Analisi Complessa

Alessandra Tullini

March 2017

Indice

Questi appunti sono stati presi durante la parte finale del corso di Geometria II tenuto nell'a.a.2016/2017, e integrati sfruttando vari testi di Analisi Complessa. Sono ancora in fase di costruzione, per cui mi scuso per i vari errori che potrebbero esserci e vi invito a contattarmi all'indirizzo `tullini[at]mail.dm.unipi.it` per segnalarmeli.

Successioni e Serie in $\mathbb{C}$

Tutto quello che diremo fa affidamento sul fatto che se $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successioni di numeri complessi con $z_n = x_n + iy_n$, e $z = x + iy$ è il suo limite, allora

$$z = \lim_{n\to\infty} z_n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x \wedge \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

Alcuni esempi di successioni che ci sarà utile tenere sempre a mente sono dati dalle seguenti *serie* a valori complessi:

- $e^z = \sum\limits_n \frac{z^n}{n!}$
- $sinz = \sum\limits_n \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$
- $cosz = \sum\limits_n \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^n$
- $-ln(1-z) = \sum\limits_n \frac{z^n}{n}$

Segue dunque che se $z = x + iy \Rightarrow e^z = e^x(cosy + isiny)$.

Teorema (di Moltiplicazione di Cauchy)**.** *Se le serie* $\sum\limits_n a_n$ *e* $\sum\limits_n b_n$ *convergono assolutamente* $\Rightarrow \sum\limits_n a_n \sum\limits_n b_n = \sum\limits_n (\sum\limits_{m=o}^{n} a_m b_{n-m})$.

Corollario. $\forall w, z \in \mathbb{C}, e^{w+z} = e^z e^w$.

Dimostrazione. $e^{z+w} = \sum\limits_n (\sum\limits_{m=o}^{n} \frac{z^m w^{n-m}}{m!(n-m)!}) = (\sum\limits_n \frac{z^n}{n!})(\sum\limits_m \frac{w^m}{m!}) = e^z e^w.$ $\square$

Differenziabilità in $\mathbb{C}$

Definizione. *Una funzione $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$, con $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, si dice* ***differenziabile*** *in z se $\exists \lim\limits_{w\to z} \frac{f(z)-f(w)}{w-z}$. In tal caso, il limite è detto derivata di f in z e lo si indica con $f'(z)$.*

Valgono le solite regole di derivazione per somma, prodotto e composizione.

Esempio. *$f(z) = z$ è differenziabile su $\mathbb{C}$ e ha derivata $f'(z) = 1$*

Nonostante la nozione di derivata complessa appaia del tutto analoga a quella di derivata reale, si dà comunque una definizione più specifica per le funzioni complesse che ammettono derivata complessa.

Definizione. *$f : U \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, con U aperto di $\mathbb{C}$, è differenziabile in U se lo è in ogni suo punto. In tal caso si dice che f è* ***olomorfa*** *in U.*

Vorremmo ora capire quali condizioni siano sufficienti affinchè una funzione di due variabili reali, interpretata come funzione di variabile complessa, sia olomorfa. Per affrontare il problema ci sarà utile il cosiddetto **campo vettoriale reale associato ad** f, ovvero:

$$\begin{aligned} F : U \subseteq \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (u(x, y), v(x, y)) \end{aligned}$$

Se f è olomorfa in $z_0 = x_0 + iy_0$, e $w = h + ik$, allora in un intorno di z_0 si può esprimere nella forma

$$f(z_0 + w) = f(z_0) + f'(z_0)w + \sigma(w)w,$$

dove $\lim\limits_{w\to 0} \sigma(w) = 0$. Equivalentemente:

$$F(x_0 + h, y_0 + k) - F(x_0, y_0) = ah + bk + \sigma(h, k)\sqrt{h^2 + k^2},$$

dove $\sigma(h, k) \to 0$ se $(h, k) \to 0$.

Confrontando le due scritture deduciamo

$$a = f'(z_0), \quad b = if'(z_0)$$

da cui

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'(z_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = if'(z_0),$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Poichè f è olomorfa allora il suo campo vettoriale reale associato F è differenziabile; quindi possiamo anche calcolarne il differenziale:

$$J_F(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}$$

Ma per quanto osservato poc'anzi, questo differenziale ha una forma ben precisa:

$$J_F = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Queste stringenti condizioni sulle derivate parziali del campo vettoriale reale, sono racchiuse nelle **Equazioni di Cauchy-Riemann**:

1. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

2. $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

e ci permettono di osservare che l'operatore lineare $J_F(x,y)$ applicato ad un numero complesso z agisce come moltiplicazione per il numero complesso $a + ib = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$.

Un'altra caratteristica delle funzioni olomorfe ci è svelata dal calcolo del determinante della matrice jacobiana relativa al loro campo vettoriale reale; vediamo perchè.

$$\Delta_F = det J_F = det \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$det J_F = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2.$$

Dunque possiamo cominciare con l'osservare che:

- $\Delta_F \geq 0$ e $\Delta_F(x,y) = 0 \Leftrightarrow f'(x+iy) = 0$ poichè $\Delta_F = \|f'(z)\|_2^2$;
- $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z)$;

Per proseguire, ci servirà la seguente definizione.

Definizione. *$u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ si dice* ***funzione armonica*** *se $\Delta u = 0$, dove Δ è l'operatore Laplaciano $\Delta u = (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2$.*

Sia ora $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ olomorfa. Calcoliamo il Laplaciano della sua parte reale u sfruttando le equazioni di Cauchy-Riemann:

$$\Delta_{Ref} = \Delta_u = (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y}) =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial v}{\partial x}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial v}{\partial y}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Lo stesso calcolo si può fare per la componente immaginaria della funzione f, dunque abbiamo il seguente teorema.

Teorema. *La parte reale e la parte immaginaria di una qualsiasi funzione olomorfa f sono funzioni armoniche.*

Esempio. *La funzione $ln(\|z\|)$ è armonica su $\mathbb{C} - \{0\}$ in quanto parte reale della funzione logaritmo principale $Log_{[-\pi,\pi]}(z) = ln(\|z\|) + iArg(z)$, che ristretta a $\mathbb{C} - \mathbb{R}^-$ è olomorfa.*
Osserviamo tuttavia che $ln(\|z\|)$ non è globalmente parte reale di una funzione olomorfa, e questo perchè $\mathbb{C} - \{0\}$ non è semplicemente connesso.

Dunque, ad ora, siamo sicuri della validità del seguente teorema.

Teorema. *Sia $f : U \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, con U aperto. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- *f è olomorfa in U;*
- *$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ campo vettoriale associato ad f è differenziabile e valgono le equazioni di Cauchy-Riemann.*

Corollario (Caratterizzazione delle funzioni olomorfe costanti)**.** *Sia U aperto e connesso e sia $f : U \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.*

$$f \text{ è costante su } U \Leftrightarrow f \text{ è olomorfa e } f'(z) = 0 \ \forall z \in U$$

In particolare, se vediamo f come funzione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ e verifichiamo che f è differenziabile e una delle sue componenti è costante $\Rightarrow f$ è costante.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Supponiamo f costante $\Rightarrow$ $(Ref, Imf) = (u, v)$ sono costanti $\Rightarrow$ le derivate parziali sono nulle $\Rightarrow$ f è differenziabile e $f'(z) = 0$.
($\Leftarrow$) Sia $f'(z) = 0\ \forall z \in U \Leftrightarrow (\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x})(z) = (\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y})(z) = 0 \Leftrightarrow [\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \wedge \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0] \Rightarrow (u, v)$ è costante $\Rightarrow$ f è costante. □

Esempio. *$e^z, sinz, cosz$ sono olomorfe su tutto $\mathbb{C}$.*

- *e^z è olomorfa perchè è differenziabile come funzione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ e valgono le equazioni di Cauchy-Riemann;*
- *$sinz$ e $cosz$ sono olomorfe poichè si possono esprimere nelle forme $sinz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ e $cosz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$*

Esempio. *La mappa $Re : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $z \longmapsto Re(z)$ non può essere differenziabile perchè la sua parte immaginaria è costante, e se dunque fosse differenziabile dovrebbe essere costante per il corollario appena visto.*

Corollario. *Sia $f : U \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, e sia $a \in U$, con U aperto. Allora:*

1. *Se $f'(a) \neq 0 \Rightarrow \exists$ intorno aperto U_1 di a tale che $f|_{U_1}$ è iniettiva;*
2. *Se f è iniettiva e $f'(z) \neq 0\ \forall z \in U \Rightarrow f(U)$ è aperto e $f^{-1} : f(U) \longrightarrow U$ è olomorfa con $(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$*

Dimostrazione. Possiamo sfruttare il Teorema di Dini e ottenere il primo punto. Per quanto riguarda il secondo, invece, oltre a Dini sfruttiamo le equazioni di Cauchy-Riemann e il fatto che la applicare la derivata ad un numero complesso equivalga a moltiplicare per un altro numero complesso. □

Esempio. *e^z è iniettiva se ristretta, ad esempio, all'insieme $S = \{z \in \mathbb{C} \mid Imz \in (-\pi, \pi]\}$. Poichè, inoltre, $f'(z) \neq 0\ \forall z \in S$ potremmo provare ad applicare il teorema. C'è però un problema: S* ***non è aperto!*** *Consideriamo dunque $S' = \{z \in \mathbb{C} \mid Imz \in (-\pi, \pi)\}$; adesso possiamo affermare con certezza che $e|_{S'} : S' \longrightarrow \mathbb{C} - \mathbb{R}^-$ tale che $z \longmapsto e^z$ è iniettiva e ammette come inversa la funzione logaritmo principale, che ha infatti derivata uguale a $\frac{1}{z}$.*

Ora che abbiamo le idee più chiare sulla differenziabilità in senso complesso, dedichiamo qualche riga alle varie notazioni che sfrutteremo.
Il **Differenziale Totale** è una scrittura del tipo

$$df := \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Se invece vogliamo fare riferimento alla variabile complessa $z = x + iy$, abbiamo

$$dz = dx + idy, \quad d\overline{z} = dx - idy,$$

da cui

$$dx = \frac{dz + d\overline{z}}{2}, \quad dy = \frac{dz - d\overline{z}}{2i}.$$

Possiamo dunque riscrivere il differenziale totale nella forma

$$df = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y})dz + \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})d\overline{z}.$$

Infine, se definiamo

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}),$$

possiamo riscrivere ancora una volta il differenziale totale come

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}$$

e possiamo riscrivere le equazioni di Cauchy-Riemann nella forma

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = 0$$

In questo modo, la proprietà di f di essere olomorfa assume un nuovo significato, poichè questa nuova forma in cui abbiamo espresso le equazioni di Cauchy-Riemann ci dice che df deve essere proporzionale a dz, con fattore di proporzionalità esattamente $f'(z)$ - e si tratta di una condizione necessaria e sufficiente!

Integrali in $\mathbb{C}$

Definizione. *$f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ è integrabile se sono integrabili Ref e Imf come funzioni reali. In tal caso:* $\int_a^b f(t)dt := \int_a^b Re(f)dt + i \int_a^b Im(f)dt.$

Così definito, questo integrale ha proprietà analoghe agli integrali di funzioni di variabile reale, ovvero:

1. è $\mathbb{C}$-lineare;
2. $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt;$
3. $\forall c \in (a,b)$ vale $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt;$
4. f continua $\Rightarrow$ f integrabile;
5. f continua e $F'(t) = f(t) \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a);$
6. $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \Rightarrow \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt = \int_a^b f(\phi(s))\phi'(s)ds$

Non le dimostreremo tutte; ne discuteremo solo alcune per mostrare delle osservazioni utili nell'ambito dei numeri complessi.

Dimostrazione. Vediamo la seconda proprietà. Sia $w = \int_a^b f(t)dt$. Se $w = 0$ si ha l'uguaglianza, quindi la proprietà è verificata. Se $w \neq 0$, sia $u = \frac{\overline{w}}{\|w\|} \Rightarrow uw = \|w\|$. Per $\mathbb{C}$-linearità abbiamo $|\int_a^b f(t)dt| = \int_a^b uf(t)dt = \int_a^b Re(uf(t))dt \leq \int_a^b |uf(t)|dt = \int_a^b |f(t)|dt$ □

Integrali Curvilinei di Forme Differenziali

Fino ad ora abbiamo riadattato concetti già noti dai vari corsi di Analisi all'ambiente complesso. Ora introdurremo dei nuovi concetti e ci avvicineremo, pian piano, ad un nuovo tipo di integrale: l'integrale di una forma differenziale su una curva.

Definizione. $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *è una* ***curva regolare*** *se entrambe le sue componenti, quella reale e quella immaginaria, sono funzioni di classe* C^1.

Definizione. $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *si dice regolare a tratti se* $\exists P = \{a = x_o, ..., x_n = b\}$ *partizione di* $[a,b]$ *tale che la restrizione di* γ *ad ogni intervallo del tipo* $[x_i, x_{i+1}], i \in \{0, ..., n-1\}$, *è una curva regolare.*

Osservazione. *Una curva regolare è continua in quanto lo sono le sue componenti.*

Diamo ora, finalmente, la definizione di forma differenziale.

Definizione. *Sia* $U \subseteq \mathbb{C}$ *un sottoinsieme aperto. Una* ***forma differenziale*** *è un'espressione del tipo* $\omega = f(z)dz$, *con* $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ *continua.*

E subito a seguire definiamo l'integrale di una forma differenziale su una curva regolare.

Definizione. *Sia* $\omega = f(z)dz$ *una forma differenziale definita su un aperto* $U \subseteq \mathbb{C}$ *e sia* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *una curva regolare. Allora poniamo*

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Se γ *è regolare a tratti, si avrà*

$$\int_\gamma \omega = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt,$$

dove $\{x_0, ..., x_n\}$ *è una partizione di* $[a,b]$ *che rende* γ *regolare a tratti.*

Tutte queste definizioni possono apparire molto astratte, e forse anche insoddisfacenti di fronte alle più immediate domande. Ad esempio, sarebbe del tutto lecito chiedersi quale ruolo gioca la parametrizzazione delle curve che abbiamo da poco introdotto nel calcolo degli integrali curvilinei. In altre parole, siamo sicuri che le nostre definizioni siano ben poste? Diamoci risposta.
Sia $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva regolare e sia $t : [a_1, b_1] \longrightarrow [a,b]$ di classe C^1 tale che $t'(s) > 0 \ \forall s \in [a_1, b_1] \wedge t(a_1) = a, t(b_1) = b$. $\gamma_1 : [a_1, b_1] \longrightarrow \mathbb{C}$ è una curva regolare che parametrizza la stessa curva rappresentata da γ.

Sia ora $\omega = f(z)dz$ una forma differenziale su $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto tale che $U \supseteq Im\gamma = Im\gamma_1$. Osserviamo che

$$\int_{\gamma_1} \omega := \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(s))\gamma_1'(s)ds = \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma(t(s))(\gamma \circ t)'(s)ds =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma(t(s)))(\gamma'(t(s))t'(s)ds = \int_{a}^{b} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_{\gamma} \omega$$

ponendo $t := t(s)$ e osservando che $t'(s)ds = dt$.

Esempio. *Sia $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \gamma(t) = e^{2\pi it}$ - si tratta della curva che percorre in senso antiorario la circonferenza unitaria sul piano complesso. Sia poi $\omega = \frac{dz}{z}$ forma differenziale in $\mathbb{C} - \{0\}$. Allora osserviamo che*

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{[0,1]} \frac{1}{e^{2\pi it}} \, 2\pi i \, e^{2\pi it}dt = 2\pi i$$

Sarà utile tenere a mente questo risultato.
Sia ora $\gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \mid \gamma_1(s) = e^{-2\pi is}$, ovvero la curva che percorre in senso orario la circonferenza unitaria sul piano complesso. Questa volta abbiamo

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{[0,1]} \frac{1}{e^{-2\pi is}}(-2\pi i)e^{-2\pi is}ds = -2\pi i = -\int_{\gamma} \omega$$

Definizione. *Data una curva regolare $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, definiamo **lunghezza della curva** la quantità $l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$.*

Diamo ora alcune proprietà dell'integrale curvilineo di una forma differenziale.

1. $\int_{\gamma} \omega$ è $\mathbb{C}$-lineare;

2. Se $\gamma_1 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ e $\gamma_2 : [b,c] \longrightarrow \mathbb{C}$, con $\gamma_1(b) = \gamma_2(a)$, allora

$$\int_{\gamma_1 * \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$$

3. Se $\omega = f(z)dz$ e $|f| \leq C \ \forall z \in Im\gamma$, allora $|\int_{\gamma} \omega| \leq C \cdot l(\gamma)$

4. Se $\omega = f(z)dz$ è una forma differenziale su un aperto $U \subseteq \mathbb{C}$ e vale $\omega = dF$, con $F : U \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, ovvero $\omega = F'(z)dz$, allora

$$\int_\gamma \omega = F(\gamma)(b) - F(\gamma)(a)$$

Le forme differenziali che si possono esprimere come differenziale totale di un funzione olomorfa sono di nostro interesse, infatti diamo la seguente definzione.

Definizione. *Una forma differenziale ω definita su un aperto $U \subseteq \mathbb{C}$ si dice* ***forma differenziale esatta*** *se ω è il differenziale totale di una funzione olomorfa F anch'essa definita su U, ovvero $\omega = F'(z)dz$.*

Il nostro prossimo obiettivo è quello di caratterizzare le forme differenziali esatte; per farlo sarà necessario il seguente lemma sulle curve regolari.

Lemma. *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ un sottoinsieme aperto e connesso. Allora $\forall z_1, z_2 \in U$ $\exists \gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ curva regolare a tratti tale che $Im\gamma \subseteq U$ e $\gamma(a) = z_1, \gamma(b) = z_2$*

Dimostrazione. Fissiamo $z_1 \in U$ e definiamo

$$A = \{z \in U \mid \exists f : [a, b] \longrightarrow U \text{ t.c. } f(a) = z_1, f(b) = z\}.$$

A è aperto perchè se $z \in A$ ed ϵ è tale che $B(z, \epsilon) \subseteq U \Rightarrow B(z, \epsilon) \subseteq A$; per lo stesso motivo, però, $U - A$ è aperto. Per connessione di U, e poichè $z_1 \in A$, si ha la tesi: $A = U$. □

Diamo ora, per chiarezza, un'altra definizione; subito a seguire vi sarà il teorema di caratterizzazione.

Definizione. *Una curva $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ si dice* ***chiusa*** *se $\gamma(a) = \gamma(b)$.*

Teorema (Caratterizzazione delle Forme Differenziali Esatte)**.** *Sia $\omega = f(z)dz$ una forma differenziale definita su $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto e connesso. Allora i seguenti fatti sono equivalenti:*

1. *ω è una forma differenziale esatta;*

2. *f ammette una primitiva in U;*

3. *se γ è un curva regolare chiusa $\Rightarrow \int_\gamma \omega = 0$*

4. se γ_1, γ_2 sono curve regolari su U con medesimi estremi $\Rightarrow \int\limits_{\gamma_1} \omega = \int\limits_{\gamma_2} \omega$.

Dimostrazione. Vediamo le varie implicazioni.

1) $\Rightarrow$ 2) É l'ultima delle proprietà enunciate poc'anzi.

3) $\Rightarrow$ 4) Segue dal fatto che $\gamma * i(\gamma)$ sia un cammino chiuso.

1) $\Rightarrow$ 3) É anch'esso conseguenza delle proprietà da poco enunciate.

4) $\Rightarrow$ 1) Esibiamo una primitiva: fissiamo $z_0 \in U$ e definiamo

$$F(z) := \int\limits_{\gamma} \omega,$$

con γ una qualsiasi curva regolare a tratti che parte da z_0 e arrivi in z. Questa funzione è ben definita per ipotesi; mostriamo ora che $F' = f$. Fissiamo $z_1 \in U$ e $\epsilon > 0 \mid B(z_1, \epsilon) \subseteq U$. $\forall z \in U$ si ha

$$F(z) = F(z_1) + \int\limits_{\sigma} \omega,$$

con $\sigma : [0,1] \longrightarrow U \mid t \longmapsto (1-t)z_1 + tz$ tale che $\sigma'(t) = z - z_1, l(\sigma) = \|z - z_1\|$. Dunque

$$F(z) = F(z_1) + \int\limits_{[0,1]} f(\sigma(t))\sigma'(t)dt =$$

$$= F(z_1) + \int\limits_{\sigma} f(z)dz = F(z_1) + \int\limits_{\sigma} [f(z) - f(z_1) + f(z_1)]dz =$$

$$= F(z_1) + f(z_1)(z - z_1) + \int\limits_{\sigma} [f(z) - f(z_1)]dz$$

da cui

$$\frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} = \frac{1}{z - z_1} \int\limits_{\sigma} [f(z) - f(z_1)]dz + f(z_1).$$

Passando al limite per $z \to z_1$, per continuità di f si ha l'uguaglianza $F' = f$. Esplicitamente, poichè $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ tale che $\|z - z_1\| < \delta \Rightarrow \|f(z) - f(z_1)\| < \epsilon$; quindi possiamo scrivere

$$\|z - z_1\| < \delta \;\Rightarrow\; \frac{1}{z - z_1} \int\limits_{\sigma} [f(z) - f(z_1)]dz \leq \epsilon \cdot \frac{\|z - z_1\|}{z - z_1}.$$

A questo punto, se facciamo tendere z a z_1 l'integrale assume valori arbitrariamente piccoli perchè maggiorato dal prodotto di una quantità infinitesima per una limitata.

$\square$

Dunque, in particolare, una condizione equivalente all'esattezza è il fatto che $\forall \gamma$ curva chiusa contenuta nell'aperto su cui è definita la forma differenziale ω, l'integrale di ω lungo γ sia nullo.

Definizione. *Una forma differenziale ω si dice **chiusa** se è una forma differenziale **localmente esatta**, ovvero $\forall z_1 \in U \subseteq \mathbb{C}$ aperto $\exists z_1 \in U_1 \subseteq U$ tale che $\omega|_{U_1}$ sia esatta.*

Esempio. *Un esempio di forma differenziale chiusa è dato da $\omega = \frac{dz}{z}$. ω è chiusa in $\mathbb{C} - \{0\}$ ma non è esatta perchè è la derivata di Log, la funzione logaritmo principale, che non è globalmente olomorfa. Questo deriva dal fatto che Log non sia continua su tutto $\mathbb{C}$ ma solo su opportuni sottoinsiemi, quindi ω non ammette una primitiva globale ma solo locale.*

Abbiamo visto che una forma differenziale chiusa è una forma localmente esatta, quindi non possiamo sperare di definirne una primitiva globale, ma magari ne possiamo costruire una primitiva lungo un cammino. L'idea nasce da quanto visto sulle forme differenziali esatte, in particolare dalla primitiva definita nella dimostrazione del teorema di caratterizzazione. Ci siamo fondamentalmente resi conto che l'integrale di linea è un oggetto potenzialmente ottimo per rappresentare la primitiva, seppur localmente, di una forma differenziale chiusa.
Supponiamo infatti di disporre di ω forma differenziale chiusa su un aperto $U \subseteq \mathbb{C}$ e di un cammino $\gamma : [a, b] \longrightarrow U$. Ci piacerebbe costruire una mappa f definita in un intorno aperto di $\gamma([a, b])$ che ristretta al cammino γ sia esattamente la primitiva di ω, e per farlo, per quello che abbiamo visto sugli integrali di linea, potremmo usare proprio l'integrale di ω lungo γ. D'altra parte, proprio perchè ω è chiusa, ovvero localmente esatta, sappiamo di poter lavorare con delle primitive a meno di ridurci ad opportuni intorni aperti.
Vediamo dunque nello specifico come realizzare quella che per ora è soltanto un'idea.

Definizione (Primitiva di una forma chiusa lungo una curva continua)**.** *Sia ω forma differenziale su $U \subseteq \mathbb{C}$ e sia $\gamma : [a, b] \longrightarrow U$ una curva continua. Una **primitiva di ω lungo** γ è una funzione continua $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ che è ottenuta come restrizione di una funzione F definita in un intorno di $\gamma([a, b])$,* *ovvero tale che* $\forall t_0 \in [a,b]$ $\exists U_0$ *intorno di* $\gamma(t_0)$ *tale che* $\forall t \in \gamma^{-1}(U_0)$ *si ha* $f(t) = F(\gamma(t))$.

Lemma. *La primitiva di una forma differenziale chiusa* ω *lungo una curva continua* γ *esiste sempre ed è unica a meno di costanti additive.*

Dimostrazione. Dimostriamo prima l'unicità. Supponiamo di aver due primitive f_1, f_2 di ω lungo γ $\Rightarrow \forall t \in [a,b]$ $\exists F_1, F_2$ e un intorno del punto $\gamma(t)$ nel quale vale $F_1(\gamma(t)) = f_1(t)$ e $F_2(\gamma(t)) = f_2(t) \Rightarrow f_1 - f_2$ è costante in un intorno di $\gamma(t) \Rightarrow f_1 - f_2$ è localmente costante $\Rightarrow$ per connessione di $[a,b]$ si ha che $f_1 - f_2$ è costante su tutto $[a,b]$.
Vediamo ora come costruire una primitiva di ω. ω chiusa $\Rightarrow \exists$ ricoprimento di U di palle aperte su cui ω è esatta, ovvero sulle quali ammette una primitiva. Per Lesbegue $\exists a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ tale che $\gamma|_{[a_i,a_{i+1}]} \subseteq$ palla aperta su cui ω è esatta. Ora, se $\forall i = 0, ..., n-1$ $Im(\gamma|_{[a_i,a_{i+1}]}) \subseteq U_i$ con U_i disco aperto, osserviamo che $U_i \cap U_{i+1} \ni \gamma(a_{i+1}) \Rightarrow F_i - F_{i+1}$ è costante sull'intersezione per connessione. Dunque, a meno di sommare opportune costanti, possiamo far in modo che F_i e F_{i+1} coincidano su $U_i \cap U_{i+1}$, e incollando i vari pezzi otteniamo la primitiva $f(t) = F_i(\gamma(t))$ $\forall t \in [a_i, a_{i+1}]$, che soddisfa la definizione di primitiva lungo una curva per una forma differenziale chiusa. $\square$

Osservazione. *Se* γ *è regolare a tratti e* f *è una primitiva di* ω *lungo* γ, *allora*

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma_i} \omega = \sum_{i=1}^{m} f(t_{i+i}) - f(t_i) = f(b) - f(a).$$

Supponiamo d'ora in poi che tutte le curve siano definite su $[0,1]$, e chiamiamo tutte le curve continue *cammini*.

Affrontiamo ora il caso in due variabili.

Definizione. *Sia* $\delta : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow U \subseteq \mathbb{C}$, *con* U *aperto e* δ *continua. Sia* ω *una forma differenziale chiusa in* U. *Una primitiva di* ω *lungo* δ *è una funzione continua* $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$ *tale che* $\forall (t_0, u_0) \in [a,b] \times [c,d]$ $\exists$ *intorno aperto* U_0 *di* $\delta(t_0, u_0)$ *ed una primitiva* F *di* $\omega|_{U_0}$ *che verifica* $f(t,u) = F(\delta(t,u))$ $\forall (t,u) \in \delta^{-1}(U_0)$.

Anche nel caso di due variabili vale un lemma del tutto analogo a quello appena visto.

Lemma. *Siano* ω *e* δ *come sopra. Allora la primitiva di* ω *lungo* δ *esiste sempre ed è unica a meno di costanti additive.*

Dimostrazione. La dimostrazione è del tutto analoga a quella del precedente lemma. In un secondo momento la aggiungerò. □

Ora che abbiamo concluso con i risultati preliminari, possiamo introdurre un po' di geometria e vedere quali risultati, e in che modo, sia in grado di dimostrare. Il primo è il seguente teorema sull'integrale di cammini omotopi.

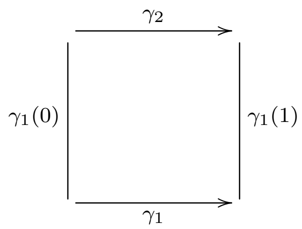
Teorema. *Siano* $\gamma_1, \gamma_2 : I \longrightarrow \mathbb{C}$ *cammini omotopi e sia* ω *forma differenziale chiusa su* $U \supseteq \gamma_1(I), \gamma_2(I)$. *Allora vale la seguente uguaglianza:*

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

Dimostrazione. Sia $\delta : I \times I \longrightarrow \mathbb{C}$ omotopia tra i cammini γ_1, γ_2, ovvero una mappa continua tale che:

- $\forall t \in I \ \delta(t, 0) = \gamma_1(t)$
- $\forall t \in I \ \delta(t, 1) = \gamma_2(t)$
- $\forall s \in I \ \delta(0, s) = \gamma_1(0) \wedge \delta(1, s) = \gamma_2(0)$

Dunque abbiamo



Ora, poichè ω è chiusa ammette una primitiva locale $f : I \times I \longrightarrow \mathbb{C}$ lungo δ, dunque si ha che $f|_{\{0\}\times I}$ e $f|_{\{1\}\times I}$ sono costanti, e in particolare $f(0,0) = f(0,1) \wedge f(1,1) = f(1,0)$. Allora, poichè $f|_{I\times\{0\}}$ è una primitiva di ω lungo γ_1 e $f|_{I\times\{1\}}$ è una primitiva di ω lungo γ_2, abbiamo

$$\int_{\gamma_1} \omega = f(1,0) - f(0,0) = f(1,1) - f(0,1) = \int_{\gamma_2} \omega$$

□

Indice di un Cammino Chiuso

Definizione. *Sia $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C} - \{a\}$ un cammino chiuso, e sia $a \in \mathbb{C}$. Si definisce **indice di γ rispetto ad a** il numero*

$$I(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}.$$

Osservazione. $I(\gamma, a) = \dfrac{1}{2\pi i} \int_\gamma \dfrac{dz}{z-a} \in \mathbb{Z}$

Per calcolare l'indice di un cammino chiuso si cerca $F : I \longrightarrow \mathbb{C}$ tale che $e^{F(t)} = \gamma(t) - a \ \forall t \in I$. A questo punto $I(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}(f(1) - f(0))$.

Esempio. *Sia $\gamma = S^1 = \{x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{C}$, dove $\gamma(t) = e^{2\pi i k t}$, e sia $a = 0 \in \mathbb{C}$. Scegliamo dunque $F(t) = 2\pi i k t$ in quanto una primitiva di $\frac{dz}{z}$ lungo γ. Allora si ha*

$$\int_{\gamma_k} \frac{dz}{z} = f(1) - f(0) = 2\pi i k \Rightarrow I(\gamma_k, 0) = k.$$

Lemma. *Ogni cammino chiuso γ in $\mathbb{C} - \{a\}$ è omotopicamente equivalente al cammino che percorre k volte la circonferenza centrata in a e di raggio $\gamma(0) - a$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$.*

Dimostrazione. Supponiamo $a = 0 \in \mathbb{C}$ e $\gamma(0) = \gamma(1) = 1 \in \mathbb{C}$. Sia $\omega = \frac{dz}{z}$. Osserviamo che *una primitiva di ω lungo γ altro non è che un sollevamento di γ lungo* $(\mathbb{C}, exp)$, ovvero:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{C} \arrow[d, "exp"] \\
I \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[r, "\gamma"'] & \mathbb{C} - \{0\}
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \exists! f$ tale che $f(0) = 0$ e $(exp \circ f)(t) = \gamma(t)$.
Abbiamo dunque un cammino f in $\mathbb{C}$, che è convesso $\Rightarrow \exists F : I \times I \longrightarrow \mathbb{C}$ omotopia tra f e $\sigma : I \longrightarrow [0, f(1)] \subseteq \mathbb{C} \mid t \longmapsto f(1) \cdot t$. Poichè $\gamma(1) = 1 \Rightarrow f(1) \in exp^{-1}(1) = \{2k\pi i \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Allora $H := (exp \circ F) : I \times I \longrightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ è un'omotopia tra γ e $\gamma_k : I \longrightarrow S^1 \Rightarrow I(\gamma, 0) = I(\gamma_k, 0) = k$. □

Valgono dunque le seguenti **proprietà**:

1. $\gamma_0 \sim \gamma_1$ in $\mathbb{C} - \{a\} \Rightarrow I(\gamma_0, a) = I(\gamma_1, a)$
2. Se $\gamma(1) \subseteq U \subseteq \mathbb{C} - \{a\} \mid \pi_1(U) = \{0\} \Rightarrow I(\gamma, a) = 0$

Prima di enunciare una terza proprietà facciamo la seguente osservazione. Se $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$ è un cammino chiuso $\Rightarrow \exists r > 0 \mid \gamma(I) \subseteq B(0, r)$ e $\mathbb{C} - B(0, r)$ è connesso per archi. Allora $\mathbb{C} - \gamma(I)$ ha un'unica componente connessa illimitata. I punti in tale componente connessa sono detti *punti esterni* a γ; gli altri sono detti *interni.*

3. Sia $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$ cammino chiuso. La mappa $I(\gamma, ^-) : \mathbb{C} - \{\gamma(I)\} \longrightarrow \mathbb{Z}$ che ad ogni punto a associa il numero intero $I(\gamma, a)$ è costante sulle componenti connesse e vale 0 sui punti esterni a γ.

Vediamo ora una serie di esempi ed esercizi per chiarirci le idee sul calcolo dell'indice di un cammino chiuso, e sull'idea di punto interno ed esterno ad un cammino.

Esempio. *Consideriamo $\gamma_k(t) = e^{2\pi kit}$. Se $\|z\| < 1 \Rightarrow I(\gamma_k, z) = k$; se invece $\|z\| > 1 \Rightarrow I(\gamma_k, z) = 0$.*

Esercizio (Indice del Prodotto Cammini)**.** *Siano $\gamma_1, \gamma_2 : I \longrightarrow \mathbb{C} - \{0\}$; definiamo il loro prodotto $\gamma_1\gamma_2 : I \longrightarrow \mathbb{C} - \{0\} \mid t \longmapsto \gamma_1(t)\gamma_2(t)$. Dimostrare che $I(\gamma_1\gamma_2, 0) = I(\gamma_1, 0) + I(\gamma_2, 0)$*

Dimostrazione. A breve. □

Esercizio. *Siano $\gamma_1, \gamma_2 : I \longrightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ tali che $\|\gamma_1(t)\| < \|\gamma_2(t)\|\ \forall t \in I$. Possiamo considerare $\gamma_1 + \gamma_2 : I \longrightarrow \mathbb{C} - \{0\} \mid t \longmapsto \gamma_1(t) + \gamma_2(t)\ \forall t \in I$. Dimostrare che $I(\gamma_1 + \gamma_2, 0) = I(\gamma_1, 0)$.*

Dimostrazione. Coming soon. □

Torniamo ora alle forme differenziali esatte, e diamo una condizione sufficiente affinchè una forma differenziale sia esatta.

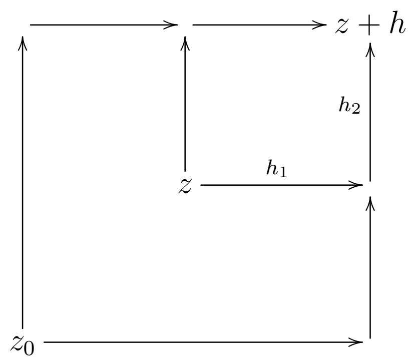
Proposizione. *Sia U un disco aperto in $\mathbb{C}$, e sia $\omega = f(z)dz$ una forma differenziale su U. Allora vale la seguente implicazione.*

$$\int_{\partial R} \omega = 0\ \forall R \text{ rettangolo} \subseteq U \Rightarrow \omega \text{ è esatta in } U$$

Dimostrazione. Sia $z_0 = x_0 + iy_0$ il centro di $U \Rightarrow \forall z \in U$ il rettangolo R che ha due vertici opposti in z e z_0 è tutto contenuto in U; per ipotesi $\int\limits_{\partial R} \omega = 0$.
In particolare, se γ_1 e γ_2 sono i cammini che vanno da z_0 in z e passano sui diversi lati del quadrato, poichè $\gamma_1 * i(\gamma_2)$ è un cammino che percorre tutto il bordo del quadrato, si ha $\int\limits_{\gamma_1} \omega = \int\limits_{\gamma_2} \omega$.
Per questo motivo, possiamo definire la funzione $F(z) := \int\limits_{\gamma_{1,R}} \omega$ come integrale di ω su due lati adiacenti del rettangolo R contenuto in U.
Cominciamo osservando che

$$F(z+h) = F(z) + \int\limits_{\gamma_h} f(\xi) d\xi$$

dove γ_h è il cammino che passa su due dei lati del rettangolo con vertici opposti in z e $z+h$.



$$F(z+h) = F(z) + f(z) \int\limits_{\gamma_h} d\xi + \int\limits_{\gamma_h} [f(\xi) - f(z)] d\xi =$$

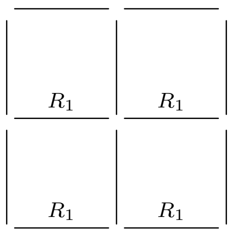
$$= F(z) + f(z)h + \int\limits_{\gamma_h} [f(\xi) - f(z)] d\xi \leq F(z) + hf(z) + (|h_1| + |h_2|)(\sup_{\gamma_h}[f(\xi) - f(z)])$$

$$\Rightarrow \frac{F(z+h) - F(z)}{h} \leq f(z) + \sqrt{2}(\sup_{\gamma_h}[f(\xi) - f(z)])$$

Passando al limite per $h \to 0$ e sfruttando la continuità di f si ottiene $F'(z) = f(z)$. □

Teorema (Teorema di Cauchy)**.** *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. Allora $\omega = f(z)dz$ è chiusa.*

Dimostrazione. Dimostriamo che $\forall R \subseteq D$, con D disco aperto tutto contenuto in U, rettangolo vale $\int\limits_{\partial R} \omega = 0$. Per farlo opereremo in maniera iterativa, generando una successione di rettangoli in questa maniera:



Poniamo $\alpha(R) = \int\limits_{\partial R} \omega$ e cominciamo a spezzare l'integrale in questo modo:

$$\alpha(R) = \sum_{j=1}^{4} \int\limits_{\partial R_i} \omega = \sum_{j=1}^{4} \alpha(R_i).$$

Osserviamo che vale $|\alpha(R)| \leq \sum\limits_{j=1}^{4} |\alpha(R_i)| \Rightarrow \exists j$ tale che $|\alpha(R_j)| \geq \frac{1}{4}\alpha(R)$.
Iterariamo il ragionamento e tra i vari rettangolini scegliamo una successione

$$\{R^{(j)}\}_{j \in \mathbb{N}} \text{ tale che } R^1 \supseteq R^2 \supseteq \cdots R^n \supseteq \cdots$$

che soddisfa

$$|\alpha(R^k)| \geq \frac{1}{4^k} |\alpha(R)|.$$

Consideriamo la successione dei centri dei rettangolini $\{c_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. Si tratta di una successione di Cauchy $\Leftrightarrow [\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ tale che $\forall m, n \geq N \quad c_n, c_m \in R^N \Rightarrow |c_n - c_m| \leq \epsilon]$, dunque ne esiste il limite; sia esso z_0.
Sia ora $diam(R^n)$ il diametro della circonferenza circoscritta a R^n.

$$z_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} R^n \wedge \lim_{n \to \infty} diam(R^n) \to 0 \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} R^n = z_0.$$

f è olomorfa per ipotesi su U; $z_0 \in U$, quindi vale un'espressione del tipo $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r(z)(z - z_0)$ con $r(z) \to 0$ se $z \to z_0$.
Vediamo come sfruttare questa informazione per far vedere che l'integrale sulla frontiera del rettangolo si annulla.

$$\alpha(R^k) = \int\limits_{\partial R^k} [f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r(z)(z - z_0)]dz =$$

$$= f(z_0) \int\limits_{\partial R^k} dz + f'(z_0) \int\limits_{\partial R^k} (z - z_0) dz + \int\limits_{\partial R^k} f(z)(z - z_0) dz$$

I primi due addendi si annullano perchè sono integrali su cammini chiusi di forme differenziali esatte; per quel che riguarda il terzo, invece, osserviamo che:

$$\left| \int\limits_{\partial R^k} r(z)(z - z_0) dz \right| = |\alpha(R^k)| \geq \frac{1}{4^k} |\alpha(R)|$$

da cui

$$|\alpha(R)| \leq 4^k |\alpha(R^k)| \leq 4^k l(\partial R^k) \cdot \max_{R^k} [r(z)(z - z_0)] \leq$$

$$\leq 4^k \frac{1}{2^k} l(\partial R) \cdot (\max_{R^k} r(z)) diam(R^k) \leq l(\partial R) diam(R) \cdot \max_{R^k} r(z)$$

quindi se facciamo tendere k a $+\infty$ segue che $R^k \to \{z_0\} \Rightarrow r(z) \to 0$. □

Corollario. *Una funzione olomorfa ammette localmente una primitiva olomorfa.*

Corollario. *Sia $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, allora $\forall \gamma \sim 0$ in U vale $\int\limits_{\gamma} \omega = 0$.*

Effettivamente questo risultato è valido anche su un insieme sul quale f è olomorfa a meno di un numero finito di punti. Basta infatti sfruttare il seguente risultato.

Teorema. *Sia $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$, $a \in U$, U aperto. f olomorfa in $U - \{a\}$ ma continua ovunque. Allora $\omega = f(z)dz$ è chiusa.*

Dimostrazione. Vogliamo usare il teorema di Cauchy, quindi vogliamo far vedere che $\forall R$ rettangolo in D disco aperto in U, l'integrale di ω lungo il bordo di R è nullo. Se la frontiera del rettangolo non contiene il punto a, allora vale il teorema appena dimostrato; se invece $a \in \partial R$, allora approssimiamo il rettangolo in modo da avvicinarci al limite al punto a. Con un po' di accortezza si dimostra che anche questo integrale è nullo. □

In realtà si dimostra, nella stessa identica maniera, che vale un risultato di questo tipo anche se f non è olomorfa in un numero finito di punti isolati.

Diamo ora un altro interessante risultato.

Teorema (Formula Integrale di Cauchy)**.** *Sia f olomorfa su un aperto $U \subseteq \mathbb{C}$ e sia $a \in U$. Sia poi $\gamma : I \longrightarrow U - \{a\}$ un cammino chiuso omotopo al cammino costante sul punto $\gamma(0)$ in U. Allora*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i \ I(\gamma, a)} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz$$

Dimostrazione. Definiamo la seguente funzione:

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(a)}{z-a} & \text{se } \ z \in U - \{a\} \\ f'(a) \ \text{ se } \ z = a \end{cases}$$

g è continua perchè f è olomorfa su tutto U, ed è olomorfa su $U - \{a\}$. Allora, per i teoremi appena visti, possiamo affermare che sia una forma chiusa, e poichè γ è omotopo al cammino costante otteniamo

$$\int_\gamma g(z) dz = 0 = \int_\gamma \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz =$$

$$= -f(a) \int_\gamma \frac{dz}{z-a} + \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz = 0$$

da cui la tesi, poichè

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \cdot I(\gamma, a).$$

□

Serie Formali

In questa sezione vedremo in che modo sono legate le serie formali e l'Analisi Complessa. Le proprietà basilari dell'anello $A[|x|]$ non verranno però ripetute.

Definizione. *Il campo dei quozienti di $\mathbb{C}[|x|]$ si indica con $\mathbb{C}((x))$ e i suoi elementi sono detti serie di Laurent nella variabile x, o meglio **serie di Laurent meromorfe**.*

Lemma. *Ogni elemento non nullo $S(x) \in \mathbb{C}((x))$ si può esprimere in modo unico nella forma*

$$S(x) = x^\nu(a_0 + a_1 x + ...)$$

dove $\nu \in \mathbb{Z}, a_0 \in \mathbb{C}^*$.

Dimostrazione. $S(x) \in \mathbb{C}((x)) \Leftrightarrow S(x) = \dfrac{b_0 + b_1 x + \cdots}{c_0 + c_1 x + \cdots}$. Se poniamo

$$-\nu = h = min\{k \mid c_k \neq 0\},$$

si ha

$$S(x) = x^{\nu}(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots)(c_h + c_{h+1} x + c_{h+1} x^2 + \cdots)^{-1} =$$
$$= x^{\nu}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)$$

perchè $(c_h + c_{h+1}x + c_{h+2}x^2 + \cdots)$ è inveritibile in quanto $c_h \in \mathbb{C}^*$. □

Questo lemma ci assicura che ogni serie di Laurent meromorfa si lascia scrivere in modo tale che abbiamo un numero finito di termini non nulli di grado minore di zero. Per questo motivo, se scriviamo $S(x) = a_{-m}x^{-m} + \cdots + a_{-1}x^{-1} + P(x)$, la serie formale $S(x) - P(x)$ è detta *Parte Principale di* $S(x)$ – altro non è che la somma dei termini con esponente negativo. Invece, il numero ν è detto *ordine* di $S(x)$ e si indica come $o(S)$. Per definizione si pone uguale ad infinito l'ordine della serie nulla.

Proprietà dell'ordine di una serie:

i. $o(S(x)T(x)) = o(S(x)) + o(T(x))$

ii. $o(S(x) + T(x)) \geq min\{o(S(x)), o(T(x))\}$

iii. $S(x) \in \mathbb{C}[|x|] \Leftrightarrow o(S(x)) \geq 0$

iv. $o(S^{-1}(x)) = -o(S(x))$

A breve vedremo quale forte legame vi sia tra una ben precisa classe di funzioni complesse e le serie formali, motivo per cui ci interessa capire quando abbia senso definire la composizione.

Siano $S(x), T(x) \in \mathbb{C}[|x|]$ tali che $o(T(x)) \geq 1 \Leftrightarrow T(x) = \sum_{k\geq 1} b_k x^k$. Allora definiamo la *composizione* di S con T la serie formale

$$(S \circ T)(x) = \sum_{k\geq 0} a_k (T(x))^k = \sum_{k\geq 0} a_k (\sum_{j\geq 1} b_j x^j)^k.$$

La composizione è ben definita poichè $\forall k \geq 0$ $o(T^k) \geq k$, quindi il coefficente di x^k è somma di un numero finito di termini.

Definizione. *Sia* $S(x) = \sum\limits_{k \geq 0} a_k x^k \in \mathbb{C}[|x|]$*. Denotiamo*

$$S'(x) = \sum_{k \geq 0} k a_k x^{k-1}$$

e la chiamiamo serie derivata di $S(x)$*.*
La serie che si ottiene derivando k volte gli addendi di $S(x)$ *è della forma* $k! a_k +$ *termini di grado positivo, dove* $a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$*.*

Successioni e Serie di Funzioni

Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ e $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$. D'ora in poi vorremmo associare ad f la quantità

$$\|f\| = \sup_{x \in U} \|f(x)\|.$$

Se f, g sono funzioni limitate definite su U, allora siamo effettivamente in presenza di una norma e sono verificate le solite proprietà:

1. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{C} \ \ \|\lambda f\| = |\lambda| \, \|f\|$

Sotto queste ipotesi, hanno senso le seguenti definizioni.

Definizione. *Una successione di funzioni del tipo* $\{f_n : U \to \mathbb{C}\}_{n \in \mathbb{N}}$ *converge uniformemente in* U *se* $\exists f : U \to \mathbb{C}$ *tale che* $\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \mid \ \|f_n - f\| < \epsilon \ \forall n \geq N$*.*

Definizione. *Data una successione di funzioni* $\{f_n : U \to \mathbb{C}\}_{n \in \mathbb{N}}$*, la serie di funzioni associata* $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ *converge uniformemente in* U *se la successione delle somme parziali converge uniformemente.*
Si dice inoltre che $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ *converge totalmente in* U *se la serie delle norme converge.*

Come nel caso delle serie formali, non verranno richiamati i vari risultati già visti su successioni e serie di funzioni; ricordiamo però che

- la convergenza totale implica quella assoluta, che a sua volta implica quella uniforme;
- **il limite uniforme di funzioni continue è anch'esso continuo**.

Perchè, quindi, abbiamo voluto introdurre i concetti di successione e serie di funzioni? Da un lato, si può osservare il fatto che abbiamo enunciato dei risultati classici di analisi reale per successioni e serie di funzioni di variabile complessa, e quindi d'ora in poi siamo autorizzati a sfruttare questi strumenti nell'ambito dell'Analisi Complessa. L'obiettivo, però, non è solo questo: d'ora in avanti, infatti, considereremo le serie formali come funzioni di variabile complessa, e ne studiaremo le proprietà. Chiaramente, una condizione necessaria per lavorarvi sarà quella di poter determinare dove si abbia convergenza. A tal fine rivediamo i seguenti risultati sulle serie di potenze.

Teorema. *Sia* $S(x) = \sum\limits_{k \geq 0} a_k x^k \in \mathbb{C}[|x|] \Rightarrow \exists \rho \in [0, +\infty]$ *tale che:*

i. $S(x)$ *converge totalmente in* $\overline{B(0,r)}$ $\forall r < \rho$, *quindi converge univormemente in* $B(0, \rho)$*;*

ii. $f(x)$ ***non*** *converge al di fuori di* $B(0, \rho)$.

ρ *è detto raggio di convergenza.*

Teorema (Teorema di Hadamard)**.** *Il raggio di convergenza di una serie di potenze* $S(x) = \sum\limits_{k \geq 0} a_k x^k$ *è*

$$\rho = \limsup_k \sqrt[k]{a_k}$$

Ora che abbiamo definito il raggio di convergenza di una serie di potenze possiamo dare la seguente proposizione.

Proposizione. *Siano* $A(x), B(x) \in \mathbb{C}[|x|]$. *Se entrambi i raggi di convergenza sono maggiori o uguale di un certo* $\rho \Rightarrow S(x) = A(x)+B(x), P(x) = A(x)B(x)$ *hanno entrambi raggio di convergenza maggiore o uguale di* ρ.
Inoltre, se $\|z\| < \rho \Rightarrow S(z) = A(z) + B(z), P(z) = A(z)B(z)$.

Dimostrazione. Esplicitiamo le varie serie di potenze:

$$A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k, B(x) = \sum_{k \geq 0} b_k x^k, S(x) = \sum_{k \geq 0} c_k x^k, P(x) = \sum_{k \geq 0} d_k x^k$$

dove $\forall k \in \mathbb{N}$ si ha $c_k = a_k + b_k, d_k = \sum\limits_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$. Vorremmo dominare i coefficenti delle serie somma e prodotto, quindi poniamo

$$\gamma_k = \|a_k\| + \|b_k\|, \quad \delta_k = \sum_{j=0}^{k} \|a_j\| \|b_{k-j}\|$$

e osserviamo che vale
$$\|c_k\| \leq \gamma_k, \quad \|d_k\| \leq \delta_k.$$
Fissato $r \in \mathbb{R}, r < \rho$ si ha che $\sum_{k\geq 0} |a_k|r^k < \infty$, $\sum_{k\geq 0} |b_k|r^k < \infty$, da cui la convergenza di $\sum_{k\geq 0} \gamma_k r^k$ e $\sum_{k\geq 0} \delta_k r^k$.
Allora nella palla aperta di raggio ρ c'è convergenza uniforme sia della serie somma che della serie prodotto, quindi sono ben definite la funzione somma e la funzione prodotto. □

Ora che abbiamo dimostrato questo teorema possiamo lavorare con somme e prodotti di serie a patto di conoscere le regioni del piano in cui convergono. Un naturale passo successivo è dato dallo studio della convergenza della serie composizione.

Teorema. *Date $S(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$ e $T(x) = \sum_{k\geq 0} b_k x^k$ serie formali, poniamo*
$$U(x) = (S \circ T)(x) = \sum_{k\geq 0} a_k (T(x))^k.$$
Se $\rho(S), \rho(T) > 0 \Rightarrow \rho(U) > 0$, e $\exists r > 0$ t.c. $\sum_{k\geq 1} |b_k| r^k < \rho(S)$.
Allora $\rho(U) \geq r$ e $\forall z \in \overline{B(0,r)}$ si ha che $U(z) = S(T(z))$.

Dimostrazione. I raggi di convergenza di $S(x)$ e $T(x)$ sono entrambi maggiori di zero, quindi per $r > 0$ sufficientemente piccolo $T(r)$ converge. Osserviamo che
$$\sum_{k\geq 1} \|b_k\| r^k = r(\sum_{k\geq 1} \|b_k\| r^{k-1}) < \infty \ \Rightarrow \sum_{k\geq 1} \|b_k\| r^{k-1} \leq M, \ M \in [0, +\infty),$$
quindi
$$r \to 0 \ \Rightarrow \ \sum_{k\geq 1} \|b_k\| r^k \to 0,$$
ossia possiamo rendere la sommatoria piccola a piacere. Ma allora
$$\exists r > 0 \mid \sum_{k\geq 1} \|b_k\| r^k < \rho(S) \ \Rightarrow \ \sum_{h\geq 0} \|a_h\| (\sum_{k\geq 1} \|b_k\| r^k) < \infty \ \Rightarrow \rho(U) > 0.$$
Poichè, però, i coefficenti di $U(x)$ sono dominati in moduli dai coefficenti di quest'ultima serie composta, abbiamo che $\rho(U) \geq r$. Resta da mostrare la convergenza uniforme della serie composta quando valutata in $z \in \mathbb{C}$ tale che $\|z\| \leq r$. Per concudere osserviamo i seguenti fatti:

– i coefficenti, in norma, di $U(r)-S_N(T(r))$ sono dominati dai coefficenti di $\sum\limits_{k>N} \|a_k\| \, (\sum\limits_{j\geq 1} \|b_j\| \, r^j) \Rightarrow \exists N_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall N \geq N_0 \ \|U(z) - S_N(T(z))\| < \epsilon \ \forall x \in \overline{B(0,r)}$;

– in $\overline{B(0,\rho(S)}$ le funzioni $S_N(T(z))$ convergono uniformemente ad $S \Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N} \, |\forall n \geq N_1 \ \|U(z) - S_N(T(z))\| < \epsilon \ \forall T(z) \in \overline{B(0,\rho(S))}$, ovvero $\forall z \in \overline{B(0,r)}$.

Allora scegliamo $max\{N_0, N_1\} = N$ e osserviamo che $\forall n \geq N \ \|U(z) - S(T(z))\| \leq \|U(z) - S_N(T(z))\| + \|S_N(T(z)) - S(T(z))\| < 2\epsilon \ \forall z \in \overline{B(0,r)}$. □

Corollario. $S(x) = \sum\limits_{k\geq 0} a_k x^k \in \mathbb{C}[|x|], a_0 \neq 0 \Leftrightarrow S(x) \in \mathbb{C}[|x|]^*$

Dedichiamoci ora alla serie derivata.

Teorema. *Sia* $S(x) = \sum\limits_{k\geq 0} a_k x^k \in \mathbb{C}[|x|]$ *e sia* $S'(x) = \sum\limits_{k\geq 1} k a_k x^{k-1}$ *la sua serie derivata. Allora*

– $\rho(S) = \rho(S')$*;*

– $\forall z \in B(0,\rho(S))$ *si ha* $S'(z) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{S(z+h) - S(z)}{h}$.

Dimostrazione. Per prima cosa, mostriamo che il raggio di convergenza di una serie e della sua serie derivata coincidono.

$$\frac{1}{\rho(S)} = \limsup_k \sqrt[k]{\|a_k\|} = \limsup_k \sqrt[k]{\|a_k\|} \cdot \limsup_k \sqrt[k]{k} = \limsup_k \sqrt[k]{k \, \|a_k\|} = \frac{1}{\rho(S')}$$

Scegliamo dunque $r < \rho(S)$ tale che $z, z+h \in \overline{B(0,r)}$ per h sufficientemente piccolo. Allora $S(z+h) = \sum\limits_{k\geq 0} a_k (z+h)^k = \sum\limits_{k\geq 0} a_k \sum\limits_{j=0}^{k} \binom{k}{j} z^j h^{k-j} = \sum\limits_{k\geq 0} a_k (z^k + k z^{k-1} h + h^2 P_k(z,h))$. Se $\|h\| < \delta$ si ha $\|P_k(h,z)\| < P_k(r,\delta)$, da cui

$$\left\| \frac{S(z+h) - S(z)}{h} - S'(z) \right\| = \left\| \sum_{k\geq 0} a_k h^2 P_k(z,h) \right\| \leq$$

$$\leq \|h\| \sum_{k\geq 2} \|a_k\| \, \|P_k(z,h)\| \leq \|h\| \sum_{k\geq 2} \|a_k\| \, P_k(r,\delta)$$

Poichè la somma è limitata, se facciamo tendere h a 0, il limite è 0. □

Corollario. *$S(x)$ definisce una funzione olomorfa, quindi continua, nella palla $B(0, \rho(S))$. La derivata di tale funzione è la funzione data dalla serie derivata $S'(x)$.*

Dimostrazione. Coming soon. □

Con questo corollario si conclude il nostro lavoro su successioni e serie di funzioni di variabile di complessa poichè siamo finalmente pronti per introdurre il concetto di *funzione analitica.*

Funzioni Analitiche

Definizione. *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto. $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ si dice **analitica** in $z_0 \in U$ se esiste una serie di potenze che per qualche $r > 0$ converge in $B(z_0, r)$, e che in questo aperto verifichi l'uguaglianza $f(z) = \sum\limits_{k \geq 0} a_k(z - z_0)^k$.*
Diremo che f è analitica in U se lo è in ogni suo punto.

Proprietà:

1. Se f è analitica in $U \Rightarrow f$ è continua in U perchè il limite uniforme di funzioni continue è continuo;
2. Se f, g sono analitiche in U e $\lambda \in \mathbb{C}$ allora $f + g, fg, \lambda f$ sono analitiche, e $\frac{f}{g}$ è analitica in $U_0 = \{z \in U \mid g(z) \neq 0\}$
3. $V \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $g : V \longrightarrow U, f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ analitiche $\Rightarrow f \circ g$ è analitica.

Vediamo in quale caso, sicuramente, siamo in presenza di una funzione analitica.

Proposizione. *Sia $a \in \mathbb{C}$, e sia $f(z) = \sum\limits_{k \geq 0} a_k(z - a)^k$ assolutamente convergente in $B(a, r)$ per qualche r reale. Allora la funzione $f(z)$ è analitica in $B(0, r)$.*

Dimostrazione. Senza perdita di generalità possiamo supporre $a = 0 \Rightarrow f(z) = \sum\limits_{k \geq 0} a_k z^k$ converge assolutamente in $B(0, r)$. Siano $z_0 \in B(0, r)$ e $s > 0$ tali che $B(z_0, s) \subseteq B(0, r)$; allora $\forall z \in B(z_0, s)$ $|z_0| + |z - z_0| < r$, quindi

$$\sum_{k \geq 0} a_k((z - z_0) + z_0)^k = \sum_{k \geq 0} a_k(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (z - z_0)^j z_0^{k-j}.$$

A questo punto ci farebbe comodo riordinare i termini della serie così da centrarla in z_0; se mostriamo che converge assolutamente allora siamo autorizzati a farlo. Ma
$$z \in B(z_0, s) \Rightarrow \sum_{k\geq 0} a_k(|z_0| + |z - z_0|)^k < \infty,$$
da cui
$$\sum_{k\geq 0} a_k(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} |z - z_0|^j |z_0|^{k-j}) < \infty.$$
Riordinando otteniamo $f(z) = \sum\limits_{j\geq 0}(\sum\limits_{k\geq j} \binom{k}{j} z_0^{k-j})(z - z_0)^j$, che converge uniformemente in $B(z_0, s)$; dunque f è analitica in z_0. □

Con il seguente teorema ci renderemo conto che la proprietà di essere analitica è, in effetti, molto forte, e porta con sè tante conseguenze.

Teorema. *Sia $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ analitica. Allora f ammette derivate complesse di ogni ordine e ognuna di esse è continua.*

Dimostrazione. Fissiamo $z_0 \in U$. In una palla aperta di centro z_0 e opportuno raggio, f si esprime nell forma $f(z) = \sum\limits_{k\geq 0} a_k(z-z_0)^k$, e in tale palla è derivabile con derivata data dalla derivata della serie formale derivata. Si ha dunque
$$f^{(n)}(z) = \sum_{k\geq n} k(k-1)\cdots(k-n+1)a_k(z - z_0)^{n-k},$$
che è continua e analitica $\forall n \in \mathbb{N}$ nella palla centrata in z_0 in cui abbiamo lavorato fino ad adesso. □

Una volta visto questo risultato, non dovrebbe sorprendere in alcun modo il seguente.

Proposizione. *Sia f analitica in $B(a, r)$ per qualche $r \in \mathbb{R}$, con $a \in \mathbb{C}$. Allora f ammette una primita in $B(a, r)$.*

Dimostrazione. Esibiamo una primitiva. Sappiamo che f si lascia scrivere come $f(z) = \sum\limits_{k\geq 0} a_k(z - a)^k$ in $B(a, r)$; allora
$$\sum_{k\geq 0} \frac{a_k}{k+1}(z - a)^{k+1} = g(z) = (z - a)\sum_{k\geq 0} \frac{a_k}{k+1}(z - a)^k$$
converge assoutamente in $B(a, r)$ per il criterio del confronto, dunque è analitica, e si verifica facilmente che la sua derivata è proprio $f(z)$. □

Chiaramente vorremmo poter descrivere in maniera esplicita i coefficenti dello sviluppo in serie di una funzione analitica. Per ora soddisferemo questa richiesta nel caso di funzionio olomorfe, dimostrando quindi che ogni funzione olomorfa è analitica.

Teorema. *Sia f olomorfa in $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto tale che $B(z_0, r) \subseteq U$ per qualche $z_0 \in U$ e r reale. Allora f ammette un'espressione in serie di potenze convergente nella palla aperta $B(z_0, r)$ di cui sappiamo descrivere esplicitamente i coefficenti. Precisamente, si verifica che*

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z - z_0)^k \quad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B(z_0,\delta)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi$$

dove δ è un qualsiasi numero reale positivo tale che $\delta < r$.

Dimostrazione. Applicando la Formula Integrale di Cauchy in $B(z_o, r)$ otteniamo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B(z_0,\delta)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)} d\xi.$$

Osserviamo però che

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{\xi - z_0}\left(\frac{1}{1 - (\frac{z - z_0}{\xi - z_0})}\right) = \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^k.$$

A questo punto, poiche $|\frac{z-z_0}{\xi - z_0}| < 1$ quando ξ varia sul bordo di $B(z_0, \delta)$, in quanto $\delta < r$, la serie converge totalmente, dunque uniformemente, e possiamo scambiare l'integrale con la somma:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k \geq 0} \int\limits_{\partial B(z_0,\delta)} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^k d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k \geq 0} (z - z_0)^k \int\limits_{\partial B(z_0,\delta)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi.$$

L'integrale non dipende da δ, quindi questa scrittura di f è valida in $B(z_0, r)$. □

Osservazione. *Quel che abbiamo visto fino ad adesso non è vero su $\mathbb{R}$, ovvero una funzione che ammette derivata prima non necessariamente è sviluppabile in serie. Se questo fosse possibile, per quanto visto sulle derivate delle funzioni analitiche, avremmo che ogni funzione di classe C^1 è automaticamente di classe C^∞, che è palesemente falso. Ed è altrettando falso che una funzione di classe C^∞ ammetta sempre uno sviluppo in serie. Un controesempio ci è dato da*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Corollario. *Sotto le medesime ipotesi del teorema, con l'aggiunta però del fatto che $\overline{B(z_o, r)} \subseteq U$ – ovvero che la chiusura della palla sia tutta contenuta in U – si ha la* Disuguaglianza di Cauchy*:*

$$\|a_k\| \leq \max_{B(z_o,r)} \frac{\|f\|}{r^{k+1}}.$$

Dimostrazione. $a_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi$. Passando alle norme si osserva che

$$\|a_k\| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{\partial B(z_0,r)} \frac{\|f(\xi)\|}{|\xi - z_0|^{k+1}} l(\partial B(z_0, r)) \leq \max_{B(z_0,r)} \frac{\|f\|}{r^{k+1}}$$

poichè 2π si semplifica con $l(\partial B(z_0, r))$ e la distanza tra ξ e z_0 è al più r. □

Una prima applicazione di questo corollario è data dal seguente esercizio.

Esercizio. *Sia f analitica in $B(0, 1)$ e tale che $\|f(z)\| \leq 1$ $\forall z \in B(0, 1)$. Dimostrare che $\left\|f^{(k)}(0)\right\| \leq k!$ $\forall k \geq 1$.*

Definizione. *Una funzione olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ si dice **intera**.*

Vediamo ora un teorema che ci sarà utile molto più spesso di quanto forse, a primo impatto, si direbbe, e che si dimostra utilizzando la Disuguaglianza di Cauchy.

Teorema (Teorema di Liouville)**.** *Le uniche funzioni intere e limitate sono le costanti.*

Dimostrazione. Se f è costante è ovvio che sia intera e limitata. Sia ora f intera e limitata; allora

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ vale } f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k \text{ ed } \exists B \in \mathbb{R} \text{ tale che } \|f(z)\| \leq B \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Applicando la disuguaglianza di Cauchy:

$$\|a_k\| \leq \frac{B}{r^k} \ \forall r > 0.$$

Poichè la funzione è intera r può assumere valori arbitrariamente grandi, quindi la norma dei coefficenti è arbitrariamente piccola. □

Corollario. *Una funzione intera e non costante ha immagine densa in* $\mathbb{C}$.

Dimostrazione. Sia f intera e non costante; per assurdo sia $\overline{Imf} \subsetneq \mathbb{C} \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C}, s \in \mathbb{R}^+$ tali che $\|f(z) - \alpha\| > s \forall z \in \mathbb{C}$. Allora la funzione $g(z) = \frac{1}{f(z)-\alpha}$ è intera e soddisfa $\|g(z)\| \leq \frac{1}{s} \Rightarrow g$ è costante $\Rightarrow f$ è costante, che è una contraddizione. □

Ci sono vari altri corollari di questo Teorema, uno dei quali è una ulteriore dimostrazione del Teorema Fondamentale dell'Algebra.

Teorema (Teorema Fondamentale dell'Algebra)**.** $f(z) \in \mathbb{C}[z], a_n \neq 0, n > 0$ *ammette sempre almeno una radice complessa.*

Dimostrazione. Se $f(z) \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$, allora $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ è intera.
Poichè z^n domina se $\|z\| \to \infty$, abbiamo

$$\lim_{\|z\| \to \infty} \|f(z)\| = \infty \Rightarrow \lim_{\|z\| \to \infty} \|g(z)\| = 0.$$

Allora $\exists R > 0$ tale che $\|g(z)\| \leq \max_{\partial B(0,R)} g(\xi)$, ovvero g è limitata $\Rightarrow g$ costante $\Rightarrow f$ costante, che è assurdo. □

Diamo ora un esercizio che useremo a breve nella dimostrazione di un importante teorema.

Esercizio. *Sia* $U \subseteq \mathbb{C}$ *aperto e connesso,* $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ *analitica tale che* $f(z) \neq 0 \ \forall z \in U$. *Allora:*

1. $\exists h : U \longrightarrow \mathbb{C}$ *analitica tale che* $e^{h(z)} = f(z) \ \forall z \in U$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists H : U \longrightarrow \mathbb{C}$ *analitica tale che* $H^n = f$.

Teorema (Teorema della Mappa Aperta)**.** *Sia* $U \subseteq \mathbb{C}$ *aperto e connesso,* $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ *analitica non costante. Allora* f *è aperta.*

Dimostrazione. Sia A un aperto di U; mostriamo che $f(A)$ è intorno di ogni suo punto. Per semplicità consideriamo $f(a) = b$ con $a = b = 0$. f è analitica, allora $f(z) = z^n(a_n + a_{n+1}z + \cdots)$ con $n > 0$ e $a_n \neq 0$ in un intorno dell'origine. Sia allora $f(z) = z^n g(z)$. $g(0) \neq 0$, quindi g è non nulla in un intorno di 0 per continuità. Scegliamo r abbastanza piccolo affinchè valga $g(z) \neq 0\ \forall z \in B(0, r)$. Per l'esercizio appena risolto, sappiamo che $\exists H : B(0, r) \longrightarrow \mathbb{C}$ tale che $H^n(z) = g(z) \Rightarrow f(z) = (zH(z))^n$. Sia ora $f_0(z) = zH(z)$; vogliamo verificare che $f_0'(0) \neq 0$ così da poter applicare il Teorema di Dini. Ma $f_0'(0) \neq 0$ poichè è una delle radici n-esime di a_n (dipende da $H(z)$), quindi f è aperta in quanto composizione di omeomorfismi locali – la mappa $z \mapsto z^n$ è un rivestimento, quindi un omeomorfismo locale. □

Zeri di Funzioni Analitiche

Una volta che disponiamo di un'espressione in serie di potenze per una funzione, è facile capire in quale modo essa si presenti in un intorno delle sue radici. Per esprimere questo legame useremo fondamentalmente l'idea di ordine di una serie formale.

Definizione. *Sia* f *analitica in un intorno di* $a \in \mathbb{C}$*, non identicamente nulla. Definiamo* ***ordine*** *di* f *in* a *il minimo* k *tale che* a_k *è non nullo. Lo denoteremo come* $o(f, a)$*.*

Se f non è costante, si osserva che:

- $o(f, a) > 0 \Leftrightarrow f(a) = 0$;
- $o(f', a) = o(f - f(a), a) - 1$;
- se V è un intorno di a, $o(f, z) = 0\ \forall z \in V - \{a\}$.

Proposizione (Principio del Prolungamento Analitico)**.** *Sia* $U \subseteq \mathbb{C}$ *aperto e connesso, e sia* $z_0 \in U$*.* $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ *analitica. Le seguenti sono equivalenti:*

- $f^{(k)}(z_0) = 0\ \forall k \geq 0$*;*
- $f \equiv 0$ *in un intorno di* z_0*;*
- $f \equiv 0$ *su tutto* U*.*

Dimostrazione. É chiaro che 3) $\Rightarrow$ 1), 2) e che 2) $\Rightarrow$ 1). Resta da mostrare 1) $\Rightarrow$ 2) e 2) $\Rightarrow$ 3).

- 1) $\Rightarrow$ 2) In un intorno di z_0, $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ con $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$, quindi in tale intorno si ha $f(z) \equiv 0$.

– 2) $\Rightarrow$ 3) Sia $A = \{z \in U \mid f \equiv 0 \text{ in un intorno di } f\}$; $z_0 \in A$. A è aperto per definizione, ma è anche chiuso perchè $z \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dove $z_n \in A\ \forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, da cui, per continuità, $\lim_{n\to\infty} f^{(k)}(z_n) = f^{(k)}(z) = 0$ poichè $f^{(k)}(z_n) = 0$.

□

Corollario. *$U \subseteq \mathbb{C}$ aperto e connesso, $f, g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ analitiche in $z_0 \in U$. Se $f = g$ in qualche intorno di $z_0 \Rightarrow f = g$ su tutto U.*

Proposizione (Principio di Identità di Funzioni Analitiche)**.** *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto e connesso, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ analitica e non identicamente nulla. Allora l'insieme degli zeri di f è discreto.*

Corollario. *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto e connesso, f, g analitiche in U. L'insieme $S = \{z \in U \mid f(z) = g(z)\}$, se non vuoto, è discreto.*

Proposizione (Principio del Massimo Modulo)**.** *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto e connesso, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ analitica. Se $\exists z_0 \in U$ tale che $\|f\| : U \longrightarrow \mathbb{R}$ ha un massimo locale in z_0, allora f è costante.*

Dimostrazione. Se f non fosse costante allora per ogni intorno aperto U_0 di z_0 ci sono punti con norma maggiore di $f(z_0)$ e punti con norma minore di $f(z_0)$ perchè una funzione analitica è aperta, quindi z_0 non potrebbe essere massimo locale. □

Questo risultato ci dice che se $f : K \longrightarrow \mathbb{C}$ è una funzione analitica definita su K compatto, allora f raggiunge i suoi punti di massimo e minimo sulla frontiera di K.

Esercizio. *Sia $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto e connesso, una funzione analitica. Dimostrare che se $Re f$ ammette massimo locale in $z_0 \in U \Rightarrow f$ è costante.*

Con l'ausilio del Principio di Massimo Modulo si dimostra inoltre il seguente lemma.

Lemma (Lemma di Schwartz)**.** *Sia $D = B(0,1)$, $f : D \longrightarrow D$ analitica tale che $f(0) = 0$. Allora*

- *$\|f(z)\| \le \|z\|$ $\forall z \in D$ e $\|f'(0)\| \le 1$;*
- *se $\|f'(0)\| = 1$ o $\exists z_0 \in D$ tale che $\|f(z_0)\| = \|z_0\|$, allora f è una rotazione intorno all'origine.*

Dimostrazione. $f(0) = 0$, quindi possiamo definire $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ ed estenderla in maniera analitica a tutto D[1]. Fissiamo $r \in (0,1)$, allora:

$$\forall z \in \partial B(0,r)\ \ \|g(z)\| \le \frac{1}{r}, \text{ poichè } f(z) \in B(0,1) \text{ e } \|z\| = r.$$

Dunque se $r \to 1 \Rightarrow \|g(z)\| \le 1 \Leftrightarrow \|f(z)\| \le \|z\|$. Per quanto riguarda la disuguaglianza $\|f'(0)\| \le 1$ basta osservare che $\|f'(0)\| = \|g(0)\| \le 1$.
Infine, se $\exists z_0 \in D$ tale che $\|g(z_0)\| = 1 \Rightarrow g$ è costante per il principio del massimo modulo, quindi $f(z) = \xi \cdot x$ con $\|\xi\| = 1$. □

Serie di Laurent

Adesso ci dedicheremo allo studio delle singolarità isolate di una funzione analitica. Per farlo ci serviranno le serie di Laurent.

Definizione. *Una serie di Laurent formale è un'espressione del tipo*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k x^k, a_k \in \mathbb{C}.$$

Il nostro obiettivo, come già abbiamo fatto per le serie formali, è quello di definire una funzione a partire da una serie di Laurent. Per farlo cerchiamo di ricondurci a delle serie formali.
Se poniamo:

- $f_1(z) = \sum\limits_{k \ge 0} a_k z^k$;
- $g(u) = \sum\limits_{k \le 0} a_k u^{-k}$ e $f_2(z) = \sum\limits_{k \le 0} a_k z^k = g(\frac{1}{z})$;

[1]Sostanzialmente perchè sviluppiamo in serie e semplifichiamo la z al denominatore.

possiamo scrivere $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k = f_1(z) + f_2(z)$, quindi come somma di due serie formali. A questo punto, se ci restringiamo all'intersezione di due palle aperte di centro 0 e opportuno raggio, abbiamo effettivamente una funzione olomorfa. Precisamente, poiché $f_1(z)$ converge in una certa palla $B(0, r_1)$ e $g(u)$ converge in una certa palla $B(0, \frac{1}{r_2})$, la funzione $f_1(z) + f_2(z)$ è ben definita in una corona circolare del tipo $\{z \in \mathbb{C} \mid r_2 \leq \|z\| \leq r_1\}$.

Se K è una corona circolare e $f : K \longrightarrow \mathbb{C}$, diremo che f ammette uno sviluppo in serie di Laurent su K se esiste una serie di Laurent che converge ad f in K.

Teorema. *Sia* $K = \{z \in \mathbb{C} \mid r_2 \leq \|z - a\| \leq r_1\}$ *con* $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$ *e* $a \in \mathbb{C}$. $f : K \longrightarrow \mathbb{C}$ *olomorfa ammette un unico sviluppo in serie di Laurent.*

Dimostrazione. Dimostriamo prima l'unicità. Supponiamo che $f(z) = f_1(z) + f_2(z) = g_1(z) + g_2(z)$, con $f_1(z), g_(z)$ analitiche se $\|z\| < r_1$ e $f_2(z), g_2(z)$ analitiche se $\|z\| > r_2$. Osserviamo che

$$f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k = \sum_{k\geq 0} a_k z^k + \sum_{k>0} a_{-k}(\frac{1}{z})^k = f_1(z) + f_2(z)$$

da cui $\lim_{\|z\|\to\infty} \|f_2(z)\| = 0$ – e lo stesso vale per $g_2(z)$. Consideriamo allora la funzione

$$h(z) = \begin{cases} f_1(z) - g_1(z) & \|z\| < r_1 \\ f_2(z) - g_2(z) & \|z\| > r_2 \end{cases}$$

$h(z)$ è intera e limitata per quanto appena osservato, quindi il Teorema di Liouville ci dice che è costante. Poichè, infine, vale zero in K, possiamo concludere che sia globalmente nulla.
Dedichiamoci ora all'esistenza: esplicitiamo uno sviluppo in Serie di Laurent per f nella corona K. Innanzitutto, per semplicità, supponiamo $a = 0$, ovvero che $K = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < \|z\| < r_2\}$. Siano poi $\rho_1, \rho_1^{'}, \rho_2, \rho_2^{'} \in \mathbb{R}$ tali che $r_2 < \rho_2^{'} < \rho_2 < \rho_1 < \rho_1^{'} < r_1$ e siano $\gamma_1(I) = \partial B(0, \rho_1^{'}), \gamma_2(I) = \partial B(0, \rho_2^{'}$ cammini continui[2]. Essenzialmente, quello che vogliamo applicare è la Formula Integrale di Cauchy per calcolare f in un punto z del tipo $z = \rho_0 e^{i\theta_0}$ con $\rho_2 \leq \rho_0 \leq \rho_1$. Consideriamo allora $\forall \epsilon \in (0, \pi)$ $\Sigma_\epsilon := \{z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2 \;\; \theta_0 - \epsilon \leq \theta \leq \theta_0 + \epsilon\}$, e denotiamo $\Gamma_\epsilon = \partial\Sigma_\epsilon$.
Osserviamo che $\forall 0 < \epsilon < \epsilon^{'} < \pi \quad \Gamma_\epsilon \sim \Gamma_{\epsilon^{'}}$ e che $\Gamma_\epsilon \sim \partial B(z, r)$ per r

[2]Appena imparo a fare bene i disegni lo aggiungo!

sufficientemente piccolo. D'altra parte, se $\epsilon \to \pi$ allora $\Gamma_\epsilon \to K$ un segmento. Applicando la Formula Integrale di Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B(z,r)} \frac{f(\xi}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\epsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

da cui, passando al limite per $\epsilon \to \pi$,

$$f(z) \longrightarrow \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Ora vorremmo sviluppare, quindi concentriamoci sulla quantità $\frac{1}{\xi - z}$.

- $\xi \in \gamma_1(I) \Rightarrow \left\| \frac{z}{\xi} \right\| < 1$, quindi $\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi(1 - \frac{z}{\xi})} = \frac{1}{\xi} \sum\limits_{k \geq 0} (\frac{z}{\xi})^k$;
- $\xi \in \gamma_2(I) \Rightarrow \left\| \frac{\xi}{z} \right\| < 1$, quindi $\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{-z(1 - \frac{\xi}{z})} = -\frac{1}{z} \sum\limits_{k \geq 0} (\frac{\xi}{z})^k$.

Per via delle limitazione in norma, abbiamo la convergenza uniforme come conseguenza di quella totale, quindi siamo autorizzati a scambiare il segno di integrale con quello di sommatoria:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_2} [\frac{f(\xi)}{-z} \sum_{k \geq 0} (\frac{\xi}{z})^k] d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} [\frac{f(\xi)}{\xi} \sum_{k \geq 0} (\frac{z}{\xi})^k] d\xi =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{k \leq -1} [\int\limits_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi^{k+1}} d\xi] z^k + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k \geq 0} [\int\limits_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi^{k+1}} d\xi] z^k.$$

□

Singolarità Isolate

Definizione. *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ analitica. Sia $a \in \mathbb{C} - U$ tale che $\exists r > 0$ per cui $\overset{\circ}{B}(a, r) = B(a, r) - \{a\} \subseteq U$. Allora diciamo che a è una singolarità isolata di f.*

Un esempio di singolarità isolata è il punto 0 per la funzione $f(z) = \frac{1}{z}$.

Osservazione. *Se a è una singolarità isolata, allora f ammette uno sviluppo in serie di Laurent in $\overset{\circ}{B}(a, r)$ per qualche $r > 0$.*

Definizione. *Nella situazione appena descritta, diciamo inoltre che a è:*

1. *una **singolarità eliminabile** se $a_k = 0$ $\forall k < 0$;*

2. *una **singolarità polare** o un **polo** se esiste un numero finito di coefficenti $a_k \neq 0$ con $k < 0$ – e in tal caso, se $m = max\{k > 0 \mid a_{-k} \neq 0\}$, allora diciamo che a è un polo di ordine m e che f ha ordine $-m$ in a;*

3. *una **singolarità essenziale** se esiste un numero infinito di $a_k \neq 0$ con $k < 0$.*

Alcuni esempi di singolarità sono i seguenti.

– $f(z) = \frac{sinz}{z}$ ha una singolarità eliminabile in 0;

– $f(z) = \frac{1}{z}$ ha una singolarità polare di ordine 1 in 0;

– $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$ ha una singolarità essenziale in 0.

Teorema. *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f : U - \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, $a \in U$. Le seguenti sono equivalenti:*

1. *f ha una singolarità eliminabile in a;*

2. *f si può estendere ad una funzione olomorfa su tutto U;*

3. *f è limitata in $\overset{\circ}{B}(a, R) = B(a, R) - \{a\}$ per qualche $R > 0$.*

Dimostrazione.

- (2) ⇒ 3)) ovvio.

- (1) ⇒ 2)(f è olomorfa in U, quindi ammette uno sviluppo in serie di Laurent in $\overset{\circ}{B}(a, r)$ del tipo $f(z) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} a_k(z - a)^k$. Poichè, però, a è una singolarità eiminabile, effettiamente tale sviluppo è della forma $f(z) = \sum\limits_{k \geq 0} a_k(z - a)^k$. Ma un tale sviluppo definisce una funzione analitica anche in a.

- (2) ⇒ 1)) Sia $f(z) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} a_k(z - a)^k$ sviluppo in serie di Laurent di f in $\overset{\circ}{B}(a, r)$. Poichè f si estende a funzione analitica anche in a, tale sviluppo deve essere in realtà uno sviluppo in serie formale, quindi a è una singolarità eliminabile poihè non vi sono termini non nulli per $k < 0$.

- (3) $\Rightarrow$ 1)) Sia $f(z) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} a_k z^k$, dove $a_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B(a,R)} \frac{f(z)}{z-a} dz$, sviluppo in serie di Laurent. Se $\|f(z)\| \leq M \ \forall z \in \overset{\circ}{B}(a,R)$, allora
$$\|a_k\| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^{k+1}} 2\pi R = \frac{M}{R^k}.$$
Se $k < 0$ e facciamo tendere R a 0, $\|a_k\|$ tende a 0, quindi riusciamo ad esprimere f come serie formale quando ci avviciniamo a a.

□

Teorema. *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ un aperto, $a \in U$, $f : U - \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. Sono equivalenti:*

1. *f ha un polo di ordine m in a;*
2. *$(z-a)^m f(z)$ ha una singolarità eliminabile in a;*
3. *$\exists b_1, \cdots, b_m \in \mathbb{C} \mid f(z) - \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{b_j}{(z-a)^j}$ ha una singolarità eliminabile in a.*

Dimostrazione.

- (1) $\Leftrightarrow$ 2)) $f(z) = \sum\limits_{k \geq -m} a_k (z-a)^k$ sviluppo in serie di Laurent intorno ad a $\Leftrightarrow (z-a)^m f(z) = \sum\limits_{k \geq 0} a_k (z-a)^{z+m}$ sviluppo in serie formale intorno ad a.
- (1) $\Rightarrow$ 3)) Se $f(z) = \sum\limits_{k=-m}^{-1} a_k (z-a)^k + \sum\limits_{k \geq 0} ak(z-a)^k$, siano $b_j = a_{-j}$.
- $f(z) - \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{b_j}{(z-a)^j} = \sum\limits_{k \geq 0} a_k (z-a)^k$. Se poniamo $a_{-k} = b_k$ possiamo osservare con facilità che $f(z) = \sum\limits_{k \geq -m} a_k (z-a)^k$ ha un polo di ordine m in a.

□

Teorema (di Casorati-Weierstrass)**.** *$U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $a \in U$, $f : U - \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ analitica. Se f ha una singolarità essenziale in $a \Rightarrow \forall r > 0,\ f(\overset{\circ}{B}(a,r))$ è denso in $\mathbb{C}$.*

Dimostrazione. Se per assurdo $\exists R > 0$ tale che $f(\mathring{B}(a, R))$ non è denso, allora $\exists \alpha \in \mathbb{C}, s > 0$ tali che $\|f(z) - \alpha\| > s \quad \forall z \in \mathring{B}(a, R)$, da cui

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - \alpha}$$

è olomorfa e limitata in $\mathring{B}(a, R)$. Di conseguenza, $g(z)$ deve avere una singolarità eliminabile in $a \Rightarrow f$ ha al più un polo poichè g si estende a funzione olomorfa, e questa è una contraddizione. □

Definizione. *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ si dice* ***meromorfa*** *se è olomorfa su $U - S$ per qualche sottoinsieme discreto S di U, e nei punti di S presenta soltanto singolarità di tipo eliminabile o polare.*

Osserviamo che valgono le seguenti proprietà:

- f olomorfa $\Rightarrow f$ meromorfa;
- f meromorfa in $U \Rightarrow \forall z \in U$ lo sviluppo di f in z è una serie di Laurent Meromorfa;
- f, g sono meromorfe in $U \Rightarrow f + g, fg$ sono meromorfe e se $g \not\equiv 0$ allora anche $\frac{f}{g}$ è meromorfa;
- $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, l'insieme delle funzioni olomorfe su U, $O(U)$, è un anello, e il suo campo dei quozienti è l'insieme delle funzioni meromorfe, $M(U)$.

Un corollario di tutto quello che abbiamo detto fino ad adesso sulle singolarità isolate è il seguente:

Corollario. *Sia a una singolarità isolata di una funzione f. Allora:*

1. *a è eliminabile $\Leftrightarrow \lim_{z \to a} f(z)$ esiste ed è finito;*
2. *a è un polo $\Leftrightarrow \lim_{z \to a} f(z) = \infty$;*
3. *a è una singolarità essenziale $\Leftrightarrow \lim_{z \to a} f(z)$ non esiste.*

Dimostrazione. □

Il Metodo dei Residui

In questa sezione vedremo compiersi il miracolo: il calcolo di integrali cesserà di essere mostruosamente noioso.

Definizione. *Sia f una funzione con una singolarità isolata in a e sia $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(z-a)^k$ il suo sviluppo in serie di Laurent intorno ad a.*
*Definiamo il **residuo** di f in a come $Res(f,a) = a_{-1}$.*

Proposizione. *$U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $a \in U$, $\overline{B(a,r)} \subseteq U$, $f : U - \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. Allora*

$$\int_{\partial B(a,r)} f(z)dz = 2\pi i Res(f,a)$$

Dimostrazione. $\forall z \in \overset{\circ}{B}(a,r)$ possiamo esprimere f come

$$f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(z-a)^k.$$

Poichè un tale sviluppo converge uniformemente ad f possiamo scambaire l'integrale con la somma e scrivere:

$$\int_{\partial B(a,r)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(z-a)^k dz = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\partial B(a,r)} a_k(z-a)^k dz.$$

Escluso il caso $k=-1$, gli integrali che compaiono sono integrali su un cammino chiuso di forme differenziali esatte su $\overset{\circ}{B}(a,r)$, quindi sono nulli. Segue allora

$$\int_{\partial B(a,r)} f(z)dz = \int_{\partial B(a,r)} a_{-1}\frac{dz}{(z-a)} = a_{-1}\cdot 2\pi i \cdot I(\partial B(a,r),a) = 2\pi i Res(f,a).$$

□

Teorema (Teorema dei Residui)**.** *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ un aperto semplicemente connesso, $z_1,\cdots,z_n \in U$ e $f : U - \{z_1,\cdots,z_n\} \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. Sia $\gamma : I \longrightarrow U - \{z_1,\cdots,z_n\}$ un cammino chiuso. Allora*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^n Res(f,z_j)I(\gamma,z_j).$$

Dimostrazione. Siano $Q_1, \ldots, Q_n$ le parti principali di f in $z_1, \cdots, z_n$. $g(z) = f(z) - Q_1(z) - \cdots - Q_n(z)$ è olomorfa su $U \Leftrightarrow$ è una forma differenziale chiusa su U. Poichè U è semplicemente connesso, $\int_\gamma g(z)dz = 0$, da cui

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_\gamma Q_j(z)dz, \quad Q_j(z) = \sum_{k \leq 0} a_k^{(j)}(z - z_j)^k.$$

Tutti gli addendi con esponente diverso da -1 sono forme differenziale esatte su $U - \{z_1, ...z_n\}$, quindi il loro integrale è nullo lungo γ; ma allora

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} Res(f, z_j) \int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res(f, z_j) I(\gamma, z_j).$$

□

Vediamo come calcolare un residuo.

1. f ha una singolarità eliminabile in $z_0 \Rightarrow Res(f, z_0) = 0$;

2. f ha un polo *semplice* in $z_0 \Rightarrow (z - z_0)f(z)$ ha una singolarità eliminabile in z_0, dunque:
$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)f(z);$$

3. f ha un polo di ordine $m \geq 2$ in $z_0 \Rightarrow g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ ha una singolarità eliminabile in z_0 e si ha
$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!};$$

4. se f ha un singolarità essenziale in z_0, invece, non ci sono metodi standard da applicare.

L'applicazione del Metodo dei Residui non è comunque ristretta al caso complesso: alcuni integrali di funzioni reali possono essere studiati riconducendosi ad opportune funzioni di variabile complessa.
Il primo integrale che studieremo è di funzioni razionali in seno e coseno. Essenzialmente interpreteremo un integrale definito in seno e coseno come un

integrale di linea lungo una circonferenza.
Supponiamo di dover calcolare

$$I = \int_0^{2\pi} R(sint, cost)dt$$

con $R(sint, cost)$ funzione razionale senza poli sulla circonferenza unitaria. Effettuiamo un cambio di variabile: sia $z = e^{it}$, da cui

$$sint = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}), \quad cost = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}).$$

Poichè per ipotesi non abbiamo punti singolari lungo α_1 possiamo osservare che

$$I = \int_{\alpha_1} R(\frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}), \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}))\frac{1}{iz}dz$$

da cui

$$I = \sum_{\text{poli interni ad } \alpha_1} Res((\frac{1}{iz}R(\frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}), \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}))), z)$$

I residui, inoltre, riusciranno a semplificarci di molto i calcoli nel caso di alcuni tipi di integrali reali impropri.

Lemma. $\forall \epsilon > 0$ *indichiamo* $\mathbb{H}_\epsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid Imz > -\epsilon\}$. *Sia ora* $f \in M(\mathbb{H}_\epsilon)$ *con un numero finito di poli e tale che* $\lim_{\|z\| \to \infty} zf(z) = 0$. *Allora, se* $\forall t \in [0, \pi]$ *poniamo* $\gamma_r(t) = re^{it}$, *vale che*

$$\lim_{r \to \infty} \int_{\gamma_r} f(z)dz = 0.$$

Dimostrazione. Vogliamo stimare l'integrle di $f(z)$ lungo γ_r. Denotiamo con $M(r)$ il massimo del modulo di f lungo γ_r, e osserviamo che

$$\left\| \int_{\gamma_r} f(z)dz \right\| \leq M(r)r\pi \longrightarrow 0 \text{ se } r \to \infty$$

poichè $M(r) = \|f(z)\|$ e $r = \|z\|$ per opportuni z lungo γ_r, e per ipotesi il loor prodotto tende a zero al crescere della norma di z. □

Lemma. *Sia $\mathbb{H}_\epsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid Imz > -\epsilon\}$ e sia $f \in M(\mathbb{H}_\epsilon)$ con un numero finito di poli, e tale che $\lim\limits_{\|z\|\to\infty} f(z) = 0$. Sia poi $\gamma_r(t) = re^{it}, t \in [0,\pi]$. Allora si ha che*

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{\gamma_r} f(z)e^{iz}dz = 0.$$

Dimostrazione. Vogliamo calcolare $\int\limits_{\gamma_r} f(z)e^{iz}dz$. Effettuiamo il cambio di variabile

$$z = re^{it}, \quad dz = ire^{it}\ dt$$

e otteniamo

$$\int\limits_{[0,\pi]} f(re^{it})e^{i(re^{it})}re^{it}it\ dt = \int\limits_{[0,\pi]} f(re^{it})e^{ir(cost+isint)}ire^{it}\ dt =$$

$$\int\limits_{[0,\pi]} f(re^{it})e^{(-rsint+ircost)}ire^{it}\ dt.$$

L'obiettivo è, come al solito, limitare in norma il valore di questo integrale, e mostrare che tende a 0 al tendere di r ad infinito. Come nel lemma precedente, $\forall r \in \mathbb{R}^+$ indichiamo con M_r il massimo di $\|f(z)\|$ lungo $\gamma_r([0,\pi])$. Poiché e^{ircost} e e^{it} sono numeri di norma pari ad uno, ci interessa limitare l'integrale di $e^{-rsint)}$, in maniera indipendente da t. Per farlo osserviamo[3] che:

- $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]\ sint \geq \frac{2t}{\pi}$;
- $\forall t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]\ sint \geq -\frac{2t}{\pi} + 2$;

da cui

$$\int\limits_0^\pi e^{-rsint}dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-rsint}dt + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{-rsint}dt \leq \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r(\frac{2t}{\pi})}dt + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{-r(-\frac{2t}{\pi}+2)}dt =$$

$$= -\frac{\pi}{2r}\left[e^{-r(\frac{2t}{\pi})}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2r}\left[e^{-r(-\frac{2t}{\pi}+2)}\right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi = \frac{\pi}{2r}(-e^{-r} - 1 + 1 - e^{-r}) = -\frac{\pi}{r}e^{-r}.$$

[3]Stiamo fondamentalmente osservando che il grafico del seno tra 0 e $\frac{\pi}{2}$ è sopra la retta che passa per l'origine e per il punto $(\frac{\pi}{2}, 1)$, e tra $\frac{\pi}{2}$ e π è sopra la retta che passa per il punto $(\frac{\pi}{2}, 1)$ e per il punto $(\pi, 0)$.

In conclusione:

$$\left\| \int_{\gamma_r} f(z)dz \right\| \leq M_r r(-\frac{\pi}{r})e^{-r} = -M_r \pi e^{-r} \longrightarrow 0 \text{ se } r \to +\infty.$$

□

Come applichiamo questo lemma? Per farci un'idea, supponiamo di avere $f(z)$ che verifica le ipotesi del lemma e tale che $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx < \infty$. Allora anche $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ix} f(x)dx < \infty$ e per il Teorema dei Residui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix} f(x)dx = \sum_{z_j \in \mathbb{H}_\epsilon} Res(e^{iz} f(z), z_j).$$

A questo punto, considerando la parte reale o immaginaria di quest'ultimo integrale riusciamo a calcolare integrali impropri di funzioni del tipo $cosx \cdot f(x)$ o $sinx \cdot f(x)$.

Derivata Logaritmica

Sia f meromorfa in un intorno dell'origine, e sia il suo sviluppo del tipo $f(z) = a_m z^m (1 + h(z))$, con $m \in \mathbb{Z}$ uguale all'ordine di f in 0. Si avrà $h(0) = 0$.
In generale, sappiamo che $(fg)' = f'g + fg'$, da cui $\frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}$. In questo caso particolare si osserva inoltre che

$$f'(z) = m a_m z^{m-1}(1 + h(z)) + a_m z^m h'(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z} + \frac{h'(z)}{1 + h(z)},$$

quindi

$$Res(\frac{f'(z)}{f(z)}, 0) = o(f, 0).$$

Per questo motivo prestiamo particolare attenzione alla cosiddetta **derivata logaritmica**[4], ovvero $\frac{f'(z)}{f(z)}$.

[4] Il nome deriva dal fatto che è la derivata di $Log(f(z))$.

Supponiamo di dover calcolare $\int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz$; possiamo sfruttare il Metodo dei Residui e quanto appena visto sulla Derivata Logaritmica per concludere che

$$\int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i \sum I(\gamma, z)o(f, z).$$

Nel caso particolare in cui γ sia una circonferenza vale

$$\int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i \; [\# \text{ zeri di } f - \# \text{ poli di } f].$$

Questo risultato è noto come *Teorema dell'Indicatore Logaritmico*, e, precisamente, è valido con le seguenti ipotesi:

Teorema (dell'Indicatore Logaritmico)**.** *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ un aperto semplicemente connesso, $f \in M(U)$, $\gamma : I \longrightarrow U$ un cammino chiuso che non passa per zeri o poli di f. Allora $\frac{f'(z)}{f(z)} \in M(U)$ non ha singolarità in $\gamma(I)$ e vale che*

$$\int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} = 2\pi i \sum I(\gamma, z)o(f, z).$$

Dimostrazione. $\frac{f'(z)}{f(z)} \in M(U)$ perchè quoziente di funzioni meromorfe, che abbiamo già osservato essere un campo[5]. Ciò detto, possiamo affermare che $\frac{f'(z)}{f(z)}$ abbia poli o zeri solo in poli o zeri di f; e se z_0 è un polo o uno zero di f abbiamo osservato che $Res(\frac{f'(z)}{f(z)}, z_0) = o(f, z_0)$. Poichè U è semplicemente connesso, possiamo applicare il Teorema dei Residui e ottenere la tesi. □

Last but not least, vediamo un teorema che ci aiuterà molto nella risoluzione di alcuni tipi di esercizi.

Teorema (di Rouché)**.** *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ un aperto semplicemente connesso, $\gamma : I \longrightarrow U$ chiusa e regolare a tratti[6], e siano $f, g \in O(U)$ tali che*

$$\|g(z) - f(z)\| < \|f(z)\| \;\; \forall z \in \gamma(I).$$

[5]Stiamo escludendo il caso in cui $f'(z) \equiv 0$, ovvero che f sia costante. In tal caso staremmo integrando una forma esatta su un cammino chiuso, quindi l'integrale sarebbe 0 senza bisogno di applicare alcun metodo risolutivo.

[6]In realtà basterebbe richiedere γ cammino chiuso, ma per noi non sarà restrittivo richiedere queste ipotesi più forti.

Allora vale la seguente uguaglianza:

$$\sum_{z\in U-\gamma(I)} I(\gamma, z)o(f, z) = \sum_{z\in U-\gamma(I)} I(\gamma, z)o(g, z),$$

Se γ è una circonferenza, ***il numero di zeri di f interni a γ coincide con il numero di zeri di g interni a γ****.*

Dimostrazione. La disuguaglianza che abbiamo per ipotesi ci dice che f e g non hanno zeri su $\gamma(I)$, quindi possiamo definire $F(z) = \frac{g(z)}{f(z)}$ e calcolarne l'integrale su γ. Osserviamo che

$$\|F(z) - 1\| = \left\|\frac{g(z) - f(z)}{f(z)}\right\| < 1 \ \forall z \in \gamma(I) \Rightarrow F(\gamma(I)) \subseteq B(1, 1),$$

da cui

$$I(F \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{F\circ\gamma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{[0,1]} \frac{F'(\gamma(t))\gamma'(t)}{F(\gamma(t))} dt$$

perchè γ è regolare a tratti. Allora

$$I(F \circ \gamma, 0) = \int_\gamma \frac{F'(z)}{F(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (-\frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{g'(z)}{g(z)}) dz.$$

Applicando il Teorema dell'Indicatore Logaritmico si ottiene la tesi. □

La Sfera di Riemann

Forse a questo punto vi sarà venuto in mente che nello spazio proiettivo la nozione di punto interno ed esterno ad un cammino chiuso debba necessariamente assumere un nuovo significato. Naturalmente ci si potrebbe chiedere in che modo ciò influenzi il calcolo di integrali tramite residui — speriamo di poter semplificare i conti! Per affrontare la questione dobbiamo innanzitutto approcciarci al cosiddetto *punto all'infinito*, quindi collocarci in una struttura che ci permetta di lavorarvi, e estendere infine i risultati visti fino ad ora. La Sfera di Riemann è appunto una tale struttura: fondamentalmente è una compattificazione di $\mathbb{C}$, ovvero $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dotato di opportuna topologia, ma è anche lecito vederla come $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. In generale la denoteremo con $\hat{\mathbb{C}}$.

Definizione. *Definiamo* ***aperti fondamentali*** *della Sfera di Riemann gli insiemi aperti $U_i = \{[z_0, z_1] \mid z_i \neq 0\}$ con $i = 0, 1$.*

Osserviamo subito che $U_i \cong \mathbb{C}$ tramite mappe del tipo

$$\begin{aligned} \phi_0 : U_0 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ [z_0, z_1] &\longmapsto \frac{z_1}{z_0} \end{aligned}$$

In particolare, si osserva che

$$\begin{aligned} \phi_1 \circ \phi_0^{-1} : \phi_0(U_0 \cap U_1) &\longrightarrow \phi_1(U_0 \cap U_1) \\ z &\longmapsto \frac{1}{z} \end{aligned}$$

dove $\phi_0(U_0 \cap U_2) \cong \phi_1(U_0 \cap U_1) \cong \mathbb{C}$.
In questa situazione, si dice che $\{(U_0, \phi_0), (U_1, \phi_1)\}$ è un *atlante analitico* e $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è detta *varietà analitica.*
A questo punto vorremmo, ovviamente, estendere la nozione di funzione olomorfa a $\hat{\mathbb{C}}$, ovvero includere il punto ∞ nel dominio di una generica funzione di variabile complessa.

Definizione. *Sia $U \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ aperto. $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ è detta* ***olomorfa*** *(o meromorfa) se valgono le seguenti:*

- *f è olomorfa (o meromorfa) nell'aperto $U \cap \mathbb{C}$;*
- *$\hat{f}(z) = f(\frac{1}{z})$ è olomorfa (o meromorfa) in $\hat{U} = \{\frac{1}{z} \in U \mid z \in U\}$.*

Chiaramente, se $U \subseteq \mathbb{C}$ la seconda richiesta è superflua. Se invece $\infty \in U$ allora la seconda è equivalente a richiedere che $\hat{f}$ sia olomorfa (o meromorfa) in 0.

Osservazione. *Se f ha una singolarità isolata in ∞, poichè un intorno del punto all'infinito è della forma $\{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| > c, c \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}$, è precisamente quella di $\hat{f}$ in 0.*

Esempio. *Sia $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$, $\hat{p}(z) = p(\frac{1}{z}) = \frac{a_n}{z^n} + \cdots + \frac{a_1}{z} + a_0$. Se $n > 1$, $\hat{p}(z)$ ha un polo di ordine n in 0 $\Rightarrow p(z)$ ha un polo di ordine n in ∞. Se invece $n = 0$, $\hat{p}(z)$ è una costante e $p(z)$ ha una singolarità eliminabile in ∞.*

Esempio. *La funzione $f(z) = e^z$ ha una singolarità essenziale in ∞ poichè $\hat{f}(z)$ ne ha una in 0.*

Proposizione (Caratterizzazione funzioni olomorfe su $\hat{\mathbb{C}}$)**.** *$f \in O(\hat{\mathbb{C}}) \Leftrightarrow f$ è costante.*

Dimostrazione. Questo risultato, come tanti altri, segue dal potentissimo Teorema di Liouville: $f \in O(\hat{\mathbb{C}})$ è chiaramente limitata, dunque è intera e limitata su $\mathbb{C} \Rightarrow f$ è costante. □

Proposizione (Caratterizzazione funzioni meromorfe su $\hat{\mathbb{C}}$)**.** *Le funzioni meromorfe su $\hat{\mathbb{C}}$ sono funzioni razionali che si lasciano scrivere come quoziente di polinomi.*

Dimostrazione. Sia $f \in M(\hat{\mathbb{C}}) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \mid f$ è analitica in $\{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| > c\}$, ovvero in un intorno puntato[7] di $\infty \Rightarrow$ le singolarità di f in $\mathbb{C}$ sono tutte contenute in $\overline{B(0,c)}$. Poichè sono un sottospazio discreto tutto contenuto in un compatto, sono in numero finito; siano esse $\{z_1, \cdots, z_m\}$ di ordini $\{m_1, \cdots, m_n\}$ — siamo sicuri che siano al più polari perchè f è meromorfa per ipotesi. Possiamo dunque affermare che $(z-z_1)^{m_1} \cdots (z-z_n)^{m_n} f(z) = g(z)$ sia olomorfa su tutto $\mathbb{C} \Rightarrow g(z) = \sum\limits_{k \geq 0} a_k z^k$. Ma $g(z)$ ha una singolarità al più polare in ∞, quindi deve essere un polinomio $\Rightarrow f$ è razionale ed è quoziente di polinomi. □

Vediamo dunque come calcolare il residuo di una funzione nel punto ∞.

Definizione. *Sia $U \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ aperto e $f \in M(U)$ con una singolarità isolata in ∞. Allora definiamo $Res(f, \infty) = Res(\tilde{f}, 0)$, dove $\tilde{f}(z) = \frac{1}{z^2}\hat{f}(z) = \frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z})$.*

Proposizione. *Sia $U \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ aperto e $f \in M(U)$ con una singolarità isolata in ∞. Allora*

$$Res(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha_R} f(\xi) d\xi$$

con R grande abbastanza affinchè f non abbia singolarità in $\{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| > R\}$ e $\alpha_R(t) = R \cdot e^{2\pi i t}$ con $t \in [0, 1]$.

Dimostrazione. f ha una singolarità isolata in ∞, dunque $\exists R >> 0$ tale che f è olomorfa in $\{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| \leq R\} \Rightarrow \hat{f}$ è olomorfa in $\overline{B(0, \frac{1}{R})} - \{0\}$, così come $\tilde{f}$. Allora: $Res(\tilde{f}, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha_{\frac{1}{R}}} \tilde{f}(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha_{\frac{1}{R}}} f(\frac{1}{z}) \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha_R} f(\xi) d\xi$. □

Osservazione. *$f(z) = \frac{1}{z}$ ha una singolarità eliminabile in ∞, ma $Res(f, \infty) = -1$ perchè $\tilde{f}(z) = \frac{1}{z}$. Non è dunque vero nel caso di ∞ che le singolarità eliminabili abbiano residuo nullo.*

[7] Un intorno puntato di un punto è una palla aperta centrata in tale punto senza il punto stesso.

Diamo ora il risultato che ci semplificherà di molto il calcolo di vari integrali.

Proposizione. *Sia* $f \in M(\hat{\mathbb{C}})$. *Allora* $\sum_{z \in \hat{\mathbb{C}}} Res(f, z) = 0$.

Dimostrazione. Sia $R >> 0$ tale che $\{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| > R\}$ non contiene singolarità di $f \Rightarrow$ tutte le singolarità di f sono in $B(0, R)$. Allora vale che

$$-Res(f, \infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_R} f(z)dz = \sum_{z \in \mathbb{C}} Res(f, z).$$

□