Istituzioni di Fisica Matematica

Giovanni Federico Gronchi

Anno Accademico 2014/2015

Appunti di Alessia Vanni
http://poisson.phc.unipi.it/∼vanni/
vanni@mail.dm.unipi.it

Indice

Capitolo 1

Meccanica Lagrangiana

1.1 Un po' di calcolo delle variazioni

In questa sezione vedremo come sviluppare il concetto di derivata e di differenziale su uno spazio di funzioni, cioè in dimensione infinita. Lo scopo di tutto ciò sarà trovare le curve che minimizzano opportuni funzionali (cioè l'analogo dei punti di minimo per l funzioni reali) e dimostrare che queste curve risolvono l'equazione di Eulero-Lagrange del sistema dinamico assegnato. In altre parole, una volta fissati un punto di partenza e uno di arrivvo, vogliamo trovare le traiettorie che rendono minima l'azione del moto.

Iniziamo considerando un *funzionale*

$$\mathscr{F} : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

con X spazio di funzioni (che per ora lasciamo non definito) di dimensione infinita. Fissiamo adesso $u_0 \in V \subset X$, $\zeta \in X$, e consideramo l'insieme delle variazioni di u_0 della forma

$$\{u = u_0 + \epsilon\zeta, \quad |\epsilon| < \epsilon_0\}$$

con $\epsilon_0 > 0$ scelto in modo che ogni funzione u così definita stia ancora nell'insieme V. Il funzionale $\mathscr{F}$ di partenza, valutato su una generica u, assume la forma di funzione di una variabile reale:

$$\Phi(\epsilon) = \mathscr{F}(u_0 + \epsilon\zeta). \tag{1.1}$$

Definizione:
Se esiste $\Phi'(0)$, diciamo che è la *variazione prima di* $\mathscr{F}$ *in* u_0 *lungo la*

direzione ζ.
Analogamente possiamo definire la *variazione seconda di* $\mathscr{F}$ *in* u_0 *lungo la direzione* ζ come $\Phi''(0)$ (sempre se esiste!).

Utilizzando le definizioni appena date, possiamo definire il concetto di minimo di un funzionale $\mathscr{F}$ in modo analogo a quanto fatto in dimensione n.

Definizione: Con la notazione appena introdotta, u_0 è un minimo di $\mathscr{F}$ se

$$\frac{d\mathscr{F}}{d\epsilon}(u_0+\epsilon\zeta)|_{\epsilon=0} = \Phi'(0) = 0 \quad \forall\zeta \in X \tag{1.2}$$

$$\frac{d^2\mathscr{F}}{d\epsilon^2}(u_0+\epsilon\zeta)|_{\epsilon=0} = \Phi''(0) \geq 0 \quad \forall\zeta \in X \tag{1.3}$$

Esistono altre definizioni di derivate su spazi di funzioni, ad esempio la derivata secondo Frechet e quella secondo Gateaux, che introducono anche l'analogo del differenziale.
Definizione:

- $\mathscr{F}$ è *derivabile secondo Frechet* se $\exists l \in X^*$ tale che :

$$\mathscr{F}(u+\zeta) = \mathscr{F}(u) + l(\zeta) + o(|\zeta|) \quad \forall\zeta \in X; \tag{1.4}$$

- $\mathscr{F}$ è *derivabile secondo Gateaux* se $\exists l \in X^*$ tale che :

$$\mathscr{F}(u+\epsilon\zeta) = \mathscr{F}(u) + \epsilon l(\zeta) + o(|\epsilon|) \quad \forall\zeta \in X; \tag{1.5}$$

Nota: L'Arnold utilizza la (1.4).

Notazione:

- Variazione prima:

$$\Phi'(0) = \delta\mathscr{F}(u_0, \zeta);$$

- Derivata secondo Frechet:

$$l(\zeta) = D\mathscr{F}(u_0)\zeta;$$

- Derivata secondo Gateaux:

$$l(\zeta) = d\mathscr{F}(u_0, \zeta);$$

Passiamo ora a definire il funzionale che vogliamo minimizzare: data L (L nel nostro caso sta per lagrangiana!) funzione di tre variabili reali, t intervallo di tempo, $L, u \in \mathscr{C}$, si dice *funzionale tipico* o *azione* il funzionale

$$\mathscr{J}_L(u) = \int_{t_0}^{t_1} L(u(t), \dot{u}(t), t)dt. \tag{1.6}$$

Per questo funzionale valgono le uguaglianze:

$$\delta\mathscr{F}(u_0, \zeta) = D\mathscr{F}(u_0)\zeta = d\mathscr{F}(u_0, \zeta) \tag{1.7}$$

Ricordiamo che vogliamo trovare la traiettoria che, in un tempo $t_1 - t_0$, congiunge i due punti fissati $u(t_0), u(t_1)$.
Sia quindi

$$\Gamma = \{\gamma : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^n : \gamma(t_0) = q_0, \gamma(t_1) = q_1\} \tag{1.8}$$

l'insieme in cui andremo a cercare le soluzioni stazionarie.

Cominciamo con lo studiare la variazione prima di $\mathscr{J}_L(\gamma)$, con $L \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, lungo una curva η di estremi nulli (in questo modo rimaniamo in Γ).

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda}\mathscr{J}_L(\gamma, \eta)|_{\lambda=0} &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{d\lambda} L(\gamma + \lambda\eta, \dot{\gamma} + \lambda\dot{\eta}, t)|_{\lambda=0} dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j}(\gamma + \lambda\eta, \dot{\gamma} + \lambda\dot{\eta}, t)\eta_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\gamma + \lambda\eta, \dot{\gamma} + \lambda\dot{\eta}, t)\dot{\eta}_j \right) |_{\lambda=0} dt \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j}(\gamma, \dot{\gamma}, t)\eta_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\gamma, \dot{\gamma}, t)\dot{\eta}_j \right) dt \\
&\underbrace{=}_{perparti} \sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j}(\gamma, \dot{\gamma}, t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\gamma, \dot{\gamma}, t) \right) \eta_j dt + \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\gamma, \dot{\gamma}, t)\eta_j \right]_{t_0}^{t_1}.
\end{aligned}$$

Ora, poiché η è nulla agli estremi, l'ultimo termine si annulla, e otteniamo la derivata lungo η

$$\frac{d}{d\lambda}\mathscr{J}_L(\gamma, \eta)|_{\lambda=0} = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j}(\gamma, \dot{\gamma}, t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\gamma, \dot{\gamma}, t) \right) \eta_j dt. \tag{1.9}$$

Osservazione: L'ipotesi che $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ serve. Infatti

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q_k \partial \dot{q}_j}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial q_k}\dot{q}_k\right) + \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}_j}.$$

Principio di Hamilton (o di Minima azione): Dati $L(q, \dot{q}, t) \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\gamma \in \Gamma$, $\mathscr{J}_L(\gamma)$, abbiamo che γ rende $\mathscr{J}_L$ stazionario $\Longleftrightarrow$ γ risolve le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \tag{1.10}$$

Dimostrazione.
$\Rightarrow$) Ovvio;
$\Leftarrow$) Serve un lemma.
Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni:
Sia $f : [t_0, t_1] \longleftarrow \mathbb{R}$ continua, tale che

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)dt = 0 \quad \forall h \in \mathscr{C}_0^\infty([t_0, t_1]). \tag{1.11}$$

Allora $f \equiv 0$.

Dimostrazione. per assurdo: se f non fosse identicamente nulla $\Rightarrow$

$$\exists \bar{t} \in (t_0, t_1) | f(\bar{t}) \geq 0.$$

Scegliamo adesso

$$\overline{\eta} \in \mathscr{C}_0^\infty([t_0, t_1]) \quad | \quad \overline{\eta} > 0 \quad \text{in} \quad (\tau_0, \tau_1),$$
$$\overline{\eta} = 0 \quad \text{fuori da} \quad (\tau_0, \tau_1), \quad \text{dove} \quad t_0 < \tau_0 < \tau_1 < t_1.$$

Abbiamo quindi che

$$\int_{t_0}^{t_1} f\overline{\eta}dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} f\overline{\eta}dt > 0, \quad \text{assurdo.}$$

□

Mettiamoci nelle ipotesi del lemma, scegliendo $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, con η_1 qualsiasi ed $\eta_2 \equiv \cdots \equiv \eta_n \equiv 0$.
Allora,

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q_1}(\gamma, \dot{\gamma}, t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}(\gamma, \dot{\gamma}, t)\right]\eta_1 dt = 0$$

implica che $\frac{\partial L}{\partial q_1}(\gamma, \dot{\gamma}, t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 0$.
Ripetendo il procedimento per $j = 2, \ldots, n$ otteniamo la tesi. □

Variazioni e cambiamenti di coordinate

Supponiamo di avere $L(q, \dot{q}, t)$ lagrangiana con le stesse proprietà del paragrafo precedente. Cosa succede alle equazioni di Eulero-Lagrange se cambio le coordinate del sistema tramite un diffeomorfismo $Q = \varphi(q)$?
Ci immaginiamo che le equazioni conutinuino valere, ossia che le variazioni prime dei due funzionali $\mathscr{I}_L$ e $\mathscr{I}_{\mathscr{L}}$ si annullino simultaneamente. In particolare, per il teorema del cambiamento di variabili, vale che

$$\int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \mathscr{L}(\varphi(q), \frac{\partial \varphi}{\partial q}\dot{q}, t)dt \tag{1.12}$$

ossia, le azioni assumono gli stessi valori sulle funzioni che si corrispondono attraverso φ. In particolare, se $\gamma'(t) = \varphi(\gamma(t))$,

$$\begin{aligned} \delta \mathscr{I}_L(\gamma, \eta) &= \frac{d}{d\lambda}\mathscr{I}_L(\gamma + \lambda\eta)|_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda}\mathscr{I}_{\mathscr{L}}\varphi(\gamma + \lambda\eta)|_{\lambda=0} && (1.13)\\ &= \frac{d}{d\lambda}\mathscr{I}_{\mathscr{L}}(\gamma' + \lambda \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial q}(\gamma)\eta}_{\eta'})|_{\lambda=0} = \delta \mathscr{I}_{\mathscr{L}}(\gamma', \eta') && (1.14) \end{aligned}$$

Quindi,

$$\delta \mathscr{I}_L(\gamma, \eta) = 0 \quad \forall \eta \quad \Leftrightarrow \quad \delta \mathscr{I}_{\mathscr{L}}(\gamma', \eta') = 0 \quad \forall \eta \tag{1.15}$$

che implica

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}} - \frac{\partial L}{\partial \gamma} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\gamma}'} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \gamma'} = 0. \tag{1.16}$$

Seguono 2 esempi. (29/ 09/ 2014)

1.2 Principio di Maupertuis

Il passo successivo è quello di esprimere i funzionali senza esplicitare la dipendenza dal tempo. Iniziamo considerando la funzione

$$E(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L \tag{1.17}$$

che chiameremo *integrale di Jacobi*, e dimostriamo che è un integrale primo del moto.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(q, \dot{q}) &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} - \left(\frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q}\right) && (1.18)\\ &= \underbrace{\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}\right]}_{=0 \text{ lungo le soluzioni}} \dot{q}. && (1.19) \end{aligned}$$

Adesso vogliamo considerare una classe di curve che siano

- *asincrone*: hanno gli stessi estremi q_0, q_1 che raggiungono in istanti distinti
- *isoenergetiche*: appartengono all'insieme di livello $E(q, \dot{q}) = c$.

Principio di Maupertius
Consideriamo il funzionale *azione ridotta*

$$S_L(\gamma) = \int_{t_0(\gamma)}^{t_1(\gamma)} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\gamma, \dot{\gamma})\dot{\gamma} dt. \tag{1.20}$$

$\overline{\gamma}$ è soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange associate a $L(q, \dot{q}) \Leftrightarrow$ è un punto stazionario di S_L nella classe delle curve asincrone isoenergetiche.
N.B. Gli estremi dell'integrale dipendono dalla γ che si sceglie!

Dimostrazione. Consideriamo le curve

$$\gamma_\lambda : [t_0(\lambda), t_1(\lambda)] \longrightarrow \mathbb{R}^n \tag{1.21}$$

con

$$\gamma_0 = \overline{\gamma} \tag{1.22}$$
$$\gamma_\lambda(t_j(\lambda)) = q_j, \quad j = 0, 1 \tag{1.23}$$

o, analogamente, $\gamma_\lambda(t_j(\lambda)) = \gamma_\lambda(t_j(\lambda), \lambda)$ (in questo modo ho esplicitato la dipendenza da λ). Deriviamo adesso $\gamma_\lambda(t_j(\lambda), \lambda)$ rispetto a λ:

$$0 = \frac{d}{d\lambda}(q_j) = \frac{d}{d\lambda}\left[\gamma(t_j(\lambda), \lambda)\right]|_{\lambda=0} \tag{1.24}$$
$$\left[\frac{\partial \gamma}{\partial t}(t_j(\lambda), \lambda)t_j'(\lambda) + \frac{\partial \gamma}{\partial \lambda}(t_j(\lambda), \lambda)\right]|_{\lambda=0} \tag{1.25}$$
$$= \dot{\overline{\gamma}}(t_j)t_j'(0) + \frac{\partial \gamma}{\partial \lambda}(t_j, 0). \tag{1.26}$$

In particolare a noi interessa la relazione

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \lambda}(t_j, 0) = -\dot{\overline{\gamma}}(t_j)t_j'(0) \tag{1.27}$$

Adesso introduciamo l'azione lagrangiana

$$A_L(\gamma_\lambda) = \int_{t_0(\lambda)}^{t_1(\lambda)} L(\gamma_\lambda(t), \dot{\gamma_\lambda}(t))dt \tag{1.28}$$

e deriviamo di nuovo rispetto a λ:

$$\frac{d}{d\lambda}A_L(\gamma_\lambda) = \frac{dt_1(\lambda)}{d\lambda}L(\gamma_\lambda(t_1),\dot{\gamma_\lambda}(t_1)) - \frac{dt_0(\lambda)}{d\lambda}L(\gamma_\lambda(t_0),\dot{\gamma_\lambda}(t_0)) \tag{1.29}$$
$$+\int_{t_0(\lambda)}^{t_1(\lambda)} \frac{\partial L}{\partial q}(\gamma_\lambda(t),\dot{\gamma_\lambda}(t))\frac{\partial\gamma_\lambda(t)}{\partial\lambda} + \frac{\partial L}{\partial\dot{q}}(\gamma_\lambda(t),\dot{\gamma_\lambda}(t))\frac{\partial\dot{\gamma_\lambda}(t)}{\partial\lambda}dt \tag{1.30}$$

Per $\lambda = 0$ abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda}A_L(\gamma_\lambda)|_{\lambda=0} = \frac{dt_1(0)}{d\lambda}L(\gamma_\lambda(t_1),\dot{\gamma_\lambda}(t_1)) - \frac{dt_0(0)}{d\lambda}L(\gamma_\lambda(t_0),\dot{\gamma_\lambda}(t_0))\\
+\int_{t_0(\lambda)}^{t_1(\lambda)} \frac{\partial L}{\partial q}(\gamma_\lambda(t),\dot{\gamma_\lambda}(t))\frac{\partial\gamma_\lambda(t)}{\partial\lambda} + \frac{\partial L}{\partial\dot{q}}(\gamma_\lambda(t),\dot{\gamma_\lambda}(t))\frac{\partial\dot{\gamma_\lambda}(t)}{\partial\lambda}dt|_{\lambda=0}\\
= t_1'(0)L(\overline{\gamma}(t_1),\dot{\overline{\gamma}}(t_1) - t_0'(0)L(\overline{\gamma}(t_0),\dot{\overline{\gamma}}(t_0)\\
+\int_{t_0(\lambda)}^{t_1(\lambda)} \frac{\partial L}{\partial q}(\overline{\gamma}(t),\dot{\overline{\gamma}}(t))\frac{\partial\gamma_\lambda(t)}{\partial\lambda} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}(\overline{\gamma}(t),\dot{\overline{\gamma}}(t))\right)\frac{\partial\gamma_\lambda(t)}{\partial\lambda}dt|_{\lambda=0}\\
+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}(\overline{\gamma}(t_1),\dot{\overline{\gamma}}(t_1))\frac{\partial\gamma_\lambda}{\partial\lambda}(t_1)|_{\lambda=0} - \frac{\partial L}{\partial\dot{q}}(\overline{\gamma}(t_0),\dot{\overline{\gamma}}(t_0))\frac{\partial\gamma_\lambda}{\partial\lambda}(t_0)|_{\lambda=0}
\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è data dalla relazione

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}(\overline{\gamma},\dot{\overline{\gamma}})\frac{\partial\gamma_\lambda}{\partial\lambda}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}(\overline{\gamma},\dot{\overline{\gamma}})\right)\cdot\frac{\partial\gamma_\lambda}{\partial\lambda} + \frac{\partial L}{\partial\dot{q}}(\overline{\gamma},\dot{\overline{\gamma}})\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial\gamma_\lambda}{\partial\lambda} \tag{1.31}$$

(più precisamente, esprimi l'ultimo termine come differenza degli altri due, sostituiscilo nell'integrale e risolvilo!).

Notando che dentro l'ultimo integrale abbiamo i termini dell'equazione di E-L di L, valutata in $\overline{\gamma}$, che quindi rendono nullo l'integrale.

Proseguiamo con il calcolo.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda}A_L(\gamma_\lambda)|_{\lambda=0} \overbrace{=}^{(1.27)} \left[L(\overline{\gamma}(t_1),\dot{\overline{\gamma}}(t_1)) - \dot{\overline{\gamma}}(t_1)\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}(\overline{\gamma}(t_1),\dot{\overline{\gamma}}(t_1))\right]t_1'(0)\\
-\left[L(\overline{\gamma}(t_0),\dot{\overline{\gamma}}(t_0)) - \dot{\overline{\gamma}}(t_0)\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}(\overline{\gamma}(t_0),\dot{\overline{\gamma}}(t_0))\right]t_0'(0)\\
= (-c)t_1'(0) - (-c)t_0'(0) = -c(t_1'(0) - t_0'(0))\\
= -c\frac{d}{d\lambda}\int_{t_0(\lambda)}^{t_1(\lambda)} dt|_{\lambda=0} = -\frac{d}{d\lambda}\int_{t_0(\lambda)}^{t_1(\lambda)} E(\gamma_\lambda(t),\dot{\gamma_\lambda}(t))dt|_{\lambda=0}.
\end{aligned}$$

Quindi, ricordando la definizione di A_L

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda}\int_{t_0(\lambda)}^{t_1(\lambda)} E(\gamma_\lambda,\dot\gamma_\lambda)dt|_{\lambda=0} &= -\frac{d}{d\lambda}\int_{t_0(\lambda)}^{t_1(\lambda)} E(\gamma_\lambda,\dot\gamma_\lambda)dt|_{\lambda=0} \\
\Rightarrow 0 &= \frac{d}{d\lambda}\int_{t_0(\lambda)}^{t_1(\lambda)} (L+E)(\gamma_\lambda,\dot\gamma_\lambda)dt|_{\lambda=0} \\
&= \frac{d}{d\lambda}\int_{t_0(\lambda)}^{t_1(\lambda)} \frac{\partial L}{\partial \dot q}(\gamma_\lambda,\dot\gamma_\lambda)\dot\gamma_\lambda dt|_{\lambda=0} \\
&= \frac{d}{d\lambda} S_L(\gamma_\lambda)|_{\lambda=0}
\end{aligned}$$

□

1.3 Vincoli Olonomi Fissi

Consideriamo adesso un sistema di N punti materiali soggetti a dei vincoli e a forze conservative. Un vincolo olonomo fisso restringe il moto dei corpi ad una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^{3N}$ che non dipende dal tempo.

Consideriamo il caso in cui $L(q,\dot q) = L_0 + L_1 + L_2$, dove gli indici indicano il grado di omogeneità rispetto a $\dot q$ e calcoliamone l'integrale di Jacobi (che esiste, sia la lagrangiana che i vincoli sono indipendenti dal tempo!):

$$E = \underbrace{\frac{\partial L_2}{\partial \dot q}\dot q}_{2L_2} + \underbrace{\frac{\partial L_1}{\partial \dot q}\dot q}_{L_1} - (L_0 + L_1 + L_2) = L_2 - L_0$$

dove i commenti sotto le graffe sono una conseguenza del Teorema di Eulero (Analisi II), che richiamiamo.
Teorema di Eulero Sia f funzione omogenea di grado α su $\mathbb{R}^n$. Allora $\alpha f(x) = \nabla f(x)\cdot x$.

Torniamo ai vincoli olonomi. Sia e una n-varietà, descritta da una funzione:

$$\mathbb{R}^n \ni x \longmapsto \chi(x) \in \mathbb{R}^{3n}.$$

La traiettoria determinata da q sarà data dalla composizione $\chi(q)$ e i vettori velocità si potrano quindi esprimere come

$$v(q,\dot q) = \frac{\partial \chi}{\partial q}(q)\dot q. \tag{1.32}$$

Cerchiamo un'espressione per l'energia cinetica T_2[1]:

$$T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j |v_j|^2 = \frac{1}{2} v(q,\dot{q}) \cdot M \cdot v(q,\dot{q}) \tag{1.33}$$

dove M è la matrice $3N \times 3N$ delle masse $\begin{pmatrix} m_1 I_3 \dots 0 \\ \vdots \ddots \vdots \\ 0 \dots m_n I_3 \end{pmatrix}$. Svolgendo i prodotti tra matrici, possiamo riorganizzare i termini della somma in modo da esplicitare il termine $\dot{q}$.

$$T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{h,k=1}^{n} \left(\frac{\partial \chi}{\partial q_h}(q) M \frac{\partial \chi}{\partial q_k}(q) \right) \dot{q}_h \dot{q}_h \tag{1.34}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{h,k=1}^{n} a_{h,k}(q) \dot{q}_h \dot{q}_h = \frac{1}{2} \dot{q} A(q) \dot{q} \tag{1.35}$$

dove $A(q)$ è la matrice di elementi $a_{h,k}(q) = \frac{\partial \chi}{\partial q_h}(q) M \frac{\partial \chi}{\partial q_k}(q)$, che viene chiamata *matrice cinetica.*

Vogliamo adesso introdurre una metrica basata sulla matrice A, che ci consenta di scrivere le traiettorie come estremali della funzione lunghezza definita da questa nuova metrica.
Iniziamo verificando che la matrice $A(q)$ sia definita positiva.

$$u^T \cdot A(q) \cdot u = \left(\frac{\partial \chi}{\partial q} u \right)^T M \left(\frac{\partial \chi}{\partial q} u \right) = u^T \frac{\partial \chi}{\partial q}^T M \frac{\partial \chi}{\partial q} u^2 \tag{1.36}$$

Adesso, dal momento che M è definita positiva e $Det(A(q)) \neq 0$ (i vettori $\frac{\partial \chi}{\partial q_1}(q), \dots, \frac{\partial \chi}{\partial q_n}(q)$ formano una base dello spazio tangente), abbiamo che $u^T A(q) u > 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$. La matrice $A(q)$ induce quindi una norma, grazie alla quale possiamo calcolare la *lunghezza generalizzata*

$$\mathcal{L}_A(\gamma) = \int_{t_0(\gamma)}^{t_1(\gamma)} ||\dot{\gamma}(t)||_A(t) = \int_{t_0(\gamma)}^{t_1(\gamma)} \sqrt{\dot{\gamma}(t) A(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)} dt \tag{1.37}$$

Cerchiamo adesso di eliminare la dipendenza dal tempo, operando un cambio di variabili nel funzionale lunghezza $\mathcal{L}(\gamma)$:

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} |\gamma'(t)| dt = \quad [\gamma = \tilde{\gamma} \cdot s(t), \quad \gamma' = \tilde{\gamma}'(s(t)) s'(t)] \tag{1.38}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} |\tilde{\gamma}'(s(t))| \underbrace{|s'(t)| dt}_{ds} = \int_{t_0}^{t_1} |\tilde{\gamma}'(s)| ds \tag{1.39}$$

[1] di nuovo, l'indice è il grado di omogeneità rispetto a $\dot{q}$
[2] la matrice è valutata in q

con s *parametro arco generalizzato* definito come

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\tilde{\gamma}'(\sigma)A(\tilde{\gamma}(\sigma))\tilde{\gamma}}d\sigma \tag{1.40}$$

e tale che

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_{h,k=1}^{n} a_{h,k}(q)dq_h dq_k \quad \text{(q sarà la soluzione } \tilde{\gamma}\text{)} && (1.41) \\ 1 &= \tilde{\gamma}'(s)A(\tilde{\gamma}(s))\tilde{\gamma}(s). && (1.42) \end{aligned}$$

Adesso che non abbiamo più la dipendenza dal tempo, l'energia cinetica T_2 può essere scritta in funzione di s

$$T_2(\gamma,\dot{\gamma}) = \frac{1}{2}\dot{\gamma}A(\gamma)\dot{\gamma} \underbrace{=}_{(1.38)} \underbrace{\dot{\tilde{\gamma}}(s)A(\dot{\tilde{\gamma}}(s))\dot{\tilde{\gamma}}(s)}_{=1(1.42)}\dot{s}^2 = \frac{\dot{s}^2}{2}. \tag{1.43}$$

Per ora lasciamola da parte, ci tornerà comoda tra poco.

Notiamo intanto che se $L = T_2 - V_0$ e $E = T_2 + V_0$, allora $L + E = 2T = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}$; quindi l'azione ridotta può essere espressa con l'energia cinetica:

$$\begin{aligned} S_L(\gamma) &= \int_{t_0(\gamma)}^{t_1(\gamma)} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\gamma,\dot{\gamma})\dot{\gamma}dt = \int_{t_0(\gamma)}^{t_1(\gamma)} 2T(\gamma,\dot{\gamma})dt && (1.44) \\ &\underbrace{=}_{1.38} \int_{s_0(\gamma)}^{s_1(\gamma)} 2T(\tilde{\gamma}(s),\dot{\tilde{\gamma}}(s)\dot{s}(t(s)))\frac{dt}{ds}ds && (1.45) \\ &\underbrace{=}_{\frac{1}{\dot{s}}=\frac{1}{\sqrt{2T}}(1.43)} \int_{s_0(\gamma)}^{s_1(\gamma)} \sqrt{2T}(\gamma,\dot{\gamma})ds = \int_{s_0(\gamma)}^{s_1(\gamma)} \sqrt{2(E-V)}ds && (1.46) \end{aligned}$$

Se abbiamo l'ulteriore ipotesi che i corpi non siano soggetti a forze, l'energia potenziale V risulta essere nulla e quindi il funzionale S_L diventa

$$\begin{aligned} S_L(\gamma) &= \sqrt{2E}\int_{s_0(\gamma)}^{s_1(\gamma)} ds \underbrace{=}_{(1.41)} \sqrt{2E}\int_{s_0(\gamma)}^{s_1(\gamma)} \sqrt{\sum_{h,k=1}^{n} a_{h,k}(\gamma)d\gamma_h d\gamma_k} \\ &\underbrace{=}_{d\gamma_i=\dot{\gamma}_i dt} \sqrt{2E}\int_{t_0(\gamma)}^{t_1(\gamma)} \sqrt{\dot{\gamma}(t)A(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)}dt = \sqrt{2E}\mathcal{L}_A(\gamma) \end{aligned}$$

Una volta fissato quindi il livello di energia, le traiettorie sono le curve geodetiche nella metrica definita da A.

1.3.1 La Catenaria

1.3.2 Brachistocrona

1.4 Punti Coniugati

Nel 1836 Jacobi determinò un'altra condizione sufficiente per la minimalità di

$$A_L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma, \dot{\gamma})dt \tag{1.47}$$

basata sulla teoria dei *punti coniugati*.

Sia $\gamma_C(t)$ soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange associate a L. Considereremo una famiglia parametrizzata di soluzioni di E-L $\gamma(t, s)$, definite sul solito intervallo $[t_0, t_1]$ e tali che:

$$\begin{aligned} \gamma(t, s_0) &= \gamma_C(t); & (1.48)\\ \gamma(t_0, s) &= \gamma_C(t_0); & (1.49)\\ \dot{\gamma}(t_0, s) &= s, \quad \text{in particolare } s_0 = \dot{\gamma}_C(t_0) = \dot{\gamma}(t_0, s_0). & (1.50) \end{aligned}$$

Osservazione: Il parametro s è la velocità iniziale, che è quindi distinta per ogni curva $\gamma(t, s)$[3] **Definizione:**

Dato $t^* \in [t_0, t_1]$, diciamo che $(t^*, \gamma_C(t^*))$ è un *punto coniugato a* $(t_0, \gamma_C(t_0))$ *rispetto al funzionale* A_L, *con condizione al bordo* $\gamma(t_0) = \gamma_0, \gamma(t_1) = \gamma_1$ se $\frac{\partial \gamma}{\partial s}(t^*, s_0) = 0$, cioè tutte le curve passano da $(t^*, \gamma_C(t^*))$.

Cerchiamo una definizione equivalente. Definiamo la funzione

$$y(t) = \frac{\partial \gamma}{\partial s} = \lim_{s \to s_0} \frac{\gamma(t, s) - \gamma_C(t)}{s - s_0}. \tag{1.51}$$

Otterremo adesso un problema di Cauchy per $y(t)$ derivando le equazioni

[3]se due soluzioni hanno le stesse condizioni iniziali, coincidono!

di E-L rispetto a s e valutandole in s_0[4] [5].

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}(\gamma(t,s),\dot\gamma(t,s))\right)-\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial L}{\partial q}(\gamma(t,s),\dot\gamma(t,s))=0$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q\partial \dot q}(\gamma(t,s),\dot\gamma(t,s))\frac{\partial \gamma}{\partial s}+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^2}(\gamma(t,s),\dot\gamma(t,s))\frac{\partial \dot\gamma}{\partial s}\right)-$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial q^2}(\gamma(t,s),\dot\gamma(t,s))\frac{\partial \gamma}{\partial s}-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q\partial q}(\gamma(t,s),\dot\gamma(t,s))\frac{\partial \dot\gamma}{\partial s}=0$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 L}{\partial q\partial \dot q}(\gamma(t,s),\dot\gamma(t,s))\frac{\partial \gamma}{\partial s}-\frac{\partial^2 L}{\partial q\partial \dot q}(\gamma(t,s),\dot\gamma(t,s))\frac{\partial \dot\gamma}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^2}(\gamma(t,s),\dot\gamma(t,s))\frac{\partial \dot\gamma}{\partial s}=0$$

Valutiamo in s_0 e otteniamo il *problema variazionale accessorio*

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial t}(P\dot y)-Qy=0\\ y(t_0)=0\\ \dot y(t_0)=1\end{cases}\tag{1.52}$$

in cui abbiamo posto

$$\begin{aligned}P&=P(t)=\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^2}(\gamma_C(t,s),\dot\gamma_C(t,s))\\ Q&=Q(t)=\frac{\partial^2 L}{\partial q^2}(\gamma_C(t,s),\dot\gamma_C(t,s))-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 L}{\partial q\partial \dot q}(\gamma_C(t,s),\dot\gamma_C(t,s)).\end{aligned}$$

Per completezza ricaviamoci anche le condizioni iniziali

$$y(t_0)=\lim_{s\to s_0}\frac{\gamma(t_0,s)-\gamma_C(t_0)}{s-s_0}=\lim_{s\to s_0}\frac{\gamma_C(t_0)-\gamma_C(t_0)}{s-s_0}=0;\tag{1.53}$$
$$\dot y(t_0)=\lim_{s\to s_0}\frac{\dot\gamma(t_0,s)-\dot\gamma_C(t_0)}{s-s_0}\underbrace{=}_{(1.50)}\lim_{s\to s_0}\frac{s-s_0}{s-s_0}=1.\tag{1.54}$$

Adesso possiamo enunciare la seconda definizione di punto coniugato: $t^*\in[t_0,t_1]$ è un punto coniugato a $(t_0,\gamma_C(t_0))$ se e solo se esiste una funzione y che risolve il sistema (1.52) e tale che $y(t^*)=0$.

Condizione di Jacobi debole: γ_C funzione critica di A_L non ha punti coniugati a $(t_0,\gamma_C(t_0))$ in (t_0,t_1);

[4] tutti i termini con γ sono valutati in (t,s)
[5] considereremo nuovamente $L(q,\dot q)\in\mathscr{C}^2$

Condizione di Jacobi forte: γ_C funzione critica di A_L non ha punti coniugati a $(t_0, \gamma_C(t_0))$ in $(t_0, t_1]$;

Condizione di Legendre debole: $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}(\gamma_C, \dot{\gamma}_C) \geq 0$.

Condizione di Legendre forte: $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}(\gamma_C, \dot{\gamma}_C) > 0$ (già nota da Sistemi Dinamici).

1.5 Funzionali Quadratici

In questa sezione introdurremo *funzionale quadratico*

$$\mathscr{Q}(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \left[P\dot{\gamma}^2 + Q\gamma^2\right] dt \tag{1.55}$$

per stabilire se le condizioni di Legendre e di Jacobi sono necessarie e/o sufficienti per la minimalità di un dato estremale γ_C. La particolarità di questo funzionale è che la sua equazione di E-L è uguale alla prima equazione del problema ausiliario (1.52).
Infatti, posta $L(\gamma, \dot{\gamma}) = P\dot{\gamma}^2 + Q\gamma^2$,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}}(\gamma, \dot{\gamma}) - \frac{\partial L}{\partial \gamma}(\gamma, \dot{\gamma}) = 2\frac{d}{dt}\left(P\dot{\gamma}\right) - 2Q\gamma = 0 \tag{1.56}$$

Teorema
Sia $\mathscr{Q}(\gamma)$ il funzionale appena definito, con $\gamma(t_0) = \gamma(t_1) = 0$. Se valgono le condizioni

- di Legendre: $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}(\gamma, \dot{\gamma}) > 0$
- di Jacobi: γ soluzione di (1.52) non radici in (t_0, t_1)

allora $\mathscr{Q}(\gamma) > 0 \quad \forall \gamma \neq 0$.

Dimostrazione. □

Ci limiteremo adesso a trovare condizioni per un minimo in senso debole, cioè calcolato su un insieme ristretto di curve; più precisamente, diremo che γ_C è un minimo in senso debole per A_L se $\exists \epsilon > 0 : A_L(\gamma_C) < A_L(\gamma)$ per ogni

$\gamma : |\gamma - \gamma_C| < \epsilon, \quad \gamma \neq \gamma_C$[6] punto a punto.

Risultato 1: Sia γ_C un estremale di A_L. Se valgono sia la condizione forte di Legendre che la condizione forte di Jacobi $\Rightarrow \gamma_C$ è un minimo debole di A_L.

Dimostrazione. Esaminiamo l'azione lagrangiana su tutte le curve $\gamma_C + \epsilon\xi$ con $|\xi| \leq 1 \forall t$ e $|\epsilon| \leq 1$; consideriamo lo sviluppo in forma di Taylor al secondo ordine con resto di Lagrange[7]:

$$A_L(\gamma_C + \epsilon\xi) = A_L(\gamma_C) + \underbrace{\frac{d}{d\epsilon} A_L(\gamma_C + \epsilon\xi)|_{\epsilon=0}}_{=0} \epsilon\xi + \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\lambda^2} A_L(\gamma_C + \lambda\xi)|_{\lambda=0}\epsilon^2\xi^2 \tag{1.57}$$

dove $\lambda = \epsilon\theta$, $\theta \in (0, 1)$. Ora, per far vedere che $A_L(\gamma_C + \epsilon\xi) > A_L(\gamma_C)$ basta mostrare che

$$\frac{d^2}{d\epsilon^2} A_L(\gamma_C + \epsilon\xi)|_{\lambda=0} \geq 0 \quad \forall\xi \in \Gamma$$

in modo da rendere positivo anche l'ultimo termine della somma[8].

$$\frac{d}{d\epsilon^2} A_L(\gamma_C + \epsilon\xi) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \dot{\xi}^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} \xi\dot{\xi} + \frac{\partial^2 L}{\partial q^2} \xi^2 \right) dt \tag{1.58}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(P\dot{\xi}^2 + Q\xi^2 + \right) dt = \mathscr{Q}(\xi) > 0 \quad \forall\epsilon \tag{1.59}$$

Per ottenere la seconda uguaglianza abbiamo integrato il termine $\frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} \xi\dot{\xi}$ per parti:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} \xi\dot{\xi} = \underbrace{\left[\xi^2 \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} \right]_{t_0}^{t_1}}_{=0,\ \text{perché } \xi \in \Gamma} - \int_{t_0}^{t_1} \xi\xi \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} dt - \int_{t_0}^{t_1} \xi \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} \dot{\xi} dt$$

Che è equivalente a

$$2 \cdot \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} \xi\dot{\xi} = -\int_{t_0}^{t_1} \xi^2 \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} dt \tag{1.60}$$

Sostituendo infine la (1.60) nella (1.58), otteniamo

$$\frac{d}{d\epsilon^2} A_L(\gamma_C + \epsilon\xi) = \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}}_{P(t)} \dot{\xi}^2 + \underbrace{\left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} + \frac{\partial^2 L}{\partial q^2} \right)}_{Q(t)} \xi^2 dt$$

[6] per i nostri scopi c'è l'ipotesi aggiuntiva che $\gamma \in \Gamma$

[7] tutte le curve si considerano valutate in t;

[8] per semplicità al secondo membro abbiamo omesso la dipendenza da $\gamma_C + \xi\epsilon$ e $\dot{\gamma_C} + \epsilon\dot{\xi}$

□

Risultato 2: La condizione di Legendre è necessaria affinchè γ_C sia un minimo.

Dimostrazione. Supponiamo che la condizione non sia verificata e mostriamo un controesempio in cui la variazione seconda dell'azione lagrangiana è negativa per un'opportuna scelta di ζ. Sia $f(t)$ una funzione definita in $[t_0, t_1]$, con $f(t) \neq 0 \forall t \in [a, b] \subset [t_0, t_1]$, continua, $\mathscr{C}^2$ di valore massimo 1 su un intervallo $[a', b'] \subset [a, b]$. Prendiamo adesso come perturbazione

$$\xi_\omega = f(t) sin(\omega t).$$

Abbiamo che il segno di

$$\mathscr{Q}(\xi_\omega) = \int_{t_0}^{t_1} P \dot{\xi}_\omega^2 dt + \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} Q \xi_\omega^2 dt}_{\text{valore limitato } \forall \omega}$$

è determinato dal primo addendo

$$\int_{t_0}^{t_1} P \dot{\xi}_\omega^2 dt = \int_a^b P \dot{\xi}_\omega^2 dt \leq \int_a^b P \omega \cos(\omega t)^2 dt \underbrace{\leq}_{P < -\alpha, \alpha > 0} -\alpha\omega \int_a^b \cos(\omega t)^2 dt \longrightarrow -\infty$$

□

Capitolo 2

Meccanica Hamiltoniana

2.1 Trasformata di Legendre

Sia $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{C}^2$, $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto connesso. Sia inoltre

$$det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x)\right) \neq 0 \quad \forall x \in U \tag{2.1}$$

Consideriamo un cambiamento di coordinate,

$$\phi_f : x \longrightarrow y = \frac{\partial f}{\partial x} \tag{2.2}$$

prenderà il nome di *trasformazione di Legendre*. Grazie alla condizione (2.1), localmente esiste la trasformazione inversa[1] ϕ_f^{-1}; Definiamo quandi la *trasformata di Legendre di f*

$$g(y) = G(\phi_f^{-1}(y), y), \quad \text{con} \quad G(x,y) = x \cdot y - f(x). \tag{2.3}$$

Quali proprietà ha la funzione G? Iniziamo studiandone la derivata

$$\begin{aligned} dg = \frac{\partial g}{\partial y}dy &= \left[\frac{\partial G}{\partial x}(\phi_f^{-1}(y), y) \cdot \frac{\partial \phi_f^{-1}}{\partial y}(y) + \frac{\partial G}{\partial y}(\phi_f^{-1}(y), y)\right] dy \\ &= \left[\left(y - \frac{\partial f}{\partial x}(\phi_f^{-1}(y))\right) \cdot \frac{\partial \phi_f^{-1}}{\partial y}(y) + \phi_f^{-1}(y))\right] dy \end{aligned}$$

Ora, dal momento che $\frac{\partial f}{\partial x}(\phi_f^{-1}(y)) = \frac{\partial f}{\partial x}(\phi_f^{-1}(y)) = y$, otteniamo la relazione

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \phi_f^{-1} \quad \Rightarrow \left(\frac{\partial g}{\partial y} \circ \frac{\partial f}{\partial x}\right) = x. \tag{2.4}$$

[1] per il teorema di invertibilità locale, se $det\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x) \neq 0$, allora $\frac{\partial f}{\partial}(x)$ ha un'inversa locale in U;

Verifichiamo che vale la condizione di non degenerazione per la g, in modo da invertire la trasformata appena definita.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\circ\phi_f\right)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = I\\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}^{-1}\circ\phi_f^{-1}(y) \Longrightarrow det\left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(y)\right).\end{aligned}$$

Possiamo quindi calcolare la trasformata di Legendre di g, utilizzando il procedimento appena visto. Avremo quindi una funzione

$$\phi_g : y \longrightarrow \frac{\partial g}{\partial y} \quad \left(= \phi_f^{-1}(y) = x\right) \tag{2.5}$$

Con

$$h(x) = F(x, \phi_g^{-1}(x)), \quad \text{con} \quad F(x,y) = x\cdot y - g(y). \tag{2.6}$$

Analogamente a sopra, calcoliamo le derivata di h

$$\begin{aligned}dh = \frac{\partial h}{\partial x}dx &= \left[\frac{\partial F}{\partial x}(x,\phi_g^{-1}(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,\phi_g^{-1}(x))\cdot\frac{\partial\phi_f^{-1}}{\partial x}(x)\right]dx\\ &= \left[\left(\phi_g^{-1}(x)) + x - \frac{\partial g}{\partial y}(\phi_g^{-1}(x))\right)\cdot\frac{\partial\phi_g^{-1}}{\partial x}(x)\right]dx\end{aligned}$$

e otteniamo le solita relazione

$$\begin{aligned}\phi_g^{-1} = \frac{\partial h}{\partial x} \quad &\Rightarrow \quad \left(\frac{\partial h}{\partial x}\circ\frac{\partial g}{\partial y}\right)(y) = y\\ \left(\frac{\partial h}{\partial x}\circ\phi_f^{-1}\right)(y) = y \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}.\end{aligned}$$

Vediamo adesso come utilizzare in meccanica i risultati appena ottenuti. Normalmente avremo una Lagrangiana $L(q,\dot q,t)$, con $q\in\mathbb{R}^n$ e $det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot q^2}\right)\neq 0$. Considereremo q e t come parametri e cambio di variabili opererà infatti su $\dot q$ nel seguente modo:

$$\dot q \longrightarrow p = \frac{\partial L}{\partial\dot q} \text{ detto } \textit{momento coniugato} \tag{2.7}$$

$$H(p,q,t) = [\dot q\cdot p - L(q,\dot q,t)]_{\dot q = v(q,\dot q,t)} \text{ trasformata di Legendre} \tag{2.8}$$

con H che prende il nome di *funzione di Hamilton.*

Teorema:
Supponiamo di avere $L(q,\dot q,t)$ come sopra. Allora la mappa $t\longrightarrow q(t)$ è

soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange di L se e solo se $t \longrightarrow (p(t), q(t))$ (con $p(t)$ momento coniugato di $\dot{q}$) è soluzione delle equazioni di Hamilton

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \end{cases} \tag{2.9}$$

dove H è la funzione di Hamilton.

Dimostrazione. □

Campi Vettoriali Hamiltoniani

Posto $x = (p, q)$, possiamo ridurre le equazioni di Hamilton in una forma più compatta

$$\dot{x} = J\nabla_x H = X_H \tag{2.10}$$

con $J \in \mathbb{R}^{2n}$ identità simplettica.

Ci poniamo adesso il problema di stabilire quando un dato campo vettoriale X è hamiltoniano, ossia quando esiste una funzione H tale che $X = X_H = J\nabla_x H$.
Proposizione: Se X campo vettoriale è hamiltoniano, allora la matrice $J\frac{\partial X}{\partial x}$ è simmetrica. Se il campo X è definito su un insieme semplicemente connesso, vale anche il viceversa.

Dimostrazione. □

2.2 Trasformazioni Canoniche

2.2.1 Trasformazioni Canoniche Indipendenti dal Tempo

Teorema
Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1) ψ è simplettica con valenza α;

2) $\forall H \in \mathscr{C}^2, \quad \psi_* X_H = X_{\alpha H \circ \psi^{-1}}$;

3) $\{f, g\} \circ \psi^{-1} = \alpha\{f \circ \psi^{-1}, g \circ \psi^{-1}\}$;

4) Condizione di Lie: $P \cdot dQ - \alpha p \cdot dq$ è una forma chiusa.

Dimostrazione. □

Teorema
Sia ψ trasformazione canonica. Allora ψ è simplettica.

Dimostrazione. □

2.2.2 Trasformazioni Canoniche Dipendenti dal Tempo

2.3 Metodo delle Funzioni Generatrici