$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^4 \sum\limits_{k=n}^{n^2} \alpha^k$, *studiare la convergenza al variare del parametro* α.

Quanto vale $\sum\limits_{k=n}^{n^2} \alpha^k$? Abbiamo che

$$\sum_{k=n}^{n^2} \alpha^k = \alpha^n + \alpha^{n+1} + ... + \alpha^{n^2} = \alpha^n(1 + \alpha + ... + \alpha^{n^2-n}) = \alpha^n(\frac{\alpha^{n^2-n+1} - 1}{\alpha - 1}),$$

da cui

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \sum_{k=n}^{n^2} \alpha^k = \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \alpha^n (\frac{\alpha^{n^2-n+1} - 1}{\alpha - 1})$$

$\underline{\alpha = 1}$

Studiamo intanto il caso $\alpha = 1$, si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \sum_{k=n}^{n^2} 1 = \sum_{n=1}^{\infty} n^4 (n^2 - n) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^6,$$

che diverge.

$\underline{\alpha > 1}$

Se $\alpha > 1$ abbiamo $\alpha^n(\frac{\alpha^{n^2-n+1}-1}{\alpha-1}) \sim \frac{\alpha^{n^2+1}}{\alpha-1}$, quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \alpha^n (\frac{\alpha^{n^2-n+1} - 1}{\alpha - 1}) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^4 (\frac{\alpha^{n^2+1}}{\alpha - 1}) = \frac{1}{\alpha - 1} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 (\alpha^{n^2+1}),$$

di questa ultima serie possiamo studiare la convergenza con il criterio del rapporto, ricordando che $\alpha > 1$.

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^4}{n^4} \cdot \frac{\alpha^{(n+1)^2+1}}{\alpha^{n^2+1}} = (\frac{n+1}{n})^4 \cdot \alpha^{2n+1} \to 1 \cdot +\infty = +\infty > 1,$$

quindi la serie diverge.

$\underline{\alpha < 1}$

Se $\alpha < 1$ abbiamo invece $\alpha^n(\frac{\alpha^{n^2-n+1}-1}{\alpha-1}) \sim \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$, quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \alpha^n (\frac{\alpha^{n^2-n+1} - 1}{\alpha - 1}) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^4 (\frac{\alpha^n}{1 - \alpha}) = \frac{1}{1 - \alpha} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \alpha^n,$$

applichiamo il criterio del rapporto come prima, ma ricordando che stavolta $\alpha < 1$.

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = (\frac{n+1}{n})^4 \cdot \frac{\alpha^{n+1}}{\alpha^n} = (\frac{n+1}{n})^4 \cdot \alpha \to 1 \cdot \alpha = \alpha < 1,$$

quindi la serie converge.