Appunti e formule di Fisica I

Vittorio Meini

Anno Accademico 2015/2016
Prof. Paolo Rossi, Università di Pisa

Introduzione

Il testo che segue è stato elaborato a partire dagli appunti che ho preso seguendo il corso di Fisica I per il corso di laurea triennale in Matematica dell'Università di Pisa, tenuto dal prof. Paolo Rossi nell'anno accademico 2015/2016.
Gli appunti sono presentati in forma decisamente riassuntiva, i calcoli e i commenti sono stati ridotti ai minimi termini.

Attenzione!

Gli appunti sono incompleti, si riferiscono solamente alle prime lezioni del corso.
Gli appunti non sono stati rivisti da nessun professore, molto probabilmente possono contenere errori e\o imprecisioni.

Indice

1 Dimensioni delle grandezze fisiche **4**

2 Calcolo vettoriale **4**
2.1 Prodotto scalare 4
2.2 Prodotto vettore 4
2.3 Poprietà significativa 5

3 Moto circolare uniforme **5**

4 Leggi di Newton **6**

5 Momento Angolare **6**

6 Caduta di gravi e moto parabolico **7**
6.1 Caduta di gravi con resistenza dell'aria 8

7 Moto armonico **8**
7.1 Applicazione ad un dinamometro 9
7.2 Oscillatore isotropo con un punto di equilibrio 10

8 Sistema di n punti materiali **11**

9 Il moto Kepleriano, Gravitazione **12**
9.1 L'orbita circolare ($\epsilon = 0$) 12

10 Vincoli **13**

11 Piano inclinato **14**

12 Piano inclinato con attrito **14**

13 Macchina di Atwood
(Carrucola con filo inestensebile) **15**

14 Pendolo **15**

15 Lavoro **15**

1 Dimensioni delle grandezze fisiche

Indichiamo con L la dimensione della lunghezza, con T quella del tempo e con M quella della massa, le dimensioni delle varie grandezze sono dunque:
$[V] = LT^{-1}$ della velocità
$[a] = LT^{-2}$ dell'accelerazione
$[mV] = MLT^{-1}$
$[E] = ML^2T^{-2} = [MV^2]$ dell'energia cinetica

2 Calcolo vettoriale

I vettori possono essere espressi come somma di componenti, ciascuna moltiplicata per un versore, i versori dello spazio tridimensionale sono $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$. Possiamo dunque scrivere

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$$

2.1 Prodotto scalare

Il prodotto scalare gode della proprietà commutativa e nei tre versori dello spazio obbedisce alle seguenti regole
$\hat{\imath}\hat{\imath} = 1, \hat{\jmath}\hat{\jmath} = 1, \hat{k}\hat{k} = 1, \hat{\imath}\hat{\jmath} = 0, \hat{\imath}\hat{k} = 0, \hat{\jmath}\hat{k} = 0$
Dunque in generale

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\hat{\imath}+a_y\hat{\jmath}+a_z\hat{k})(b_x\hat{\imath}+b_y\hat{\jmath}+b_z\hat{k}) = [...] = |a||b|\cos\theta$$

dove θ è l'angolo formato dai due vettori

2.2 Prodotto vettore

Il prodotto vettore gode dell'associatività e dell'anticommutativà ($\vec{a}\wedge\vec{b} = -[\vec{b}\wedge\vec{a}]$) e nei tre versori dello spazio obbedisce alle seguenti regole
$\hat{\imath}\wedge\hat{\imath} = 0$, $\hat{\jmath}\wedge\hat{\jmath} = 0$, $\hat{k}\wedge\hat{k} = 0$

$\hat{i} \wedge \hat{j} = \hat{k} = -(\hat{j} \wedge \hat{i})$
$\hat{j} \wedge \hat{k} = \hat{i} = -(\hat{k} \wedge \hat{j})$
$\hat{k} \wedge \hat{i} = \hat{j} = -(\hat{i} \wedge \hat{k})$
Quindi in generale
$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) \wedge (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}) = [...] = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}$
Da cui
$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |a||b| \sin\theta$$
dove θ è l'angolo formato dai due vettori

2.3 Poprietà significativa

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$$

3 Moto circolare uniforme

Le equazioni del moto circolare uniforme sono:
$\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t) \\ y(t) = R\sin(\omega t) \end{cases}$
Da cui, infatti, si ricava che $x^2 + y^2 = R^2$, ossia l'equazione della circonferenza.

Derivando otteniamo le componenti della velocità
$\begin{cases} V_x = \frac{dx}{dt} = -\omega R\sin(\omega t) \\ V_y = \frac{dy}{dt} = \omega R\cos(\omega t) \end{cases}$

Da cui $|\vec{V}| = \omega R$, dunque $\omega = \frac{V}{R}$, definiamo ω **velocità angolare**
Inoltre è facile ricavare il versore della velocità, perpendicolare alla traiettoria, $\hat{t} = (-\sin(\omega t), \cos(\omega t))$.
Per definizione si può esprimere la velocità angolare come $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, da cui $\theta(t) = \omega t$.

Derivando ulteriormente la velocità rispetto al tempo si ottiene la formula dell'accelerazione, che può essere espressa come segue

$$\vec{a} = -R\omega^2\hat{r} + R\frac{d\omega}{dt}\hat{t}$$

dove appare netta la distinzione fra le due componenti dell'accelerazione, rispettivamente centrale e tangenziale

$$\begin{cases} a_c = \omega^2 R = \frac{V^2}{R} \\ a_t = \frac{dV}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} \\ V = R\omega \end{cases}$$

4 Leggi di Newton

Principio di inerzia : Un corpo non soggetto a forze resta in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme
Seconda legge : $\vec{F} = m\vec{a}$
Terza legge : $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, implica che $m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = \vec{k}$. dove $\vec{k}$ è costante

5 Momento Angolare

Il momento angolare è la quantità
$\vec{L} = \vec{r} \wedge (m\vec{V})$
Definiamo come **quantità di moto** $\rho = m\vec{V}$
E notiamo che $\vec{F}(r) = m\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt}$

La derivata del momento angolare rispetto al tempo è il
momento delle forze, $\vec{M}$, grazie alle proprietà del calcolo vettoriale si ottiene
$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}$
Dunque, grazie alle regole del prodotto vettore, possiamo affermare che

$\vec{M} = 0 \Leftrightarrow$ **il momento angolare si conserva** $\Leftrightarrow$ le forze sono radiali, cioè dirette come $\vec{r}$

6 Caduta di gravi e moto parabolico

Il fenomeno è descritto dalle seguenti equazioni
$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r_0} + \vec{V_0}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \\ \vec{V}(t) = \vec{V_0} + \vec{g}t \\ \vec{a}(t) = \vec{g} \end{cases}$$

Dunque il vettore spostamento è:
$\vec{s}(t) = \vec{r}(t) - \vec{r_0} = \vec{V_0}t + \frac{1}{2}\vec{g}t$
e tale vettore ha due componenti:
$$\begin{cases} x_t = V_{0x}t \\ y_t = V_{0y}t - \frac{1}{2}gt \\ \vec{g} = (0, -g) \\ \vec{V_0} = (V_{0x}, V_{0y}) \end{cases}$$

Da cui si ricava:
$$\begin{cases} t = \frac{x}{V_{0x}} \\ y(x) = \frac{V_{0y}}{V_{0x}}x - \frac{1}{2}\frac{g}{V_{0x}^2}x^2 \end{cases}$$
Le componenti della velocità sono:
$$\begin{cases} V_x = V_{0x} \\ V_y = V_{0y} - gt \end{cases}$$

Per trovare il punto di altezza massima (M) si imposta $V_y = 0$, poiché nel punto di altezza massima la velocità è diretta orizzontalmente, dunque si ricava $t_M = \frac{V_{0y}}{g}$ e, sostituendo nuovamente, $x_M = \frac{V_{0x}V_{0y}}{g}$ e $y_M = \frac{V_{0y}^2}{2g}$
Alla partenza invece vale $y = 0$ da cui si ricava $t_0 = \frac{2V_{0y}}{g}$ e $x_0 = \frac{2V_{0x}V_{0y}}{g} = V_{0x}t_0$
La formula della gittata è $D = 2\frac{V_0^2}{g}\sin\theta\cos\theta = \frac{V_0^2}{g}\sin 2\theta$,

dove θ è l'angolo formato dalla rampa di lancio con il piano, si nota che l'angolo necessario ad ottenere la gittata massima è $\theta_{MAX} = 45°$

6.1 Caduta di gravi con resistenza dell'aria

In tal caso l'equazione del moto è
$m\vec{a} = m\vec{g} - \gamma\vec{V}$, dove $-\gamma\vec{V}$ è la resistenza dell'aria
Ricordando che $\vec{a} = \frac{d^2x}{dt} = \frac{dV}{dt}$ e $\vec{V} = \frac{dx}{dt}$, abbiamo

$\frac{d^2x}{dt} = g - \frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dV}{dt} = g - \frac{\gamma}{m}V = g - \frac{V}{\tau} \\ \tau = \frac{m}{\gamma} \end{cases}$

Da cui
$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\tau}(V - V_0) \\ V_0 = g\tau \\ W = V - V_0 \\ \frac{dW}{dt} = -\frac{W}{\tau} \end{cases}$

Risolvendo la differenziale abbiamo

$$V(t) = V_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{dx}{dt}$$

Da cui $a = \frac{dV}{dt} = ge^{-\frac{t}{\tau}}$
E, integrando

$$x(t) = x_0 + V_0(t + \tau e^{-\frac{t}{\tau}})$$

7 Moto armonico

In questo paragrafo useremo la notazione secondo cui:
$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \dot{x} \\ \\ \frac{d^2x}{dt} = \ddot{x} \end{cases}$

L'equazione del moto armonico è
$\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{x} = -kx$

Da cui otteniamo
$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt} = -|\frac{k}{m}|x(t) \\ \frac{k}{m} = \omega^2 \end{cases}$

Risolvendo la differenziale si ottiene
$\begin{cases} x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \\ A = x_0 \\ B = \frac{V_0}{\omega} \end{cases}$

Derivando si ottiene anche l'equazione della velocità
$\begin{cases} x(t) = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \\ V(t) = -\omega x_0\sin\omega t + V_0\cos\omega t \end{cases}$

Per trovare l'istante iniziale impostiamo
$V(t_0) = 0 \Rightarrow x_0\sin\omega t = \frac{V_0}{\omega}\cos\omega t \Rightarrow \tan(\omega t_0) = \frac{V_0}{\omega x_0} \Rightarrow$
$\begin{cases} \cos\omega t_0 = \frac{\omega x_0}{\sqrt{(\omega x_0)^2+V_0^2}} \\ \sin\omega t_0 = \frac{V_0}{\sqrt{(\omega x_0)^2+V_0^2}} \end{cases}$

Studiando invece gli zeri delle derivate di $x(t)$ e $V(t)$ si trovano rispettivamente estensione e velocità massima
$x_M = \frac{1}{\omega}\sqrt{(\omega x_0)^2 + V_0^2}$; $V_M = \omega x_M$

Inoltre si ricorda che l' **energia potenziale dell'oscillatore** è $U(t) = \frac{1}{2}kx(t)^2$

7.1 Applicazione ad un dinamometro

L'equazione del moto è
$m\ddot{y} = mg - k(y - y_0)$, da cui si ricava

$$\begin{cases} \ddot{y} = g - \omega^2(y - y_0) \\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$

Per studiare il punto di equilibrio si impone
$\ddot{y} = 0 \Rightarrow y_E = y_0 + \frac{g}{\omega^2} \Rightarrow g = \omega^2(y_E - y_0) \Rightarrow \ddot{y} = \omega^2(y_E - y)$

Risolvendo la differenziale si ottiene

$$\begin{cases} y = y_E + A\cos\omega t + B\sin\omega t \\ y(0) = y_0 \\ V(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow y = y_E + (y_0 - y_E)\cos\omega t$$

Per ottenere l'estensione massima si impone
$cos\omega t = -1 \Rightarrow y_M = 2y_E - y_0 \Rightarrow y_M - y_0 = 2(y_E - y_0)$

7.2 Oscillatore isotropo con un punto di equilibrio

Impostiamo anche in questo caso l'equazione del moto

$$m\ddot{r} = -k\vec{r} \Rightarrow \vec{a} = -\omega^2\vec{r} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 x \\ \ddot{y} = -\omega^2 y \\ \ddot{z} = -\omega^2 z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = A_x\cos\omega t + B_x\sin\omega t \\ y = A_y\cos\omega t + B_y\sin\omega t \\ z = A_z\cos\omega t + B_z\sin\omega t \end{cases}$$

Da cui
$\vec{r} = \vec{A}\cos\omega t + \vec{B}\sin\omega t$
$\vec{V} = -\omega\vec{A}\sin\omega t + \omega\vec{B}\cos\omega t$

Che, imponendo le condizioni, diventano
$\vec{r} = \vec{r_0}\cos\omega t + \frac{\vec{V_0}}{\omega}\cos\omega t$
$\vec{V} = -\omega\vec{r_0}\sin\omega t + \vec{V_0}\cos\omega t$

Utilizzando le regole del calcolo vettoriale ricaviamo
$\vec{V} \wedge \vec{r} = \vec{V_0} \wedge \vec{r_0}$
quindi
$\frac{d(\vec{V}\wedge\vec{r})}{t} = \frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{V} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} \boxed{=} \vec{a} \wedge \vec{r} = -\omega^2\vec{r} \wedge \vec{r} \boxed{=} 0$
dove la prima uguaglianza riquadrata è dovuta al fatto

che il secondo membro a sinistra vale 0, poiché, come nel caso del secondo riquadro, i due vettori hanno la stessa direzione, dunque prodotto vettore nullo.

Scegliamo come istante iniziale quello in cui $\vec{V}$ e $\vec{r}$ sono perpendicolari

$$\begin{cases} \vec{r}\vec{V} = -\omega\vec{r_0}^2 \sin\omega t\cos\omega t + \frac{V_0^2}{\omega}\sin\omega t\cos\omega t + \vec{r_0}\vec{V_0}\cos^2\omega t + \vec{r_0}\vec{V_0}\sin^2\omega t \\ \vec{r}\vec{V} = 0 \end{cases}$$

Da cui

$$\begin{cases} x = \vec{r_0}\cos\omega t = \vec{r_{0x}}\cos\omega t + \frac{\vec{V_{0x}}}{\omega}\cos\omega t \\ y = \frac{\vec{V_0}}{\omega}\sin\omega t = \vec{r_{0y}}\cos\omega t + \frac{\vec{V_{0y}}}{\omega}\cos\omega t \end{cases}$$

Notiamo infine che

$(\frac{x}{r_0})^2 + (\frac{\omega y}{V_0})^2 = 1$ è l'equazione di un'ellisse

8 Sistema di n punti materiali

In un sistema di n punti materiali, con $i = 1, ..., n$
m_i e $\vec{r_i}$ sono rispettivamente la massa e il vettore posizione dell'i-esimo punto

Ricordiamo che
$\vec{F_i} = m\frac{d^2\vec{r_i}}{dt^2}$

Inoltre, per la terza legge di Newton
$\forall i, j\ \vec{F_{ij}} + \vec{F_{ji}} = 0$ dove $\vec{F_{ij}}$ è la forza esercitata da i su j, e viceversa

La risultante delle forze sul punto i è $\vec{F_i} = \sum_{j\neq i}\vec{F_{ji}} + \vec{F_i}^{(e)}$, dove $\vec{F_i}^{(e)}$ sono le forze esterne che agiscono su i

La massa totale del sistema è $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$

La posizione del centro di massa è $\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r_i}}{M}$

Da cui $\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$

Inoltre la velocità del centro di massa $\vec{V_{C.M}} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v_i}}{M}$

La forza esterna che agisce sul sistema è $\vec{F}^{(e)} = M\vec{A}_{C.M}$

La quantità di moto del sistema è
$\sum_{i=1}^{n} \rho_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{V_i} = M\vec{V_{C.M}} = \vec{\rho}$

Quindi $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{F}^{(e)}$

9 Il moto Kepleriano, Gravitazione

Le formule fondamentali della gravitazione sono

Forza gravitazionale $\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$

Energia potenziale $U(r) = -\frac{GMm}{r}$, da cui l'energia totale $E = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{GMm}{r}$

Il tipo di moto è determinato dall'**eccentricità**, ϵ

$$\begin{cases} \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{GMm^2}} \\ E = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{GMm}{r} \\ L = \vec{r} \wedge m\vec{V} \end{cases}$$

Se $\epsilon = 0$ l'orbita è circolare
Se $0 < \epsilon < 1$ l'orbita è ellittica
Se $\epsilon = 1$ l'orbita è parabolica
Se $\epsilon > 1$ l'orbita è iperbolica

9.1 L'orbita circolare ($\epsilon = 0$)

Nel caso del moto circolare $a = \frac{V^2}{R}$ e $V = \frac{2\pi R}{T}$

La Forza gravitazionale è $F = \frac{mGM}{R^2}$, da qui si imposta l'equazione del moto e con varie sostituzioni si arriva alla

formula del periodo orbitale:
$ma = \frac{GMm}{R^2} \Rightarrow a = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow \frac{V^2}{R} = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow V^2 = \frac{GM}{R} \Rightarrow \frac{(2\pi)^2 R^2}{T^2} = \frac{GM}{R} \Rightarrow T^2 = \frac{(2\pi)^2 R^3}{GM} \Rightarrow T = \frac{2\pi R^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM}}$

10 Vincoli

I **gradi di libertà** sono le coordinate necessarie a stabilire univocamente il moto di un corpo, ad esempio un punto materiale ha tre gradi di libertà (lungo gli assi x,y,z), un corpo rigido invece ne ha sei, tre traslazionali e tre rotazionali (sempre lungo i tre assi).
I **vincoli** sono invece le limitazioni al moto del corpo.
$\vec{R}$: **Reazione vincolare**, è una forza che esercita i vincoli.
$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}^{(a)} + \vec{R} = m\vec{a}$
vincoli lisci (olonomi) $\leftrightarrow$ Tutte le forze di reazione sono ortogonali
vincoli anolonomi $\leftrightarrow$ Non tutte le forze di reazione sono ortogonali.

Introduciamo la seguente notazione
s=# (numero dei) gradi di libertà
c= # coordinate
v= # vincoli
r=# forze di reazione vincolare

Valgono le seguenti relazioni
$c - v$=# equazioni necessarie a descrivere il fenomeno
$c - r$=# incognite

11 Piano inclinato

Vale sul piano inclinato la relazione $y = y_0 - x\tan\alpha$, da cui $\ddot{y} = -\ddot{x}\tan\alpha$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = R_x \\ m\ddot{y} = R_y - mg \\ \frac{R_x}{R_y} = \tan\alpha \\ \ddot{y} = -\ddot{x}\tan\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = R_y\tan\alpha \\ -m\ddot{x}\tan\alpha = R_y - mg \\ \ddot{y} = -\ddot{x}\tan\alpha \end{cases} \Rightarrow [...] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} R_y = mg\cos^2\alpha \\ R_x = mg\sin\alpha\cos\alpha \\ m\ddot{x} = \sin\alpha\cos\alpha \\ \ddot{y} = -g\sin^2\alpha \end{cases}$$

12 Piano inclinato con attrito

Premessa: *Esistono due tipi di Attrito:*

Attrito statico: *L'oggetto sul piano inclinato rotola senza strisciare e l'energia si conserva*

Attrito dinamico: *L'oggetto striscia senza rotolare e l'energia non si conserva*

Nel caso dell'attrito statico chiamiamo la forza di attrito statico $\vec{F}_{AS}$, il coefficiente di attrito statico μ_s e la reazione del piano N, allora vale:

$\vec{F}_{AS} \leq \mu_s N \Rightarrow \vec{F}_{AS} \leq \mu_s mg\cos\alpha$

La componente parallela al piano della forza di attrazione gravitazionale è $F_g = mg\sin\alpha$, poichè siamo in caso di attrito statico imponiamo $F_g = F_{AS}$, da queste condizioni ricaviamo:

$mg\sin\alpha \leq \mu_s mg\cos\alpha \Rightarrow \tan\alpha \leq \mu_s \Rightarrow \exists\alpha|\tan\alpha = \mu_s$

Per quanto riguarda l'attrito dinamico, adottando una notazione analoga alla precendente, vale la relazione:

$\vec{F}_{AC} = \mu_c N \Rightarrow m\ddot{s} = mg\sin\alpha - \mu_c mg\cos\alpha \Rightarrow$

$\ddot{s} = g(\sin\alpha - \mu_c \cos\alpha) \Rightarrow \exists \alpha > \alpha_c^* | \mu_c = \tan \alpha_c^*$
Quindi $\alpha_c^* < \alpha_s$ e $\mu_c < \mu_s$

13 Macchina di Atwood (Carrucola con filo inestensebile)

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = m_1 g - \vec{T} \\ m_2\ddot{x}_2 = m_2 g - \vec{T} \\ \ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{T}| = 2g\mu \\ \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \Rightarrow \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 = \frac{m_1-m_2}{m_2+m_1} g \\ \ddot{x}_2 = \frac{m_2-m_1}{m_2+m_1} g \end{cases}$$

14 Pendolo

$\vec{s} = l\theta \Rightarrow \dot{\vec{s}} = r = l\dot{\theta}$
Da cui si può impostare l'equazione del moto
$R - mg\cos\theta = \frac{mV^2}{l} \Rightarrow R - mg\cos\theta = ml\dot{\theta}$
Derivando e tramite le relazioni scritte sopra si ottiene:
$m\ddot{s} = -mg\sin\theta \Rightarrow l\ddot{\theta} = -g\sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$
Si può approssimare al caso delle piccole oscillazioni, in cui vale $\sin\theta \approx \theta$ e $\theta = \theta_0 \cos\omega\theta$, in tal caso
$$\begin{cases} \ddot{\theta} \approx -\omega^2\theta \\ \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \end{cases} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

15 Lavoro

Calcoliamo l'integrale della forza rispetto al tempo, notando che equivale alla variazione della quantità di moto ($\vec{\rho}$)
$\int \vec{F} dt = \int \frac{d\vec{\rho}}{dt} dt = \Delta\vec{\rho}$
Il lavoro (L), è l'integrale della forza rispetto allo spostamento, $\int \vec{F} d\vec{s}$
Calcoliamo il lavoro da un punto A ad un punto B
$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} d\vec{s} = \int_{t(A)}^{t(B)} \vec{F}\vec{V} dt = \int_{t(A)}^{t(B)} m\frac{d\vec{V}}{dt}\vec{V} dt = \frac{1}{2}m\int_{t(A)}^{t(B)} d\vec{V}^2 \boxed{=}$
$\frac{1}{2}m(\vec{V}_B^2 - \vec{V}_A^2) = \Delta E_c$

Dunque il lavoro da un punto A ad un punto B è la differenza dell'energia cinetica e l'uguaglianza riquadrata deriva dalla relazione $\frac{d\vec{V}^2}{dt} = 2V\frac{d\vec{V}}{dt}$