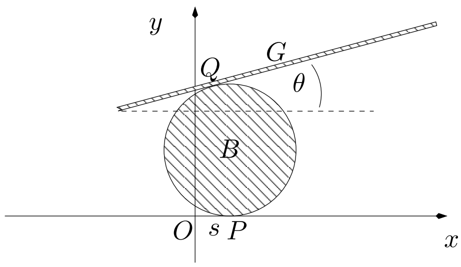
Compito parziale di Istituzioni di Fisica Matematica
22 Novembre 2011
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico descritto in figura, composto da un disco omogeneo di massa M e raggio R che può rotolare senza strisciare sull'asse Ox. Sul disco può a sua volta rotolare senza strisciare un'asta omogenea di massa m e lunghezza ℓ. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g. Si usino come coordinate l'ascissa s del baricentro B del disco



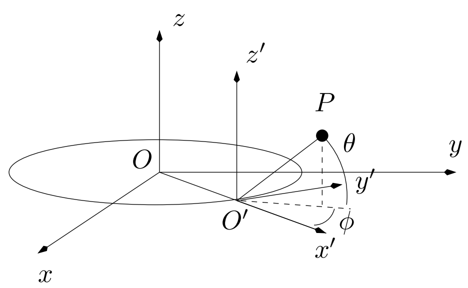
e l'angolo θ tra l'asta e la direzione orizzontale e si assuma che per $s = 0, \theta = 0$ il punto di contatto Q tra asta e disco coincida col baricentro G dell'asta.

(i) Determinare il centro istantaneo di rotazione dell'asta;

(ii) scrivere la seconda equazione cardinale per la sola asta rispetto al polo Q.

Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $\Sigma = Oxyz$ con asse Oz verticale ascendente e si consideri un riferimento $\Sigma' = O'x'y'z'$ con O' che si muove di moto circolare uniforme nel piano Oxy con legge oraria $x_{O'} = R\cos(\omega t)$, $y_{O'} = R\sin(\omega t)$, $z_{O'} = 0$, $\omega \neq 0$ costante. L'asse $O'z'$ è sempre parallelo a Oz e l'asse $O'x'$ è orientato come $O' - O$ (vedi figura). Nel riferimento Σ' si consideri un pendolo sferico formato da un punto materiale P di massa m sospeso ad O' tramite un'asta di lunghezza ℓ e massa trascurabile. Sul pendolo agisce la forza di gravità, di accelerazione g. Si usino come coordinate lagrangiane l'angolo θ che



$P - O'$ forma col piano $O'x'y'$ e l'angolo ϕ che la proiezione di $P - O'$ su $O'x'y'$ forma con l'asse $O'x'$.

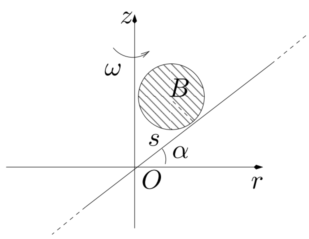
(i) Scrivere l'energia potenziale generalizzata delle forze apparenti che agiscono su P nel riferimento Σ';

(ii) scrivere la lagrangiana del sistema.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
20 Gennaio 2012
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si fissi un riferimento $Oxyz$ con asse Oz verticale ascendente e si consideri il sistema meccanico descritto in figura, mobile nel piano Orz, dove Or è un asse giacente nel piano Oxy. Il sistema è formato da un disco omogeneo di massa m e raggio R che può rotolare senza strisciare su una guida rettilinea passante per O, che forma un angolo costante $\alpha \in (0, \pi/2)$ con l'asse Or. Il piano Orz viene fatto ruotare attorno all'asse Oz con velocità angolare costante $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \omega \hat{\mathbf{z}}$. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g.



Usando come coordinata l'ascissa s del baricentro B del disco sulla guida

(i) calcolare l'energia potenziale della forza centrifuga agente sul disco nel riferimento rotante;

(ii) scrivere la lagrangiana e l'equazione di Lagrange;

(iii) trovare le configurazioni di equilibrio relative, nel riferimento rotante, e discuterne la stabilità.

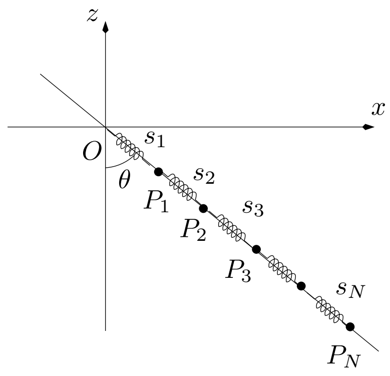
Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ con asse Oz verticale ascendente e si consideri il sistema meccanico descritto in figura, mobile nel piano Oxz, composto da N punti materiali $P_1, \ldots, P_N$ di ugual massa m. I punti P_j possono scorrere su una guida rettilinea incernierata nell'origine O. Inoltre delle molle di ugual costante elastica k collegano O a P_1, e P_j a P_{j+1}, $j = 1 \ldots N-1$. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g. Supponiamo che la guida sia liscia e che i punti materiali possano attraversarsi a vicenda. Si usino come coordinate lagrangiane l'angolo θ che la guida forma con la direzione verticale, l'ascissa s_1 di P_1 sulla guida e le ascisse relative $s_j, j = 2 \ldots N$ dei P_j calcolate rispetto ai P_{j-1} sulla guida.

(i) Scrivere la lagrangiana del sistema.

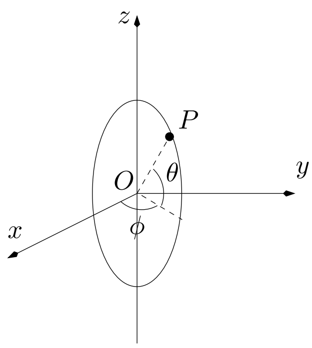
(ii) Calcolare tutte le configurazioni di equilibrio.

(iii) Determinare la stabilità degli equilibri.



Terzo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ con asse Oz verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico formato da un anello omogeneo di massa M e raggio R, con centro fissato in O e libero di ruotare attorno all'asse Oz. Sull'anello può scivolare un punto materiale P di massa m. Si usino come coordinate lagrangiane l'angolo ϕ tra l'anello e il piano Oxz, e l'angolo θ tra il segmento OP e la sua proiezione sul piano Oxy (vedi figura). Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g.



(i) Scrivere la lagrangiana e la hamiltoniana del sistema.

(ii) Ridurre il numero di gradi di libertà del sistema usando la variabile ciclica e descrivere la dinamica nello spazio ridotto assumendo che i valori iniziali $\theta_0, \dot{\phi}_0$ di $\theta, \dot{\phi}$ soddisfino la condizione

$$\Big(1 + 2\frac{m}{M}\cos^2\theta_0\Big)|\dot{\phi}_0| < \sqrt{\frac{g}{R}}\ . \tag{1}$$

(iii) Trovare due integrali primi genericamente indipendenti del sistema hamiltoniano che siano in involuzione. Determinare inoltre i valori singolari delle variabili canoniche $(p_\phi, p_\theta, \phi, \theta)$ per cui tali integrali non sono indipendenti assumendo che valga la condizione (1).

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
10 Febbraio 2012
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

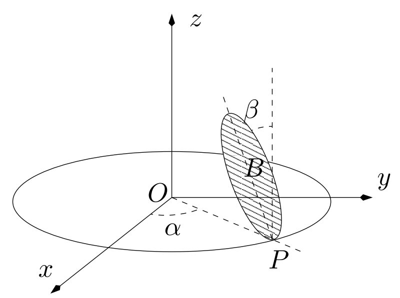
Si fissi un riferimento $Oxyz$ con asse Oz verticale ascendente e si consideri il sistema meccanico costituito da una sfera piena omogenea di massa m e raggio r che può rotolare senza strisciare sul piano Oxy. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g.

1. Usando le equazioni cardinali della dinamica descrivere il moto del baricentro B della sfera e la reazione vincolare $\vec{\mathbf{\Phi}}$ esercitata sul punto della sfera P a contatto col piano Oxy.

2. Si risponda alla domanda del punto precedente assumendo stavolta che l'asse Oz sia inclinato di un angolo $\alpha \in (0, \pi/2)$ rispetto alla verticale e che Oy abbia la direzione di massima pendenza.

Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ con asse Oz verticale ascendente e si consideri il sistema meccanico descritto in figura composto da un disco omogeneo di massa m e raggio r che rotola senza strisciare su una guida circolare di raggio $R = 2r$ centrata in O e giacente nel piano Oxy. Il disco si può inclinare durante il suo moto, ma la retta tangente alla guida nel punto di contatto col disco resta sempre nel piano del disco. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g.



Chiamiamo B il baricentro del disco e P il punto di contatto fra disco e guida. Usando come coordinate l'angolo α che il segmento OP forma con l'asse Ox e l'angolo β che il segmento PB forma con la direzione vericale,

(i) scrivere la velocità angolare del disco;

(ii) scrivere la lagrangiana del sistema e le equazioni di Lagrange.

Terzo Esercizio

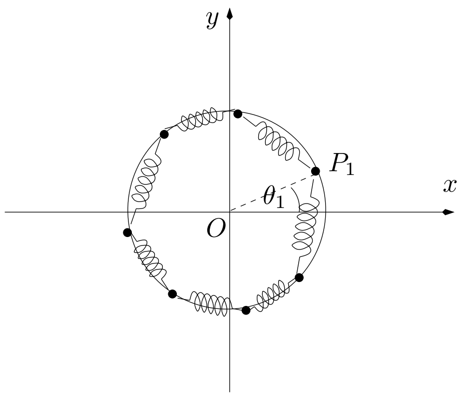
Si consideri nel piano Oxy il moto di un punto materiale P di massa m soggetto ad una forza centrale con centro in O ed energia potenziale $V(x, y) = -\frac{k}{\rho^2}$ dove $k > 0$ e $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ è la distanza di P dal centro di forza.

1. Scrivere la funzione di Hamilton del sistema.
2. Scrivere l'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione caratteristica W e calcolare un integrale completo di tale equazione.

Compito parziale di Istituzioni di Fisica Matematica
10 Gennaio 2012
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

In un piano orizzontale si fissi un sistema di riferimento Oxy. Si consideri il sistema meccanico descritto in figura, composto da N punti materiali $P_1 \dots P_N$, di ugual massa m. I punti P_j possono scorrere su una circonferenza di raggio R centrata in O. Inoltre ogni punto $P_j, j = 1 \dots N$, è collegato sia a P_{j-1} che a P_{j+1} da molle uguali di costante elastica k (abbiamo assunto $P_0 = P_N$, $P_{N+1} = P_1$). Supponiamo che la guida sia liscia e che i punti materiali possano attraversarsi a vicenda. Si usino come coordinate lagrangiane gli angoli $\theta_j, j = 1 \dots N$ che i segmenti OP_j formano con l'asse Ox.



(i) Scrivere la lagrangiana L del sistema.

(ii) Determinare un'azione $\phi_\alpha(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)$, del gruppo $\mathbb{R}$ sul toro $\mathbb{T}^N$ tale che L sia invariante per l'azione indotta su $T\mathbb{T}^N$, scrivere il generatore infinitesimo $\xi(\boldsymbol{\theta})$ dell'azione $\phi_\alpha(\boldsymbol{\theta})$ e trovare il corrispondente integrale primo del sistema lagrangiano associato ad L.

(iii) Trovare una trasformazione di coordinate $(\theta_1, \dots, \theta_N) = \boldsymbol{\theta} \overset{\Psi}{\mapsto} \boldsymbol{\Theta} = (\Theta_1, \dots, \Theta_N)$ per cui la lagrangiana L, scritta nelle nuove coordinate, abbia una variabile ciclica.[1]

(iv) Scrivere la lagrangiana ridotta con il metodo di Routh.

(v) Scrivere le equazioni degli equilibri nello spazio delle fasi ridotto.

(vi) Verificare che, se $N > 4$, le configurazioni con $\theta_{j+1} - \theta_j = \frac{2\pi}{N}, j = 1 \dots N$ corrispondono ad un equilibrio stabile nello spazio delle fasi ridotto.

[1]Suggerimento: (1) scrivere il flusso integrale $\Phi_t(\boldsymbol{\theta})$ di $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \xi(\boldsymbol{\theta})$; (2) considerare la trasformazione $\Psi(\boldsymbol{\theta}) = \Phi_{\theta_1}(0, -\theta_2, \dots, -\theta_N)$ e scrivere il campo vettoriale ξ nelle variabili $\boldsymbol{\Theta} = \Psi(\boldsymbol{\theta})$; (3) osservare che la variabile Θ_1 è ciclica nella lagrangiana espressa in funzione di $\boldsymbol{\Theta}, \dot{\boldsymbol{\Theta}}$.

Secondo Esercizio

Si determini la soluzione del sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H(p,q) = \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{n}\left[(1+q_h^2)^2 p_h^2 + (\arctan q_h)^2\right] \ , \qquad p,q \in \mathbb{R}^n$$

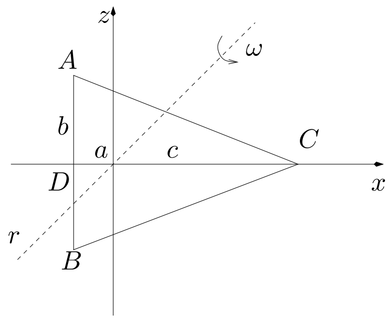
con condizioni iniziali

$$q_h(0) = 1, \quad p_h(0) = 0, \qquad h = 1 \ldots n \ .$$

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
12 Giugno 2012
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento inerziale $Oxyz$, con versori degli assi $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$. Si consideri un triangolo isoscele omogeneo orientato come in figura, di massa m, base b e altezza h, che ruota attorno all'asse r definito da $\hat{\mathbf{e}}_1+\hat{\mathbf{e}}_3$, con velocità angolare costante $\vec{\omega}$.



L'asse r divide l'asse di simmetria CD del triangolo in due parti, di lunghezza a, c rispettivamente ($h = a + c$). Dimostrare che, scelti a, b con $b^2 > 12a^2$, è possibile determinare c in modo da ottenere la rotazione uniforme del triangolo con momento delle forze esterne nullo rispetto al polo O.

Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ con asse Oz verticale ascendente e si consideri il sistema meccanico composto da 3 punti materiali P_1, P_2, P_3 di uguale massa m che possono scorrere su 3 semirette uscenti da O, di equazioni parametriche

$$\begin{aligned}
&x_1 = s_1\,, y_1 = 0\,, z_1 = -s_1\,,\\
&x_2 = -\frac{s_2}{2}\,, y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}s_2\,, z_2 = -s_2\,,\\
&x_3 = -\frac{s_3}{2}\,, y_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}s_3\,, z_3 = -s_3\,,
\end{aligned}$$

con $s_1, s_2, s_3 > 0$. I punti P_j sono collegati tra loro da molle di ugual costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Usando come coordinate i parametri s_1, s_2, s_3,

i) scrivere la lagrangiana del sistema;

ii) dimostrare che c'è un unico punto di equilibrio stabile;

iii) scrivere l'equazione per le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio stabile e dimostrare che una frequenza è $\bar{\omega} = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

iv) trovare il modo normale associato alla frequenza $\bar{\omega}$ e descrivere geometricamente il moto ad esso associato.

Terzo Esercizio

Si consideri il moto piano di un corpo puntiforme di massa m nel campo di forze generato da due centri fissi di attrazione O_1, O_2 posti a distanza $2d$, $d > 0$ l'uno dall'altro.

Introduciamo in tale piano il sistema di riferimento Oxy, con asse Ox diretto lungo la retta congiungente i due centri e con l'origine O posto a distanza d da ciascuno di essi.

Le forze $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ sviluppate da ciascuno dei centri sono date da

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{(x-d, y)}{[(x-d)^2 + y^2]^{3/2}}\,, \qquad \mathbf{F}_2 = -\frac{(x+d, y)}{[(x+d)^2 + y^2]^{3/2}}\ .$$

Mostrare che usando le variabili ellittiche (ξ, η), definite da

$$x = \cosh\xi\cos\eta\,, \qquad y = \sinh\xi\sin\eta\,,$$

l'equazione di Hamilton-Jacobi per il sistema si scompone in due equazioni differenziali ordinarie.

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
3 Luglio 2012
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

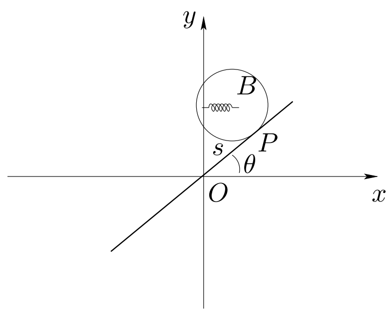
Si fissi un sistema di riferimento inerziale $\Sigma = Ox_1x_2x_3$, con versori degli assi $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$. Si consideri il moto di un punto materiale P di massa m in un riferimento $\Sigma' = Ox'_1x'_2x'_3$ che ruota attorno all'asse Ox_3 di Σ con velocità angolare $\vec{\omega} = \omega\hat{\mathbf{e}}_3$, in cui $\omega = \omega(t)$ è una funzione nota del tempo. Il punto P è collegato all'origine da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla.

Usando come coordinate lagrangiane le variabili x'_1, x'_2, x'_3, che rappresentano le coordinate cartesiane in Σ',

1) scrivere le componenti lagrangiane delle forze apparenti nel riferimento Σ';
2) scrivere le equazioni di Lagrange per il moto del punto nel riferimento Σ'.

Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento Oxy con asse Oy verticale ascendente e si consideri il sistema meccanico piano composto da un'asta omogenea di massa m e lunghezza 2ℓ che può ruotare nel piano Oxy avendo il baricentro incernierato nell'origine O. Sull'asta può rotolare senza strisciare un disco omogeneo di massa M e raggio R, mantenendosi sempre a contatto con l'asta (vedi figura). Il baricentro B del disco è collegato all'asse Oy da una molla che si mantiene sempre parallela all'asse Ox. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g.



Usando come coordinate l'angolo θ che l'asta forma con l'asse Ox e l'ascissa s sull'asta del punto di contatto P tra disco e asta

i) scrivere la lagrangiana del sistema;

ii) trovare i punti di equilibrio al variare dei parametri m, M, g, R, k, ℓ;

iii) determinare la stabilità degli equilibri assumendo $2Mg = kR$;

iv) nelle ipotesi del punto iii) scrivere l'equazione secolare per le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno agli equilibri stabili.

Terzo Esercizio

Completare la relazione

$$P = \frac{p}{1+t^2} - 2q$$

ad una trasformazione canonica dipendente dal tempo

$$\mathbb{R}^3 \ni (p,q,t) \overset{\Psi}{\mapsto} (P(p,q,t), Q(p,q,t), t) \in \mathbb{R}^3 \ .$$

Dato il campo vettoriale hamiltoniano $X_H = \mathbb{J}\nabla_{(p,q)}H$, con

$$H(p,q,t) = \frac{1}{2}\left[\frac{p^2}{(1+t^2)^2} + q^2\right] ,$$

determinare il campo hamiltoniano $\Psi_* X_H$, che si ottiene da X_H attraverso la trasformazione Ψ. Trovare inoltre una funzione di Hamilton $K(P,Q,t)$ per tale campo.