo la funzione $\zeta(s)$ ma tutte le funzioni $L(s,\chi)$ hanno i loro zeri nella striscia critica sulla retta $\sigma = \frac{1}{2}$.
Abbiamo già visto che

$$\psi(x) = x + O\left(x^{\frac{1}{2}}\log^2 x\right)$$

e lo stesso vale per $\psi(x,\chi_0)$ grazie alla disuguaglianza

$$|\psi(x,\chi_0) - \psi(x)| \leq \sum_{\substack{n\leq x\\(n.q)>1}} \Lambda(n) \ll (\log q)(\log x)$$

avendo supposto che $q \leq x$.
Inoltre, quando $\chi \neq \chi_0$, l'uguaglianza vista precedentemente

$$\psi(x,\chi) = -\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} - \sideset{}{'}\sum_{|\gamma_\chi|<T} \frac{x^{\rho_\chi}}{\rho_\chi} + R_3(x,T)$$

dove

$$|R_3(x,T)| \ll \frac{x}{T}\log^2 qx + x^{\frac{1}{4}}\log x$$

implica, supponendo vera l'ipotesi di Riemnn generalizzata, che

$$|\psi(x,\chi)| \ll x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\sum_{|\gamma_\chi|<T}\frac{1}{|\rho|} + \frac{x}{T}\log^2 qx + x^{\frac{1}{4}}\log x$$

per $2 \leq T \leq x$.
Inoltre, siccome abbiamo mostrato che

$$\sum \frac{1}{|\rho|} \ll \log^2 qx$$

allora, prendendo $T = x^{\frac{1}{2}}$, otteniamo

$$|\psi(x,\chi)| \ll x^{\frac{1}{2}}\log^2 x$$

per $\chi \neq \chi_0$ e $q \leq x$.
Segue il seguente risultato.

Teorema 12.4. *Supponendo vera l'ipotesi di Riemann generalizzata, se $q \leq x$ allora*

$$\psi(x; q, a) = \frac{x}{\phi(q)} + O\left(x^{\frac{1}{2}} \log^2 x\right)$$

Teorema 12.5. ***(Siegel-Walfisz)***
Sia N una costante positiva qualunque. Allora esiste un numero positivo $C_3(N)$, che dipende solo da N, tale che se q soddisfa $q \leq (\log x)^N$ allora

$$\psi(x; q, a) = \frac{x}{\phi(q)} + O\left(x \exp\left(-C_3(N)\sqrt{\log x}\right)\right)$$

uniformemente in q.

Dimostrazione. Se supponiamo

$$q \leq \exp\left(C\sqrt{\log x}\right)$$

per qualche costante positiva C allora sappiamo che per $\chi \neq \chi_0$ vale

$$\psi(x, \chi) = -\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} + O\left(x \exp\left(-C'\sqrt{\log x}\right)\right)$$

dove C' è una costante positiva che dipende solo da C.
Qui il termine in β_1 compare per al più un solo carattere reale modulo q.
Il teorema di Siegel afferma che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $C_1(\varepsilon)$ tale che

$$\beta_1 < 1 - C_1(\varepsilon)q^{-\varepsilon}$$

Quindi

$$x^{\beta_1} < x \exp\left(-C_1(\varepsilon)(\log x)q^{-\varepsilon}\right)$$

Per fare in modo che questa espressione sia piccola se comparata con x si deve imporre una condizione più restrittiva su q.
Supponiamo quindi che

$$q \leq (\log x)^N$$

per qualche costante positiva N. Allora, prendendo $\varepsilon = (2N)^{-1}$ abbiamo $q^\varepsilon \leq \sqrt{\log x}$ e

$$x^{\beta_1} < x \exp\left(-C_2(N)\sqrt{\log x}\right)$$

Quindi, ricordando che $q \leq (\log x)^N$, si ottiene

$$|\psi(x, \chi)| \ll x \exp\left(-C_3(N)\sqrt{\log x}\right)$$

per ogni carattere non principale χ modulo q.
Andando a sostituire nella formula

$$\psi(x; q, a) = \frac{x}{\phi(q)} + \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \bar{\chi}(a)\psi(x, \chi) + O\left(\frac{1}{\phi(q)}\left\{x \exp\left[-c_1(\log x)^{\frac{1}{2}}\right] + \log^2 qx\right\}\right)$$

otteniamo la tesi. $\square$

Ricordiamo ora che l'Ipotesi di Riemann generalizzata afferma che $\beta_\chi = \frac{1}{2}$ per ogni ρ_χ, per ogni χ (compreso χ_0).
Supponendo vera:

- **R.H.** allora si ha

$$\psi(x) = x + O(x^{\frac{1}{2}} \log^2 x) \qquad (T = \sqrt{x})$$

- **Q.R.H.** si ha

$$\psi(x, \chi) = x + O(x^{\frac{1}{2}} \log^2 x) \qquad (T = \sqrt{x},\ q = \sqrt{x})$$

Come conseguenza si avrebbe

$$\psi(x, q, a) = \frac{x}{\phi(q)} + O(x^{\frac{1}{2}} \log^2 x)$$

Teorema 12.6. ***(Bombieri)***
Posto

$$E(x, q, a) = \psi(x; q, a) - \frac{x}{\phi(q)}$$

si ha che per ogni $A > 0$ esiste $B > 0$ tale che

$$\sum_{q \leq \frac{\sqrt{x}}{(\log x)^B}} \max_{(a,q)=1} \max_{y \leq x} |E(y, q, a)| \ll \frac{x}{(\log x)^A}$$

($B = A + 5$)

Osservazione 12.7. *In particolare, supponendo che sia vera l'ipotesi di Riemann generalizzata, vale*

$$\sum_{q \leq \frac{\sqrt{x}}{(\log x)^B}} \max_{(a,q)=1} |E(x, q, a)| \ll \sqrt{x}(\log x)^2 \sum_{q \leq \frac{\sqrt{x}}{(\log x)^B}} 1 \ll \frac{x}{(\log x)^{B-2}}$$

(ovvero $A = B - 2$ nel teorema precedente e quindi $B = A + 2$ è quello che ci dà l'ipotesi di Riemann).